CONVERGENŢA GLOBALĂ A UNOR ALGORITMI ADAPTIVI STOCASTICI

dr. ing. Vasile Sima

Institutul de Cercetări în Informatică

Rezumat

Sînt analizaţi algoritmi multi-recursivi de aproximaţie stocastică (AS) şi de tipul celor mai mici pătrate modificate (CMMPM), atît pentru predicţia adaptivă, cît şi pentru conducerea adaptivă a sistemelor stocastice discrete cu întîrziere oarecare ($d \geq 1$). Este subliniată baza conceptuală comună a acestor algoritmi şi este furnizată o condiţie necesară şi suficientă pentru a realiza obiectivele de urmărire asimptotică. Această condiţie şi o condiţie de pasivitate sînt folosite pentru a stabili unele rezultate de convergenţă pentru două scheme multi-recursive generale, utilizînd o abordare prin teoria martingalelor, dar fără a recurge la ipoteze de stabilitate sau de stabilitate inversă a sistemului. Rezultatele obţinute sînt utilizate pentru a simplifica demonstraţiile proprietăţilor de convergenţă şi stabilitate ale unor algoritmi specifici de predicţie şi de conducere adaptivă.

Cuvinte cheie: algoritmi numerici, conducere adaptivă, conducerea proceselor, predicţie adaptivă, stabilitate, teoria sistemelor.

1. Introducere

Problema convergenţei algoritmilor adaptivi stocastici pentru predicţia, estimarea şi conducerea sistemelor adaptive discrete a fost intens studiată în ultimii ani. Au apărut multe rezultate interesante şi importante. Totuşi, aceste rezultate au fost, în general, deduse separat pentru fiecare algoritm, cum reiese, de pildă, din lucrările [5], [6], [7], [15], [16]. În consecinţă, abordările pentru problema convergenţei pot părea destul de eterogene. În plus, diferitele detalii tehnice din demonstraţiile de convergenţă pot ascunde ideile care stau la baza acestora.

Această lucrare are ca obiectiv prezentarea sintetică a unor rezultate recent obţinute în domeniul conducerii adaptive a proceselor. Este investigată în special problematica algoritmilor adaptivi, întrucît aceştia constituie suportul procedural al conducerii adaptive. Sînt trataţi algoritmi pentru sisteme liniare stocastice discrete, avînd în vedere utilizarea frecventă a microcalculatoarelor sau microprocesoarelor pentru implementarea schemei de conducere adaptivă a proceselor. Lucrarea include elemente de natură teoretică, referitoare la proprietăţile de convergenţă şi stabilitate ale algoritmilor adaptivi.

Se prezintă o tratare unitară a unei categorii largi de algoritmi de predicţie şi de conducere adaptivă pentru sisteme stocastice discrete liniare. Sînt exploatate asemănările importante (în structură, obiectivele de atins, ipotezele şi condiţiile impuse), manifestate de clase de algoritmi. În secţiunea următoare, este subliniată baza conceptuală comună a algoritmilor adaptivi stocastici. Apoi sînt considerate două scheme adaptive multi-recursive generale şi, utilizînd o abordare bazată pe teoria martingalelor, sînt demonstrate proprietăţile fundamentale de convergenţă ale acestora. Prima schemă este de tipul aproximaţiei stocastice (AS), iar a doua de tipul celor mai mici pătrate (CMMP). Sînt generalizate unele rezultate precedente [2], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [15], [16]. Noua schemă CMMP modificată (CMMPM), propusă în [14], tratează sisteme stocastice cu *întîrziere generală* ($d \geq 1$). În plus, poate fi încorporat un *factor de uitare variabil*. Abordarea prezentată în continuare este importantă şi întrucît utilizînd rezultatele obţinute se pot simplifica demonstraţiile proprietăţilor de stabilitate şi convergenţă pentru algoritmi specifici de predicţie sau de conducere adaptivă.

2. Formularea problemei şi rezultate de bază

Să considerăm un sistem liniar stocastic discret cu o intrare şi o ieşire, descris de următoarea ecuaţie, pentru $t \geq 1$,

