

AUTOMATIZAREA PROCESULUI DE FORAJ

PARTEA I: MODELAREA GARNITURII DE FORAJ

Conf. dr. ing. Vasile Cîrtoaje, asist. ing. Otilia Cangea

Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

Rezumat: Garnitura de prăjini de foraj constituie un subsistem din componența sistemului automat de avans al sapei și a sistemului automat de manevră (de introducere și extragere a sapei), avînd o influență determinantă asupra comportamentului dinamic al obiectului condus, deci asupra performanțelor dinamice ale celor două sisteme automate. Plecînd de la acest fapt, lucrarea abordează problema modelării analitice a garniturii și a transformării modelului primar (sub forma unei ecuații diferențiale cu derivate parțiale în care mărimile de intrare definesc condițiile la limită) într-un model multivariabil, explicit de tip intrare-ieșire, care să evidențieze componentele aperiodeice și componentele oscilant-amortizate, specifice dinamicii garniturii și, totodată, să poată fi simplificat prin neglijarea armonicilor de ordin superior.

1. Considerații generale privind automatizarea procesului de foraj

Ca urmare a creșterii adîncimii de foraj și extinderii forajului marin, conducerea automată adaptiv-optimală a procesului de avans al sapei de foraj și a procesului de manevră joacă un rol tot mai important în menținerea unui grad ridicat de securitate tehnică și siguranță în funcționare, concomitent cu reducerea costului pe unitate de lungime forată, prin creșterea vitezei medii de înaintare a sapei, diminuarea uzurii sapei și garniturii de prăjini, reducerea timpului de manevră și a consumului de energie.

Așa cum reiese din figurile 1 și 2, în analiza procesului mecanic de avans al sapei se poate considera că obiectul condus este alcătuit din subsistemele TGMC (tobă-geamblac-macara-cîrlig), GP (garnitura de prăjini) și SP (sapă-rocă), fiecare subsistem avînd două mărimi de intrare și două mărimi de ieșire (ω - viteza unghiulară a tobei, M_t - momentul la tobă, v_c - viteza la cîrlig, G_c - sarcina la cîrlig, v_s - viteza de avans a sapei, G_s - sarcina pe sapă, n - viteza de rotație a sapei, M_s - momentul rezistent la sapă).

Conducerea automată optimală a procesului de avans al sapei de foraj presupune stabilirea în timp real a valorilor optime ale parametrilor mecanici și hidraulici ai regimului de foraj (sarcina pe sapă și viteza de rotație a sapei, respectiv debitul de fluid și viteza jeturilor la ieșirea din duzele sapei), evaluarea momentului optim pentru extragerea sapei și menținerea parametrilor regimului de foraj la valorile optime determinate. Realizarea unei conduceri optimale pornește de la premisa alegerii corespunzătoare a sapei și a fluidului de foraj, în strînsă corelație cu natura și caracteristicile rocilor traversate. Pentru menținerea performanțelor dinamice în condițiile în care unii parametri ai obiectului condus se modifică odată cu creșterea adîncimii de foraj, sistemul automat de avans al sapei de foraj trebuie să fie de tip adaptiv.

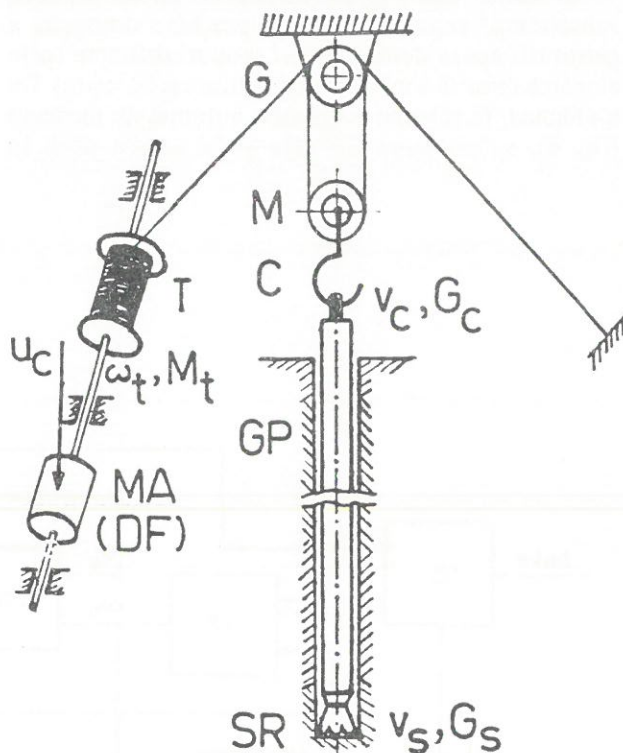


Figura 1. Schema simplificată a instalației de foraj MA(DF)-mecanismul de acționare (dispozitivul de frînare), T-tobă, G-geamblac, M-macara, C-cîrlig, GP-garnitura de prăjini, SR-subsistemul sapă-rocă

În cazul unei garnituri de prăjini de foraj omogene, modalitatea logică (naturală) de interconectare a subsistemului GP cu subsistemele adiacente TGMC și SR (fig. 2) presupune ca subsistemul GP să fie definit în varianta în care vitezele de coborîre ale capetelor garniturii reprezintă mărimile de intrare, iar forțele de întindere la capete - mărimile de ieșire.