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})w(t), \qquad (1)$$

unde $\{y(t)\}$, $\{u(t)\}$ şi $\{w(t)\}$ sînt secvenţele ieşirii, intrării (comenzii) şi, respectiv, zgomotului, $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ şi $C(\cdot)$ sînt polinoame în operatorul de întîrziere cu un tact q^{-1}, de grade n, m şi respectiv l, iar q^{-d} este o întîrziere pură. Fără a reduce generalitatea, se consideră că $A(0) = C(0) = 1$. Pentru problema de conducere adaptivă se presupune că $B(0) \neq 0$. Fie un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, unde mulţimea Ω este nevidă, $\mathcal{F}$ este σ-algebra submulţimilor din Ω, iar P este o măsură de probabilitate definită pe $\mathcal{F}$. Starea iniţială pentru (1) este vectorul $x_o = [y(0), \ldots, y(-n+1), u(-d+1), \ldots, u(-m-d+1), w(0), \ldots, w(-l+1)]^T$, generînd σ-algebra $\mathcal{F}_o \subset \mathcal{F}$. Procesul $\{w(t)\}$ este un proces stocastic real, *adaptat* şirului crescător de σ-algebre $\{\mathcal{F}_t,\ \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq 0\}$, unde $\mathcal{F}_t$ este generat de observaţiile pînă la momentul t inclusiv. Se presupune că $\{w(t)\}$ satisface aproape sigur (a.s.) următoarele condiţii standard:

$$\mathcal{E}\{w(t) \mid \mathcal{F}_{t-1}\} = 0 \ \text{ a.s.}, \quad t \geq 1, \qquad (2)$$

$$\mathcal{E}\{w(t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}\} \triangleq \sigma(t)^2 \leq \sigma^2 < \infty \ \text{ a.s.}, \qquad (3)$$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} w(t)^2 < \infty \ \text{ a.s.} \qquad (4)$$

Presupunem că $\sigma(t)$ şi coeficienţii polinoamelor A, B şi C nu sînt cunoscuţi şi că sînt disponibile doar $\{y(t)\}$ şi $\{u(t)\}$. (Vom omite argumentul q^{-1} pentru polinoame ori de cîte ori nu pot apare confuzii.)

Despre sistemul (1) se fac următoarele *ipoteze*:

1 Întîrzierea d este cunoscută.

2 Sînt cunoscute nişte margini superioare pentru n, m şi l. (În continuare, n, m şi l vor fi tocmai aceste margini.)

3 Polinomul $C(z)$ are toate rădăcinile în afara discului unitate închis din planul complex **C**.

4 (Pentru problema conducerii) Polinomul $B(z)$ are toate rădăcinile în afara discului unitate închis din **C**.

4' (Pentru problema predicţiei) $\{y(t)\}$ şi $\{u(t)\}$ au medii pătratice de selecţie mărginite, adică

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=d}^{N} y(t)^2 < \infty \quad \text{a.s.,} \tag{5}$$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=d}^{N} u(t)^2 < \infty \quad \text{a.s.} \tag{6}$$

Obiectivul problemei de conducere adaptivă este de a găsi o lege de reacţie stabilizatoare, în sensul că sînt satisfăcute (5) şi (6), şi de a asigura urmărirea cu dispersie condiţionată minimă a unei traiectorii deterministe mărginite dorite $\{y^*(t)\}$, adică,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=d}^{N} \mathcal{E}\{[y(t)-y^*(t)]^2 \mid \mathcal{F}_{t-d}\} = \bar{\mu}^2 \quad \text{a.s.,} \tag{7}$$

unde $\bar{\mu}^2$ este eroarea medie pătratică de urmărire minimă peste toate reacţiile cauzale (incluzînd cele proiectate utilizînd parametrii adevăraţi ai sistemului).

Obiectivul problemei de predicţie adaptivă este să determine predicţia peste d paşi, $\hat{y}(t+d)$, a ieşirii $y(t+d)$, utilizînd valorile intrării şi ieşirii pînă la momentul t inclusiv, astfel încît $\{\hat{y}(t)\}$ să aibă media pătratică de selecţie mărginită şi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=d}^{N} [\hat{y}(t)-\hat{y}^*(t)]^2 = 0 \quad \text{a.s.,} \tag{8}$$

unde $\hat{y}^*(t)$ este predicţia optimală (cînd sînt cunoscuţi parametrii adevăraţi ai sistemului).

2.1. Cazul neadaptiv

Studierea cazului parametrilor cunoscuţi oferă sugestii pentru rezolvarea problemelor de mai sus. În [16] se arată că $\hat{y}^*(t)$ satisface următoarele ecuaţii echivalente

$$C(q^{-1})\hat{y}^*(t+d) = \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t), \tag{9}$$

$$\hat{y}^*(t+d) = \bar{\alpha}(q^{-1})y(t) + \bar{\beta}(q^{-1})u(t) + \bar{G}(q^{-1})\hat{y}^*(t); \tag{10}$$