În cazul unei garnituri de prăjini alcătuite din două tronsoane omogene (fig. 3), există două posibilități de interconectare a celor două subsisteme componente, astfel încît sistemul GP să aibă ca mărimi de intrare vitezele v_1 și v_3 , iar ca mărimi de ieșire forțele G_1 și G_3 .

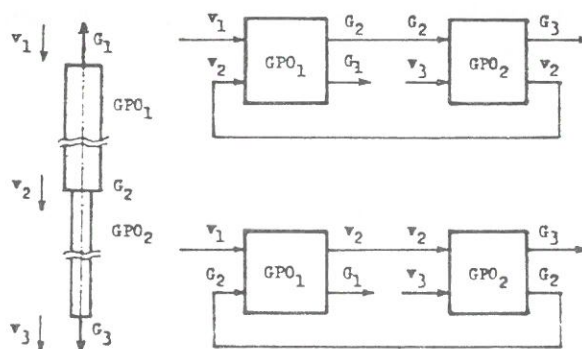


Figura 3. Descompunerea garniturii de prăjini în două subsisteme de prăjini omogene

În cadrul celor două scheme de interconexiune, subsistemul reprezentat de o porțiune omogenă a garniturii apare definit în trei moduri distincte (prin alegerea diferită a mărimilor de intrare și de ieșire). De asemenea, în schema sistemului automat de manevră (fig. 4), subsistemul GP este altfel definit decât în

schema sistemului automat de avans. La introducerea garniturii în sondă, forța G_s este, în anumite condiții, proporțională cu v_s^2 , iar la extragerea garniturii, forța G_s este practic constantă, avînd valoarea neglijabilă (subsistemul GP are o singură intrare- viteză v_c).

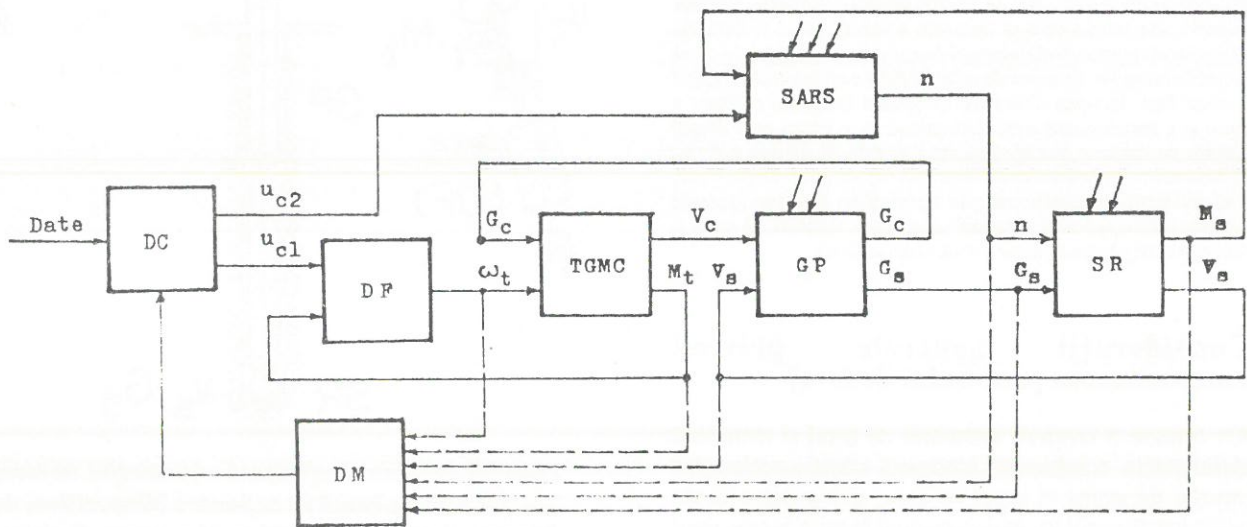


Figura 2. Sistem automat adaptiv-optimal pentru avansul sapei de foraj: DC-dispozitiv de comandă, SARS-subsistem automat pentru rotirea sapei, DF-dispozitiv de frinare, TGMC-subsistemul tobă-geamblac-macara-cîrlig, GP-garnitura de prăjini, SR-subsistemul sapă-rocă, DM-dispozitiv de măsurat

În general, prin alegerea convenabilă a mărimilor de intrare și de ieșire, un subsistem de tip GPO (garnitură de prăjini omogenă) poate fi definit și utilizat în șase variante distincte (fig. 5). Primele patru variante sînt fizic realizabile (respectă principiul cauzalității), în timp ce ultimele două variante sînt fizic irealizabile (variante de calcul, abstracte), utile totuși în analiza unor conexiuni complexe.