în (9), $\beta = FB$, iar polinoamele F şi α, cu grade $\mathrm{gr}(F) = d-1$ şi $\mathrm{gr}(\alpha) = n-1$, sînt obţinute din identitatea $C = FA + q^{-d}\alpha$; în (10), $\bar{\alpha} = \alpha\bar{F}$, $\bar{\beta} = \beta\bar{F}$, iar $\bar{F}$ şi $\bar{G}$, cu grade $\mathrm{gr}(\bar{F}) = d-1$, $\mathrm{gr}(\bar{G}) = l-1$, sînt calculabile din identitatea $1 = \bar{F}C + q^{-d}\bar{G}$. Evident, $F(0) = \bar{F}(0) = 1$, $\mathrm{gr}(\beta) = m+d-1$, $n_1 \triangleq \mathrm{gr}(\bar{\alpha}) = n+d-2$, $n_2 \triangleq \mathrm{gr}(\bar{\beta}) = m+2d-2$, $n_3 \triangleq \mathrm{gr}(\bar{G}) = l-1$. Din (10) observăm că $\hat{y}^*(t)$ este $\mathcal{F}_{t-d}$-măsurabilă, adică $\mathcal{E}\{\hat{y}^*(t) \mid \mathcal{F}_{t-d}\} = \hat{y}^*(t)$, şi scriem $\hat{y}^*(t) \in \mathcal{F}_{t-d}$.

Demonstraţia lui (9) arată, de asemenea, că *eroarea de predicţie optimală*, $v(t)$, satisface

$$v(t) \triangleq y(t) - \hat{y}^*(t) = \sum_{i=0}^{d-1} f_i w(t-i), \tag{11}$$

unde $F(q^{-1}) = f_o + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{d-1}q^{-d+1}$ $(f_o = 1)$. Utilizînd (2) - (4), obţinem următoarele proprietăţi utile ale lui $v(t)$:

$$\mathcal{E}\{v(t) \mid \mathcal{F}_{t-d}\} = 0 \quad \text{a.s.,} \tag{12}$$

$$\mu(t)^2 \triangleq \mathcal{E}\{v(t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-d}\} \le \sigma^2 \sum_{i=0}^{d-1} f_i^2 \triangleq \mu^2 \quad \text{a.s.,} \tag{13}$$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=d}^{N} v(t)^2 < \infty \quad \text{a.s.} \tag{14}$$

Observaţia 2.1 Polinoamele $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ şi $\bar{G}$ sînt calculabile în funcţie de coeficienţii din (1). Deci, cînd parametrii adevăraţi ai sistemului sînt cunoscuţi, $\hat{y}^*(t)$, $t \ge d$, este disponibil din relaţia (10), iniţializată corespunzător. Atunci, pentru problema predicţiei, putem utiliza $\hat{y}(t) = \hat{y}^*(t)$ pentru orice $t \ge d$, iar obiectivul (8) va fi atins. Similar, pentru problema conducerii, din (10) este evident că $u(t)$ poate fi ales astfel încît $\hat{y}^*(t+d)$ să ia orice valoare fixată. După cum se va arăta mai tîrziu, alegînd $u(t)$ astfel încît $\hat{y}^*(t+d) = y^*(t+d)$, obiectivul (7) poate fi atins. □

2.2. Cazul adaptiv

În cazul în care parametrii sistemului sînt necunoscuţi, în locul predicţiei optimale nedisponibile $\hat{y}^*(t+d)$, se utilizează o predicţie $\hat{y}(t+d)$, furnizată de un algoritm adaptiv. Pentru problema conducerii, $u(t)$ este ales astfel încît $\hat{y}(t+d) = y^*(t+d)$, $t \ge 0$.

Definim *abaterea* de la predicţia optimală: pentru problema predicţiei,

$$z(t-d) = \hat{y}^*(t) - \hat{y}(t), \tag{15}$$

şi pentru problema conducerii,

$$z(t-d) = \hat{y}^*(t) - y^*(t). \tag{16}$$

În ambele situaţii, $z(t-d) \in \mathcal{F}_{t-d}$, ceea ce justifică notaţia utilizată. Să observăm, de asemenea, că definiţiile (15) şi (16) coincid cînd $\hat{y}(t) \equiv y^*(t)$.

Demonstrăm acum un *rezultat de bază* [12].

Lema 2.1 *O condiţie necesară şi suficientă pentru a atinge obiectivul (7) sau obiectivul (8) este ca*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=d}^{N} z(t-d)^2 = 0 \quad a.s. \tag{17}$$

Demonstraţie. (i) Relaţia (17) este echivalentă cu (8), din definiţia (15).

(ii) Din (11) şi (16),

$$y(t) - y^*(t) = z(t-d) + v(t). \tag{18}$$

Atunci, din (13) şi (12), utilizînd o proprietate de integrabilitate [3, p. 300], obţinem

$$\mathcal{E}\{[y(t)-y^*(t)]^2 \,|\, \mathcal{F}_{t-d}\} = z(t-d)^2 + \mu(t)^2 \quad \text{a.s.} \tag{19}$$

Dacă are loc (17), atunci are loc, de asemenea, şi (7), cu

$$\bar{\mu}^2 \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=d}^{N} \mu(t)^2 \le \mu^2, \tag{20}$$

unde am utilizat (13). Reciproc, (7), (19) şi (20) implică (17). △

Observaţia 2.2 În cazul parametrilor cunoscuţi, (17) are loc, deoarece este posibil să se asigure $z(t) = 0$, pentru orice $t \ge d$ (vezi Observaţia 2.1). □

Să definim *eroarea de predicţie* şi *eroarea de urmărire*,

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t), \tag{21}$$

$$e(t) = y(t) - y^*(t), \tag{22}$$

ale căror valori coincid dacă $\hat{y}(t) \equiv y^*(t)$. Utilizînd (21) sau (22), relaţiile (15) şi (16) sînt echivalente cu

$$z(t-d) = e(t) - v(t). \tag{23}$$

Din (9), (23) şi (11), obţinem

$$\begin{aligned} Cz(t) &= \alpha y(t) + \beta u(t) - C\check{y}(t+d) \\ &\triangleq \varphi(t)^T\theta - \check{y}(t+d), \end{aligned} \tag{24}$$

unde $\check{y}(t+d)$ denotă $\hat{y}(t+d)$ sau $y^*(t+d)$, $\varphi(t)$ este *vectorul regresorilor*,

$$\begin{aligned} \varphi(t)^T = [&y(t), \ldots, y(t-n+1), u(t), \ldots, u(t-m \\ &-d+1), -\check{y}(t+d-1), \ldots, -\check{y}(t+d-l)], \end{aligned} \tag{25}$$

iar θ denotă vectorul coeficienţilor polinoamelor α, β şi $C-1$. Se poate obţine o expresie similară utilizînd (10).

3. Proprietăţi generale de convergenţă

Să considerăm următoarele scheme adaptive multirecursive generale, pentru $t \ge d$:

Schema aproximaţiei stocastice (AS)

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-d) + \bar{a}\varphi(t-d)e(t)/r(t-d), \quad \bar{a} > 0, \tag{26}$$

$$r(t-d) = r(t-d-1) + \varphi(t-d)^T\varphi(t-d), \tag{27}$$

unde $r(-1) = 1$;

Schema celor mai mici pătrate modificată (CMMPM)

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-d) + \frac{a(t)P(t-2d)\varphi(t-d)e(t)}{\lambda(t) + a(t)p(t-d)}, \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \lambda(t)P'(t-d) &= P(t-2d) \\ &- \tfrac{a(t)P(t-2d)\varphi(t-d)\varphi(t-d)^T P(t-2d)}{\lambda(t)+a(t)p(t-d)}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$p(t-d) \triangleq \varphi(t-d)^T P(t-2d)\varphi(t-d), \tag{30.a}$$

$$P(t-d) = c(t-d)P'(t-d), \tag{30.b}$$

$$c(t-d) = K/\max\{K, \bar{r}(t-d)\bar{\lambda}[P'(t-d)]\}, \tag{31}$$

$$\bar{r}(t-d) = \bar{r}(t-2d)[1 + \bar{a}(t)p(t-d)], \tag{32.a}$$

$$\bar{a}(t) \triangleq a(t)/\lambda(t), \quad \bar{r}(-d) = \cdots = \bar{r}(-1) = 1; \tag{32.b}$$

unde $0 < K < \infty$, iar $\varphi(t-d) \in \mathcal{F}_{t-d}$ este un vector al regresorilor disponibili. Ambele scheme reprezintă d recurenţe întreţesute, iniţializate cu vectorii arbitrari $\hat{\theta}(0), \ldots, \hat{\theta}(d-1)$. Recurenţele pentru $P(t-d)$ sînt iniţializate cu $P(-d) = \cdots = P(-1) = \varepsilon^{-1}I$, unde ε este un număr pozitiv mic. Numărul $\bar{\lambda}[P]$ este cea mai mare valoare proprie a matricii P, iar $a(t)$ şi $\lambda(t)$ sînt scalari $\mathcal{F}_{t-d}$-măsurabili satisfăcînd $0 < a(t) \le a_2 < \infty$, $0 < \lambda_1 \le \lambda(t) \le 1$.