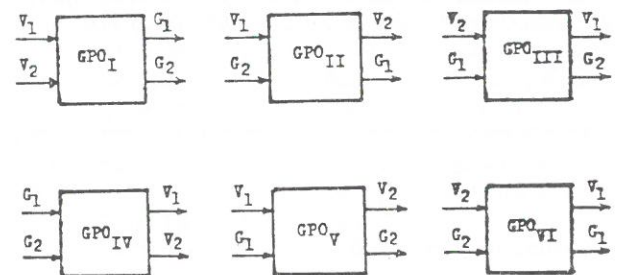


Figura 5. Variante de definire a sistemului GPO

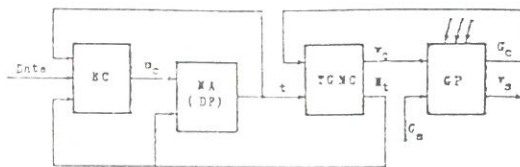


Figura 4. Schema sistemului automat de manevră: EC-element de comandă, MA (DP)-mecanism de acționare (dispozitiv de frinare), TGMC-subsistemul tobă-geamblac-macara-cîrlig, GP-garnitura de prăjini

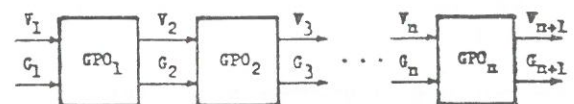


Figura 6. Schema de interconexiune a subsistemelor în cazul unei garniturii formate din tronsoane omogene

Deoarece subsistemele de tip GPO sînt liniare, fiecărei variante i se poate ataşa o matrice de transfer de forma

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (1)$$

care exprimă dependenţa în regim dinamic a mărimilor de ieşire în raport cu mărimile de intrare.

În cazul unei garnituri de prăjini, formate din n tronşoane omogene, căreia îi corespunde conexiunea serie din figura 6, matricea de transfer echivalentă are expresia $H = H_n H_{n-1} \dots H_1$. Cunoscîndu-se H , din

$$\begin{bmatrix} V_{n+1} \\ G_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ G_1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

se poate obţine uşor matricea de transfer pentru fiecare din cele patru variante fizic realizabile ale subsistemului GP. De exemplu, pentru varianta cu V_1 şi V_{n+1} mărimi de intrare, G_1 şi G_{n+1} mărimi de ieşire, avem (3):

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{11}/H_{12} & 1/H_{12} \\ (H_{12}H_{21} - H_{11}H_{22})/H_{12} & H_{22}/H_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_{n+1} \end{bmatrix}$$

2. Modelul primar al subsistemului GPO

O garnitură de prăjini omogenă formează un sistem cu două mărimi de intrare şi două mărimi de ieşire: viteza de coborîre a capătului superior V_1 , viteza de coborîre a capătului inferior V_2 , forţa de întindere la capătul superior G_1 şi forţa de întindere la capătul inferior G_2 (fig. 7). Variabila x desemnează poziţia unei secţiuni transversale a materialului tubular faţă de capătul superior al garniturii, în condiţiile garniturii nedeformate, iar funcţiile $u(t,x)$ şi $U(t,x)$ exprimă poziţia secţiunii de coordonată x faţă de capătul superior al garniturii, respectiv faţă de un reper fix, în condiţiile garniturii deformate:

$$U(t,x) = u(t,x) + S_1(t) \quad (4)$$

Asupra unui element al materialului tubular, cuprins între secţiunile infinit apropiate de coordonate x şi $x+dx$, acţionează următoarele forţe:

- forţa de inerţie

$$A dx \rho \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2},$$

unde A este aria secţiunii transversale, iar ρ densitatea materialului tubular;

- forţele longitudinale de natură elasto-disipativă

$$A [\sigma(t,x+dx) - \sigma(t,x)] = A \frac{\partial \sigma(t,x)}{\partial x} dx,$$

unde prin σ am notat efortul unitar longitudinal de întindere;

- forţa de frecare viscoasă cu fluidul de foraj

$$\varepsilon \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} dx,$$

unde ε este coeficientul de frecare viscoasă;

- greutatea materialului tubular

$$A dx \rho g$$

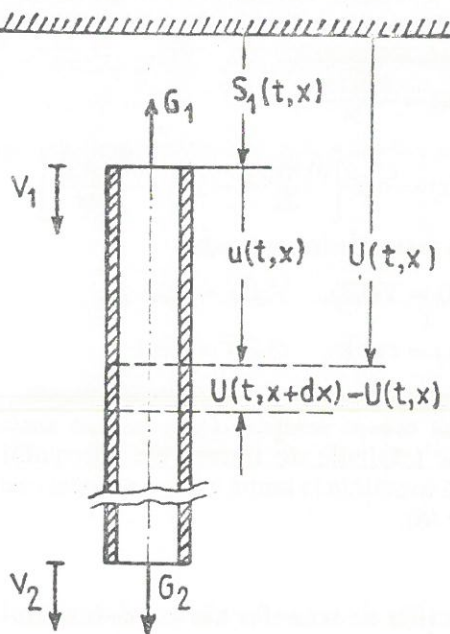


Figura 7. Garnitură de prăjini omogenă

Presupunînd că materialul tubular satisface modelul Kelvin al corpurilor elasto-disipative,