Pentru a demonstra proprietăţile de convergenţă de bază, vom presupune că

$$\text{pentru AS:} \quad C(q^{-1})z(t-d) = b(t-d), \tag{33}$$

$$\text{pentru CMMPM:} \quad \bar{C}(q^{-1})\bar{z}(t) = \bar{b}(t), \tag{34}$$

unde $\bar{C}(q^{-1}) \triangleq 1 - q^{-d}\bar{G}(q^{-1})$ şi,

$$b(t) = -\varphi(t)^T\tilde{\theta}(t), \quad \tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta, \quad (35)$$

$$\bar{b}(t) = -\varphi(t-d)^T\tilde{\theta}(t), \quad \bar{z}(t) = \gamma(t) - v(t), \quad (36)$$

$$\gamma(t) = y(t) - \bar{y}(t), \quad \bar{y}(t) = \varphi(t-d)^T\hat{\theta}(t). \quad (37)$$

În secţiunea următoare vom arăta că (33) sau (34) sînt satisfăcute pentru definiţii naturale ale lui $\varphi(t)$.

Pentru CMMPM este necesară următoarea definiţie [9], care seamănă cu cea a unui sistem SPR_d [1], iar pentru $d = 1$ se reduce la definiţia unui sistem strict pasiv intrare-ieşire (SPIE) [15].

Definiţia 3.1 Un sistem cu intrarea $\{b(t)\}$ şi ieşirea $\{g(t)\}$ este *d-strict pasiv intrare-ieşire (dSPIE)* dacă există un număr nenegativ fixat L, depinzînd doar de condiţiile iniţiale, şi nişte constante pozitive σ_1 şi σ_2 astfel încît pentru orice $i \in I \triangleq \{d, d+1, \ldots, 2d-1\}$ şi orice $k \in \mathbf{N}$,

$$2\sum_{j\in J_i^k} g(j)b(j) + L \geq \sum_{j\in J_i^k} [\sigma_1 g(j)^2 + \sigma_2 b(j)^2],$$

unde $J_i^k \triangleq \{i, i+d, \ldots, i+kd\}$. □

Observaţia 3.1 Un sistem dSPIE este SPIE. □

Observaţia 3.2 Se poate arăta că, dacă sistemul din definiţia 3.1 este dSPIE cu constantele σ_1, σ_2 şi L, atunci sistemul cu intrarea $\{a(t)^{1/2}b(t)\}$ şi ieşirea $\{a(t)^{1/2}g(t)\}$, unde $a(t) \in (0, a_2]$, este de asemenea dSPIE cu constantele σ_1, σ_2 şi $\bar{L} \triangleq a_2 L$. □

3.1. Rezultate preliminare pentru schema CMMPM

Lema 3.1

(i) $$\bar{r}(t-d)\bar{\lambda}[P(t-d)] \leq K. \quad (38)$$

(ii) $$c(t-d) = \alpha(t-d) + \frac{\lambda(t)}{1+\bar{a}(t)p(t-d)}, \quad (39)$$

$$0 \leq \alpha(t-d) \leq \bar{\alpha} \triangleq 1 - \frac{\lambda(t)}{1+\bar{a}(t)p(t-d)}.$$

(iii) $$\bar{r}(t-d) \leq Kr(t-d), \quad (40)$$

$$r(t-d) = r(t-2d) + \bar{a}(t)\varphi(t-d)^T\varphi(t-d), \quad (41)$$

$$r(-d) = \cdots = r(-1) = 1/K. \quad (42)$$

Demonstraţie. (i) şi (ii) Dacă $\bar{r}(t-d)\bar{\lambda}[P'(t-d)] \leq K$, atunci din (31) şi (30.b), rezultă $c(t-d) = 1$ şi $P(t-d) = P'(t-d)$ şi astfel (38) şi (39) au loc cu $\alpha(t-d) = \bar{\alpha}$. În caz contrar, $\bar{r}(t-d)\bar{\lambda}[P'(t-d)] > K$, astfel încît din (31) şi (30.b), (38) are loc cu egalitate. Utilizînd (38) şi (39),

$$\begin{aligned}\bar{r}(t-d)\bar{\lambda}[P'(t-d)] &> K \geq \bar{r}(t-2d)\bar{\lambda}[P(t-2d)]\\ &\geq \bar{r}(t-2d)\lambda(t)\bar{\lambda}[P'(t-d)].\end{aligned}$$

Deci, din (31) şi (32.a), rezultă că $1 > c(t-d) \geq \lambda(t)/[1+\bar{a}(t)p(t-d)]$, astfel încît (39) are loc pentru $0 \leq \alpha(t-d) < \bar{\alpha}$.

(iii) Din (42) şi (32.b), rezultă că (40) are loc pentru $t \in \{0, \ldots, d-1\}$. Să presupunem că (40) este adevărată pentru $t - 2d$. Atunci, din (32.a), (30.a), (38) şi (41),

$$\begin{aligned}\bar{r}(t-d) &\leq K[r(t-2d) + \bar{a}(t)\varphi(t-d)^T\varphi(t-d)]\\ &= Kr(t-d),\end{aligned}$$

deci lema este demonstrată. △

Lema 3.2

(i) *Pentru* $\hat{y}(t) = \varphi(t-d)^T\hat{\theta}(t-d)$, (43)

$$e(t) = [1+\bar{a}(t)p(t-d)]\gamma(t). \quad (44)$$

(ii) $$\mathcal{E}\{-\bar{b}(t)v(t) \mid \mathcal{F}_{t-d}\} = \frac{\bar{a}(t)p(t-d)\mu(t)^2}{1+\bar{a}(t)p(t-d)} \quad a.s. \quad (45)$$

Demonstraţie. (i) Relaţia (44) rezultă înmulţind la stînga (28) cu $\varphi(t-d)^T$, scăzînd ambii membri din $y(t)$ şi utilizînd (37), (43), (21) şi (32.b).

(ii) Scăzînd θ din ambii membri din (28), înmulţind la stînga cu $v(t)\varphi(t-d)^T$ şi utilizînd (35), (36) şi (23), obţinem

$$\begin{aligned}-\bar{b}(t)v(t) &= -b(t-d)v(t)\\ &+ \frac{\bar{a}(t)p(t-d)[z(t-d)+v(t)]v(t)}{1+\bar{a}(t)p(t-d)}.\end{aligned}$$

Relaţia (45) rezultă atunci din (12) şi (13). △

3.2. Rezultatul principal

Lema 3.3 *Fie sistemul (1) satisfăcînd ipotezele 1 - 3. Se presupune, de asemenea, că:*

5 *Pentru AS are loc (33) şi funcţia de transfer* $[C(z) - \frac{1}{2}\bar{a}]$ *este SPR (reală strict pozitivă);*

5' *Pentru CMMPM are loc (34) şi funcţia de transfer* $[1/\bar{C}(z) - \frac{1}{2}]$ *este dSPIE.*
În plus, $\lambda(t) \leq \lambda(t-d)$, *pentru orice* $t \geq d$.

Atunci, pentru ambele scheme,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{t=0}^{N} z(t)^2/r(t) < \infty \quad a.s. \quad (46)$$

Mai mult, dacă $\{r(t)\}$ *este mărginit, sau dacă* $\delta(N) \triangleq \max\{r(j), j = 0, \ldots, N\}$ *satisface*

$$\frac{\delta(N)}{N} \leq \frac{C_1}{N}\sum_{t=0}^{N} z(t)^2 + C_2, \quad \textit{pentru orice } N, \quad (47)$$

pentru nişte constante C_1, C_2, $0 < C_1, C_2 < \infty$, atunci

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N} z(t)^2 = 0 \quad a.s. \tag{48}$$

Demonstraţie. Demonstraţia se găseşte în lucrarea [14]. △

Observaţia 3.3 Demonstraţia relaţiei (46) pentru schema AS urmăreşte îndeaproape deducţia din [7] pentru un algoritm de predicţie adaptivă, dar aici nu există nici o ipoteză explicită despre structura predictorului. Pentru schema CMMPM, aici s-au generalizat, pentru $d > 1$ şi pentru $\lambda(t)$ şi $a(t)$ neidentic egale cu 1, rezultatele lui [15] pentru conducere adaptivă. Cazul $d > 1$, $\lambda(t) \equiv a(t) \equiv 1$, a fost tratat în [12]. Lema 3.3 este astfel destul de generală şi relevă baza conceptuală comună pentru clase de algoritmi adaptivi. Ea furnizează o condiţie suficientă pentru obţinerea obiectivelor principale (7) şi (8). □

4. Proprietăţi de stabilitate şi convergenţă

Pornind de la schemele generale AS şi CMMPM, se pot obţine algoritmi specifici de predicţie şi de conducere adaptivă, definind vectorul $\varphi(t)$ şi indicînd modul cum trebuie calculat $\hat{y}(t+d)$ sau, respectiv, $u(t)$. Pentru schema AS, o alegere corespunzătoare pentru $\varphi(t)$ este (25), iar pentru schema CMMPM, se poate defini

$$\begin{aligned}\varphi(t)^T &= [y(t), \ldots, y(t-n_1), u(t), \ldots,\\ &\quad u(t-n_2), \bar{y}(t), \ldots, \bar{y}(t-n_3)],\end{aligned} \tag{49}$$

cu $\bar{y}(t)$ din (37). Pentru ambele scheme, $\hat{y}(t)$ este definit de (43). Pentru conducere adaptivă, $u(t)$ este ales astfel încît

$$\varphi(t)^T\hat{\theta}(t) = y^*(t+d). \tag{50}$$

Să observăm că aceasta asigură $y^*(t+d) \equiv \hat{y}(t+d)$.