$$E \left(\tau \frac{d\delta}{dt} + \delta \right) = \sigma \quad (5)$$

(δ - deformația relativă, E - modulul de elasticitate, τ - constanta de timp ce caracterizează întârzierea deformației în raport cu efortul), forța elasto-disipativă rezultantă, care acționează asupra porțiunii elementare a materialului tubular, capătă expresia

$$AE dx \left[\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 U(t,x)}{\partial t \partial x^2} \right]$$

Din condiția de echilibru al forțelor care acționează asupra elementului cuprins între secțiunile de coordonate x și $x+dx$, obținem modelul matematic al garniturii omogene, sub forma următoarei ecuații cu derivate parțiale:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\beta \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} + 2\nu \frac{\partial U}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = g, \quad (6)$$

în care

$$\beta = \frac{\tau E}{2\rho}, \quad \nu = \frac{\varepsilon}{2A\rho}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (7)$$

Ecuația (6) împreună cu condițiile inițiale

$$U(t,x) \Big|_{t=0} = f_1(x), \quad \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} \Big|_{t=0} = f_2(x) \quad (8)$$

și condițiile la limită (exprimate prin intermediul celor două mărimi de intrare) constituie modelul matematic primar al subsistemului GPO. Într-un punct de coordonată x , viteza de coborîre și forța de întindere au următoarele expresii:

$$V(t,x) = \frac{\partial U(t,x)}{\partial t}, \quad (9)$$

$$G(t,x) = AE \left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial x} - 1 + \tau \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t \partial x} \right]. \quad (10)$$

Prin particularizare, rezultă:

$$V_1(t) = V(t,0), \quad V_2(t) = V(t,L), \quad (11)$$

$$G_1(t) = G(t,0), \quad G_2(t) = G(t,L),$$

unde L este lungimea garniturii nedeformate.

Două dintre relațiile (11), anume acelea care definesc mărimile de intrare ale sistemului GPO, exprimă condițiile la limită atașate ecuației cu derivate parțiale (6).

3. Funcțiile de transfer ale subsistemului GPO

Modelul matematic al subsistemului GPO, exprimat prin ecuația diferențială cu derivate parțiale (6) și oricare două dintre condițiile la limită (11) este liniar. În vederea determinării funcțiilor de transfer, vom considera că pentru $t \leq 0$, garnitura se găsește într-un regim staționar caracterizat prin viteza de coborîre V_0 și forța de întindere la capătul superior G_0 . Relația (4) devine

$$U(t,x) = u(x) + V_0 t \quad (12)$$

iar ecuația cu derivate parțiale (6) se transformă în ecuația diferențială ordinară

$$c \frac{d^2 u}{dx^2} = 2\nu V_0 - g, \quad (13)$$

avînd soluția generală

$$u(x) = -\frac{g - 2\nu V_0}{2c^2} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (14)$$

Constantele C_1 și C_2 se calculează din condițiile $u(0) = 0$ și $G(x) \big|_{x=0} = G_0$, ținînd seama de (10) și (14). Obținem astfel, pentru $t \leq 0$:

$$u(x) = -\frac{g - 2\nu V_0}{2c^2} x^2 + \left(1 + \frac{G_0}{AE}\right) x. \quad (15)$$

Efectuînd schimbarea de funcție

$$U(t,x) = W(t,x) + u(x) + V_0 t \quad (16)$$

ecuația cu derivate parțiale (6) devine omogenă:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - 2\beta \frac{\partial^3 W}{\partial t \partial x^2} + 2\nu \frac{\partial W}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad (17)$$

iar condițiile inițiale devin zero, deoarece

$$W(t,x) \Big|_{t \leq 0} \equiv 0. \quad (18)$$

Prin trecerea la noua funcție $W(t,x)$ și introducerea notațiilor

$$v(t,x) = V(t,x) - V_0, \quad (19)$$

$$g(t,x) = G(t,x) - G_0,$$

relațiile (9) și (10) capătă forma

$$v(t,x) = \frac{\partial W(t,x)}{\partial t}, \quad (20)$$

$$g(t,x) = AE \left[\frac{\partial W(t,x)}{\partial x} + \tau \frac{\partial^2 W(t,x)}{\partial t \partial x} \right] \quad (21)$$

iar relațiile (11), din care se aleg condițiile la limită, se transformă în:

$$v_1(t) = v(t,0), \quad v_2(t) = v(t,L), \quad (22)$$

$$g_1(t) = g(t,0), \quad g_2(t) = g(t,L), \quad (23)$$

unde

$$v_1(t) = V_1(t) - V_1(0), \quad v_2(t) = V_2(t) - V_2(0), \quad (24)$$

$$g_1(t) = G_1(t) - G_1(0), \quad g_2(t) = G_2(t) - G_2(0).$$

În urma aplicării transformării Laplace ecuației (17), obținem:

$$\frac{d^2 W(s,x)}{dx^2} - \alpha^2 W(s,x) = 0, \quad (25)$$

unde

$$\alpha = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{s(s+2\nu)}{s+1}} \quad (26)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (25) are forma:

$$W(s,x) = C_1(s)e^{\alpha x} + C_2(s)e^{-\alpha x} \quad (27)$$

De asemenea, prin aplicarea transformării operaționale Laplace, din relațiile (20) și (21), respectiv (22) și (23), rezultă

$$V(s,x) = s W(s,x), \quad (28)$$

$$G(s,x) = AE(\tau s + 1) \frac{\partial W(s,x)}{\partial x} \quad (29)$$

și

$$W(s,0) = \frac{1}{s} V_1(s), \quad (30)$$

$$W(s,L) = \frac{1}{s} V_2(s) \quad (31)$$

$$\frac{W(s,x)}{x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{AE(\tau s + 1)} G_1(s), \quad (32)$$

$$\left. \frac{W(s,x)}{x} \right|_{x=L} = \frac{1}{AE(\tau s + 1)} G_2(s) \quad (33)$$

Varianta I: V_1, V_2 - intrări; G_1, G_2 - ieșiri.

Din (27), (30) și (31), obținem

$$C_1 = \frac{-e^{-\alpha L} V_1 + V_2}{s(e^{\alpha L} + e^{-\alpha L})}, \quad C_2 = \frac{e^{\alpha L} V_1 - V_2}{s(e^{\alpha L} - e^{-\alpha L})},$$

deci

$$W(s,x) = \frac{sh\alpha(L-x) \cdot V_1(s) + sh\alpha x \cdot V_2(s)}{s \cdot sh\alpha L} \quad (34)$$

Ținând seama de (29), avem:

$$G(s,x) = K \frac{\tau s + 1}{s} \cdot \frac{-\alpha L ch\alpha(L-x) \cdot V_1(s) + \alpha L ch\alpha x \cdot V_2(s)}{sh\alpha L} \quad (35)$$

unde $K = \frac{AE}{L}$ reprezintă constanta elastică a garniturii.

Prin particularizarea relației (35) pentru $x = 0$ și $x = L$, găsim funcțiile de transfer ale subsistemului GPO:

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = K \frac{\tau s + 1}{s} \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{th\gamma} & \frac{\gamma}{sh\gamma} \\ -\frac{\gamma}{sh\gamma} & \frac{\gamma}{th\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

unde

$$\gamma = L\alpha = \frac{L}{c} \sqrt{\frac{s(s+2\nu)}{\tau s + 1}} \quad (37)$$

Varianta II: V_1, G_2 - intrări; V_2, G_1 - ieșiri.

Pe baza condițiilor la limită (30) și (33), din (27), (28) și (29) rezultă:

$$V(s,x) = \frac{ch\alpha(L-x)}{ch\alpha L} \cdot V_1(s) + \frac{1}{K} \cdot \frac{s}{\tau s + 1} \cdot \frac{sh\alpha L}{\alpha L ch\alpha L} \cdot G_2(s) \quad (38)$$

$$G(s,x) = -m(s+2\nu) \frac{sh\alpha(L-x)}{\alpha L ch\alpha L} \cdot V_1(s) + \frac{ch\alpha x}{ch\alpha L} \cdot G_2(s) \quad (39)$$

unde prin m am notat masa garniturii omogene de prăjini: $m = AL\rho$.

Prin particularizare, pentru $x = L$ și $x = 0$, obținem:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{ch\gamma} & \frac{1}{K} \cdot \frac{s}{\tau s + 1} \cdot \frac{th\gamma}{\gamma} \\ -m(s+2\nu) \frac{th\gamma}{\gamma} & \frac{1}{ch\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Varianta III: V_2, G_1 - intrări; V_1, G_2 - ieșiri.

Se utilizează condițiile la limită (31) și (32). Se găsește:

$$V(s,x) = \frac{ch\alpha x}{ch\alpha L} \cdot V_2(s) - \frac{1}{K} \cdot \frac{s}{\tau s + 1} \cdot \frac{sh\alpha(L-x)}{\alpha L ch\alpha L} \cdot G_1(s) \quad (41)$$

$$G(s,x) = m(s+2\nu) \frac{sh\alpha x}{\alpha L ch\alpha L} \cdot V_2(s) + \frac{ch\alpha(L-x)}{ch\alpha L} \cdot G_1(s) \quad (42)$$

iar prin particularizare:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{ch\gamma} & -\frac{1}{K} \cdot \frac{s}{\tau s + 1} \cdot \frac{th\gamma}{\gamma} \\ m(s+2\nu) \frac{th\gamma}{\gamma} & \frac{1}{ch\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ G_1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Varianta IV: G_1, G_2 - intrări; V_1, V_2 - ieșiri.

Din condițiile la limită (32) și (33), obținem:

$$V(s,x) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s+2\nu} \left[-\frac{\alpha L ch\alpha(L-x)}{sh\alpha L} \cdot G_1(s) + \frac{\alpha L ch\alpha x}{sh\alpha L} \cdot G_2(s) \right] \quad (44)$$

$$G(s,x) = \frac{sh\alpha(L-x)}{sh\alpha L} \cdot G_1(s) + \frac{sh\alpha x}{sh\alpha L} \cdot G_2(s), \quad (45)$$

de unde rezultă:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s+2\nu} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{th\gamma} & \frac{\gamma}{sh\gamma} \\ -\frac{\gamma}{sh\gamma} & \frac{\gamma}{th\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Varianta V: V_1, G_1 - intrări; V_2, G_2 - ieșiri.

Din condițiile la limită (30) și (32), obținem:

$$V(s,x) = ch\alpha x \cdot V_1(s) + \frac{1}{K} \cdot \frac{s}{\tau s + 1} \cdot \frac{sh\alpha x}{\alpha L} \cdot G_1(s) \quad (47)$$

$$G(s,x) = m(s+2\nu) \frac{sh\alpha x}{\alpha L} \cdot V_1(s) + ch\alpha x \cdot G_1(s) \quad (48)$$

deci:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch\gamma & \frac{1}{K} \cdot \frac{s}{\tau s + 1} \cdot \frac{sh\gamma}{\gamma} \\ m(s+2\nu) \frac{sh\gamma}{\gamma} & ch\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ G_1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Varianta VI: V_2, G_2 - intrări; V_1, G_1 - ieșiri.

Pe baza condițiilor la limită (31) și (33), rezultă:

$$V(s,x) = ch\alpha(L-x) \cdot V_2(s) - \frac{1}{K} \cdot \frac{s}{\tau s + 1} \cdot \frac{sh\alpha(L-x)}{\alpha L} \cdot G_2(s) \quad (50)$$

$$G(s,x) = -m(s+2\nu) \frac{sh\alpha(L-x)}{\alpha L} \cdot V_2(s) + ch\alpha(L-x) \cdot G_2(s) \quad (51)$$

iar prin particularizare:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\gamma & -\frac{1}{K} \frac{s}{\tau s + 1} \frac{\operatorname{sh}\gamma}{\gamma} \\ -m(s+2\nu) \frac{\operatorname{sh}\gamma}{\gamma} & \operatorname{ch}\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Observație.

Din matricea de transfer a uneia din cele șase variante ale subsistemului GPO poate fi calculată matricea de transfer a oricăreia dintre celelalte cinci variante. Metoda de determinare independentă a matricei de transfer pentru fiecare variantă în parte permite însă, în plus, obținerea relațiilor prin care funcțiile $V(s,x)$ și $G(s,x)$ sunt exprimate în raport cu mărimile de intrare, pentru orice $x \in [0, L]$.

4. Descompunerea funcțiilor de transfer ale subsistemului GPO

Funcțiile de transfer ale subsistemului GPO, determinate mai înainte, au o formă improprie pentru evaluarea și analiza caracteristicilor dinamice ale garniturii de foraj și, cu atât mai puțin, ale sistemelor automate de avans și manevră. Din acest motiv, în cele ce urmează vom proceda la descompunerea funcțiilor de transfer ale subsistemului GPO (în cazul celor patru variante fizic realizabile) în serie de fracții simple, utilizând în acest scop metoda dezvoltării în serie Fourier. În lucrarea [6], problema calculului funcțiilor de transfer și a descompunerii acestora este abordată (numai în cazul variantei I) prin metoda separării variabilelor.

Funcția de variabilă complexă $f(s) = \frac{\gamma(s)}{\operatorname{sh}\gamma(s)}$, care intervine în expresiile funcțiilor de transfer ale variantelor I și IV, are ca puncte singulare soluțiile ecuației

$$\gamma(s) = k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (53)$$

adică

$$s_k = \begin{cases} -\alpha_k \pm i\omega_k, & 1 \leq k \leq k_1 \\ -\alpha_k \pm \beta_k, & k > k_1 \end{cases} \quad (54)$$

în care

$$k_1 = \left\lfloor \frac{L}{2\pi\beta} \left(c + \sqrt{c^2 - 4\beta\nu} \right) \right\rfloor, \quad (55)$$

$$\alpha_k = \nu + \beta\lambda_k^2 \quad (56)$$

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L} \quad (57)$$

$$\omega_k = \sqrt{c^2\lambda_k^2 - \alpha_k^2} \quad (58)$$

$$\beta_k = i\omega_k = \sqrt{\alpha_k^2 - c^2\lambda_k^2} \quad (59)$$

Prin $[x]$ am notat un număr întreg definit prin dubla inegalitate $x-1 \leq [x] < x$. În stabilirea acestor relații am ținut seama de inegalitățile $c^2 - 4\beta\nu > 0$ și $\frac{L}{2\pi\beta} \left(c - \sqrt{c^2 - 4\beta\nu} \right) < 1$, întotdeauna satisfăcute de parametrii fluidului de foraj și ai materialului tubular al garniturii.