Putem acum să demonstrăm principalele proprietăţi de stabilitate şi convergenţă pentru algoritmii de predicţie şi de conducere adaptivă.

Teorema 4.1 (Predicţie adaptivă) *Fie sistemul (1) satisfăcînd ipotezele 1 - 3 şi 4'. Presupunem de asemenea că*

6 *Pentru schema AS, $[C(z) - \frac{1}{2}\bar{a}]$ este SPR;*

6' *Pentru schema CMMPM, $[1/\bar{C}(z) - \frac{1}{2}]$ este dSPIE şi $\lambda(t) \le \lambda(t-d)$, $t \ge d$.*

Atunci, algoritmii de predicţie adaptivă, definiţi de schemele AS sau CMMPM şi (43) asigură satisfacerea obiectivului (8) cu un şir $\{\hat{y}(t)\}$ avînd media pătratică de selecţie mărginită a.s.

Demonstraţie. Arătăm întîi că relaţiile (33) sau (34) sînt satisfăcute cînd $\varphi(t)$ este definit de (25) sau, respectiv, (49). Pentru schema AS, (33) decurge din (24), (43) şi (35). Pentru schema CMMPM, (34) decurge din (36), (37), (11), (10), (35) şi (49), θ fiind definit de coeficienţii polinoamelor $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ şi $\bar{G}$. Arătăm acum că are loc (47). Din (21) şi (23), rezultă că $\hat{y}(t) = y(t) - z(t-d) - v(t)$, astfel că utilizînd inegalitatea Schwarz, ipoteza 4' şi (14), pentru un N suficient de mare şi o constantă pozitivă M avem,

$$\frac{1}{N}\sum_{t=d}^{N}\hat{y}(t)^2 \le \frac{3}{N}\sum_{t=d}^{N} z(t-d)^2 + M \quad \text{a.s.} \tag{51}$$

Pentru schema CMMPM, din (37), (21), (44) şi (23),

$$\bar{y}(t) = \frac{\bar{a}(t)p(t-d)[z(t-d)+v(t)]}{1+\bar{a}(t)p(t-d)} + y(t). \tag{52}$$

Acum, din definiţiile lui $r(N)$ (vezi (27) sau (41)) şi $\varphi(t)$ (vezi (25) sau (49)), utilizînd ipoteza 4' şi (51) sau (52), se deduce uşor că

$$\begin{aligned}\frac{\delta(N)}{N} &\le \frac{K_1}{N}\sum_{t=d}^{N}\hat{y}(t)^2 + K_2 \quad \text{a.s.}\\ &\le \frac{C_1}{N}\sum_{t=d}^{N} z(t-d)^2 + C_2 \quad \text{a.s.},\end{aligned}$$

unde C_i, K_i, $i = 1, 2$, sînt nişte constante finite. Din Lema 3.3 rezultă (48), iar din Lema 2.1, are loc (8). Din (51) şi (48), şirul $\{\hat{y}(t)\}$ are media pătratică de selecţie mărginită. △

Teorema 4.2 (Conducere adaptivă) *Fie sistemul (1) satisfăcînd ipotezele 1 - 4. Presupunem de asemenea că are loc ipoteza 6 pentru schema AS, respectiv 6', pentru schema CMMPM. Atunci, algoritmii de conducere adaptivă, definiţi de schemele AS sau CMMPM şi (50), asigură satisfacerea obiectivului (7), iar şirurile $\{y(t)\}$ şi $\{u(t)\}$ au medii pătratice de selecţie mărginite a.s.*

Demonstraţie. Ca şi în Teorema 4.1, relaţiile (33) sau (34) sînt satisfăcute cînd $\varphi(t)$ este definit de (25) sau, respectiv, (49). Aplicînd inegalitatea Schwarz lui $y(t)$ din (18) şi utilizînd (14), pentru un număr N suficient de mare şi o constantă pozitivă M avem,

$$\frac{1}{N}\sum_{t=d}^{N} y(t)^2 \le \frac{3}{N}\sum_{t=d}^{N} z(t-d)^2 + M \quad \text{a.s.} \tag{53}$$

Ipotezele 3 şi 4, împreună cu relaţia (4), implică faptul că pentru N suficient de mare şi nişte constante pozitive K_3 şi K_4,

$$\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N} u(t)^2 \le \frac{K_3}{N}\sum_{t=0}^{N} y(t+d)^2 + K_4 \quad \text{a.s.} \tag{54}$$