Funcția de variabilă complexă $g(s) = \frac{1}{\operatorname{ch}\gamma(s)}$, care intervine în expresiile funcțiilor de transfer ale variantelor II și III, au ca puncte singulare soluțiile ecuației

$$\gamma(s) = \frac{2k-1}{2}\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (60)$$

adică

$$s_k = \begin{cases} -a_k \pm ib_k, & 1 \leq k \leq k_2 \\ -a_k \pm c_k, & k > k_2 \end{cases} \quad (61)$$

în care

$$k_2 = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{L}{2\pi\beta} \left(c + \sqrt{c^2 - 4\beta\nu} \right) \right\rfloor, \quad (62)$$

$$a_k = \nu + \beta\lambda_k^2 \quad (63)$$

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2L} \quad (64)$$

$$b_k = \sqrt{c^2\lambda_k^2 - a_k^2} \quad (65)$$

$$c_k = ib_k = \sqrt{a_k^2 - c^2\lambda_k^2} \quad (66)$$

Pentru descompunerea funcțiilor de transfer ale subsistemului GPO în fracții simple, se utilizează următoarele dezvoltări în serie Fourier, pe intervalul $[-L, L]$:

$$\frac{\operatorname{ch}\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha L} = \frac{1}{\alpha L} + \frac{2\alpha}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos k \frac{x}{L} \pi}{\alpha^2 + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2}, \quad (67)$$

$$\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha L} = \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \frac{\sin k \frac{x}{L} \pi}{\alpha^2 + \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2}, \quad (68)$$

$$\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{ch}\alpha L} = \frac{2\alpha}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{x}{L} \cdot \pi}{\alpha^2 + \left(\frac{2k-1}{2} \cdot \frac{\pi}{L} \right)^2} \quad (69)$$

$$\frac{\operatorname{ch}\alpha x}{\operatorname{ch}\alpha L} = 1 + \frac{4\alpha^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot \frac{\cos \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{x}{L} \pi}{\alpha^2 + \left(\frac{2k-1}{2} \cdot \frac{\pi}{L} \right)^2} \quad (70)$$

Dezvoltarea (68) poate fi obținută din (67) prin integrare (de la 0 la x), iar dezvoltările (69) și (70) rezultă din (67) și (68), pe baza relațiilor:

$$\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{ch}\alpha L} = \frac{\operatorname{ch}\alpha(L+x)}{\operatorname{sh}2\alpha L} - \frac{\operatorname{ch}\alpha(L-x)}{\operatorname{sh}2\alpha L}, \quad (71)$$

$$\frac{\operatorname{ch}\alpha x}{\operatorname{ch}\alpha L} = \frac{\operatorname{sh}\alpha(L+x)}{\operatorname{sh}2\alpha L} + \frac{\operatorname{sh}\alpha(L-x)}{\operatorname{sh}2\alpha L} \quad (72)$$

Considerînd că α este dat de relația (26), în cazul variantelor I și IV, din (56)...(59) rezultă:

$$\frac{1}{\alpha^2 + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2} = \frac{c^2(\tau s+1)}{(s+\alpha_k)^2 + \omega_k^2}, \quad (73)$$

iar în cazul variantelor II și III, din (63)...(66) rezultă:

$$\frac{1}{\alpha^2 + \left(\frac{2k-1}{2} \cdot \frac{\pi}{L}\right)^2} = \frac{c^2(\tau s+1)}{(s+a_k)^2 + b_k^2} \quad (74)$$

Cu această pregătire putem trece la dezvoltarea în serie de fracții simple a funcțiilor de transfer corespunzătoare celor patru variante fizic realizabile ale sistemului GPO.

Varianta I. Ținînd seama de (67) și (73), din (36) și (37) obținem:

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} -A(s) & B(s) \\ -B(s) & A(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (75)$$

unde

$$A(s) = \frac{\tau s+1}{s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(\tau s+1)(s+2\nu)}{(s+\alpha_k)^2 + \omega_k^2}, \quad (76)$$

$$B(s) = \frac{\tau s+1}{s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k(\tau s+1)(s+2\nu)}{(s+\alpha_k)^2 + \omega_k^2}. \quad (77)$$

Varianta II. Avînd în vedere (69), (70) și (74), din (40) rezultă:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & D(s) \\ -E(s) & C(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ G_2 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

unde:

$$C(s) = 1 + \frac{4}{\pi} s (s+2\nu) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot \frac{1}{(s+a_k)^2 + b_k^2}, \quad (79)$$

$$D(s) = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s}{(s+a_k)^2 + b_k^2}, \quad (80)$$

$$E(s) = 2K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\tau s+1)(s+2\nu)}{(s+a_k)^2 + b_k^2}. \quad (81)$$

Varianta III. Similar ca la varianta II, din (43) rezultă:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & -D(s) \\ E(s) & C(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ G_1 \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Varianta IV. Similar ca la varianta I, din (46) obținem:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} -F(s) & H(s) \\ -H(s) & F(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \quad (83)$$

unde:

$$F(s) = \frac{1}{s+2\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2s}{(s+\alpha_k)^2 + \omega_k^2}, \quad (84)$$

$$H(s) = \frac{1}{s+2\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k \cdot s}{(s+\alpha_k)^2 + \omega_k^2}. \quad (85)$$

În tabelele alăturate sînt date valorile pulsațiilor ω_k și b_k (exprimate în rad/s) și ale constantelor de atenuare α_k și β_k , respectiv a_k și c_k (exprimate în s^{-1}) pentru o garnitură omogenă cu diametrul nominal de 114,3 mm, aria secțiunii transversale $A=36,4 \text{ cm}^2$, densitatea $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, modulul de elasticitate $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, lungimea $L = 4000 \text{ m}$, $\tau = 0,04 \text{ s}$ și $\varepsilon = 10 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$.

Tabelul 1

k	α_k	ω_k
1	0,505	4,031
2	1,495	7,986
3	3,145	11,774
4	5,456	15,306
5	8,426	18,481
6	12,056	21,183
7	16,347	23,267
8	21,297	24,547
9	26,908	24,751
10	33,178	23,437
11	40,109	19,697
12	47,700	10,048

Tabelul 2

k	$\alpha_k + \beta_k$	$\alpha_k - \beta_k$
13	74,437	37,466
14	96,050	33,674
15	117,180	31,686
16	138,918	30,410
17	161,600	29,511
18	185,370	28,843
19	210,310	28,326
20	236,460	27,914

Numărul de armonici este același în ambele cazuri ($k_1 = k_2 = 12$). În plus, se poate demonstra ușor că:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k - \beta_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k - c_k) = \frac{1}{\tau} = 25 \text{ s}^{-1}$$

Tabelul 3

k	a_k	b_k
1	0,257	2,015
2	0,917	6,024
3	2,238	9,906
4	4,218	13,580
5	6,858	16,945
6	10,158	19,900
7	14,120	22,310
8	18,740	24,020
9	24,020	24,800
10	29,960	24,320
11	36,560	21,970
12	43,822	16,186

Tabelul 4

k	$a_k + c_k$	$a_k - c_k$
13	61,690	41,796
14	85,454	35,194
15	106,576	32,554
16	127,950	30,986
17	150,130	29,925
18	173,340	29,154
19	197,690	28,568
20	223,230	28,109

În funcție de precizia dorită și scopul urmărit, prin reținerea unui număr limitat de fracții simple (armonici

cu factori de atenuare minimi), modelul matematic al garniturii omogene se simplifică corespunzător.

5. Concluzii

Performanțele dinamice ale oricărui sistem adaptiv-optimal de automatizare a procesului de foraj sînt puternic influențate de comportamentul dinamic al garniturii de prăjini, care reprezintă un subsistem din componența obiectului condus, liniar, multivariabil, cu parametrii distribuiți. Prin alegerea convenabilă a mărimilor de intrare-ieșire, subsistemul GPO (garnitura de prăjini omogenă) poate fi definit în șase variante distincte, dintre care patru fizic realizabile. Modelul primar, sub forma unei ecuații diferențiale cu derivate parțiale, este transformat, pentru fiecare din cele șase variante, într-un model operațional de tip intrare-ieșire. În cazul variantelor fizic realizabile, funcțiile de transfer au fost descompuse în seria de fracții simple, care evidențiază componentele aperiodice și componentele oscilant amortizate, caracteristice dinamicii garniturii. Sub această formă, modelul poate fi interpretat și simplificat convenabil pentru a fi utilizat în analiza, proiectarea și optimizarea sistemelor automate de manevră și de avans al sapei de foraj.

Bibliografie

1. TEODORESCU, N. OLARIU, V.: Ecuațiile fizicii matematice. Editura didactică și pedagogică, București, 1975.
2. DAREING, D., LIVESAY, B.: Longitudinal and Angular Drill-string Vibrations with Damping. In: K.T.M., No. 4, 1968.
3. KERIMOV, Z., SADÎHOV, M.: Issledovanie prodol'nih kolebanij kolonnî buril'nih trub pri bureonii. Neft'i gaz, nr. 9, 1971.
4. POGARSKIJ, A., CEFRANOV, K.: Optimizatija proťessov glubokogo burenija, Izd. Nedra, Moskva, 1981.
5. CÎRTOAJE, V., BUCUR, CR., PARASCHIV, N.: Sisteme automate de avans al sapei de foraj. In: Studii și cercetări în mecanica aplicată, vol. 42, nr. 1, 1983.
6. CÎRTOAJE, V.: Modelarea matematică a garniturii de foraj. In: Studii și cercetări în mecanica aplicată, vol. 40, nr. 4, 1981.
7. TATU, GR.: Conducerea optimală a sistemului de forare a sondelor de petrol și gaze. Editura tehnică, București, 1978.