Pentru schema CMMPM avem, de asemenea, o relaţie similară lui (52), dar cu $y^*(t)$ în locul lui $y(t)$. Din definiţiile lui $r(N)$ şi $\varphi(t)$, cu (53) şi (54), găsim

$$\begin{aligned}\frac{\delta(N)}{N} &\le \frac{K_1}{N}\sum_{t=d}^{N} y(t)^2 + K_2 \text{ a.s.}\\ &\le \frac{C_1}{N}\sum_{t=d}^{N} z(t-d)^2 + C_2 \text{ a.s.}\end{aligned}$$

Conform lemelor 3.3 şi 2.1 are loc (7), iar din (48), (53) şi (54) obţinem (5) şi (6). $\triangle$

5. Concluzii

În lucrare sînt prezentate unele rezultate recente în domeniul predicţiei şi conducerii adaptive a sistemelor discrete liniare. Sînt stabilite proprietăţi de convergenţă globală a unor algoritmi de predicţie şi de conducere adaptivă utilizînd aproximaţie stocastică şi cele mai mici pătrate modificate, pe baza unei abordări unificatoare dedusă din teoria martingalelor. Analiza a două scheme multirecursive generale furnizează rezultate permiţînd simplificarea demonstraţiilor de convergenţă şi stabilitate pentru algoritmi specifici de predicţie şi conducere adaptivă. Unele rezultate cunoscute sînt extinse la sisteme cu întîrziere generală, iar în schema CMMPM este încorporat un factor de uitare variabil necrescător.

BIBLIOGRAFIE

1. **CAINES, P.E., LAFORTUNE, S.:** *Adaptive control with recursive identification for stochastic linear systems.* In: IEEE Trans. Automat. Control, vol.AC–29, 1984, pp.312–321.
2. **CĂLIN, S., POPESCU, TH., JORA, B., SIMA, V.:** *Conducerea adaptivă şi flexibilă a proceselor industriale.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1988.
3. **CHUNG, K.L.:** *A Course in Probability Theory.* Second Edition, Academic Press, New York, 1974.
4. **GOODWIN, G.C., HILL, D.J., PALANISWAMI, M.:** *A perspective on convergence of adaptive control algorithms.* In: Automatica, vol.20, 1984, pp.519–531.
5. **GOODWIN, G.C., RAMADGE, P.J., CAINES, P.E.:** *A globally convergent adaptive predictor.* In: Automatica, vol.17, 1981, pp.135–140.
6. **GOODWIN, G.C., RAMADGE, P.J., CAINES, P.E.:** *Discrete time stochastic adaptive control.* In: SIAM J. Control & Optimiz., vol.19, 1981, pp.829–853.
7. **GOODWIN, G.C., SIN, K.S., SALUJA, K.K.:** *Stochastic adaptive control and prediction — The general delay-coloured noise case.* In: IEEE Trans. Automat. Control, vol.AC–25, 1980, pp.946–950.
8. **LANDAU, I.D.:** *Near supermartingale for convergence analysis of recursive identification and adaptive control schemes.* In: Int. J. Control, vol.35, 1982, pp.197–226.
9. **SIMA, V.:** *On recursive least squares adaptive control algorithms.* In: Proc. of the First International Symposion and Course on Measurement and Control, Tunis, vol.1, Sept. 1–3 1982, pp.48-1 - 48-4.
10. **SIMA, V.:** *Convergence of adaptive prediction and control algorithms.* In: Advances in Modelling and Simulation, AMSE Press, vol.4, 1985, pp.29–40.
11. **SIMA, V.:** *Convergence of multirecursive least squares adaptive algorithms.* In: A. Sydow, M. Thoma, R. Vichnevetsky (Eds.), *Systems Analysis and Simulation*, Akademie-Verlag, Berlin, vol.1, 1985, pp.414–417.
12. **SIMA, V.:** *On convergence of stochastic adaptive algorithms.* In: Preprints of Second IFAC Symposion on Stochastic Control, Vilnius, USSR, May 19–23, 1986.
13. **SIMA, V.:** *On convergence of weighted least squares algorithms.* In: Studies and Researches in Computers and Informatics, ITCI, nr.2, 1989, pp.103–113.
14. **SIMA, V.:** *On global convergence of stochastic adaptive prediction and control algorithms.* In: Preprints of the 9-th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Budapest, July 8–12, 1991.
15. **SIN, K.S., GOODWIN, G.C.:** *Stochastic adaptive control using a modified least squares algorithm.* Dep. Electrical Engineering, University of Newcastle, N.S.W., Australia, Techn. Report EE7909, Second Revision, 1981.
16. **SIN, K.S., GOODWIN, G.C., BITMEAD, R.R.:** *An adaptive d-step ahead predictor based on least squares.* In: IEEE Trans. Automat. Control, vol.AC–25, 1980, pp.1161–1165.