CONTINUITATEA GEOMETRICĂ A CURBELOR SPLINE PARAMETRIZATE:CONSTRUCȚIA CURBELOR SPLINE GEOMETRIC CONTINUI

Brian A. Barsky
Tony D. DeRose

In: IEEE Computer Graphics & Applications, June 1991

1. Continuitatea geometrică pentru curbe Bezier compuse.

Ca o aplicație a continuității geometrice, vom considera problema joncțiunii curbelor Bezier cu continuitate G^1 și G^2. Mai întii, vom recapitula cîteva lucruri importante legate de curbele Bezier. O curbă Bezier utilizează o formulare simplă și eficientă în care curba este definită numai în termenii unei mulțimi de vîrfuri de control, conectate într-o secvență pentru a forma un poligon de control (figura 1).

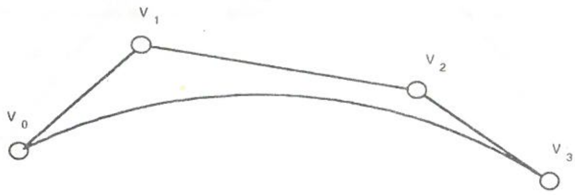

Figura 1

Curba imită forma cuprinzătoare a poligonului de control, dar interpolează numai primul și ultimul vîrf. Curba este definită de o polinomială al cărei grad este egal cu numărul de muchii din poligonul de control (adică, numărul de vîrfuri -1). Rezultă imediat din această definiție că, formularea are control global, și nu, local; adică, deplasarea unuia din vîrfurile de control afectează forma întregii curbe. În plus, curba este infinit diferențiabilă, fiind o polinomială.

O curbă Bezier $q(u)$, $u \in [0,1]$, de gradul d definită de un poligon de control $<V_0,...,V_i,...,V_d>$ ia forma:

$$q(u) = \sum_{i=0}^{d} V_i B_i^d(u), u \in [0,1]$$

unde $B_i^d(u)$ este polinomială a i–a Bernstein de gradul d:

$$B_i^d(u) = {}^d_i u^i (1-u)^{d-i}, i = 0,..,d$$

Descrierea curbei $q(u)$ în forma Bezier are multe avantaje: forma este intuitiv legată de vîrfurile de control. Există o construcție geometrică simplă pentru curbă, și divizarea curbei în două segmente este simplă d.p.v. geometric. De asemenea, este ușor să se ridice gradul curbei, iar relația dintre derivatele parametrice la începutul și la sfîrșitul curbei și vîrfurile de control este ușor de exprimat. În mod tipic, vom folosi următoarele proprietăți:

Poziția: începutul și sfîrșitul curbei interpolează V_0 și V_d:

$$q(0)=V_0 \tag{1a}$$
$$q(1)=V_d \tag{1b}$$

Prima derivată: derivata vectorului la începutul curbei este în direcția vectorului din V_0 la V_1, iar derivata vectorului la sfîrșitul curbei este în direcția vectorului din V_{d-1} la V_d. Mai precis, derivatele vectorilor inițiali și finali sînt:

$$q^{(1)}(0)=d(V_1-V_0) \tag{2a}$$
$$q^{(1)}(1)=d(V_d-V_{d-1}) \tag{2b}$$

A doua derivată: derivata de ordinul doi la începutul curbei depinde doar de V_0, V_1 și V_2, iar la sfîrșitul curbei de V_{d-2},
V_{d-1} si V_d:

$$q^{(2)}(0)=d(d-1)(V_0-2V_1+V_2) \tag{3a}$$
$$q^{(2)}(1)=d(d-1)(V_{d-2}-2V_{d-1}+V_d) \tag{3b}$$

Pentru a obține controlul local, utilizăm o reprezentare din bucăți a curbei. Întreaga curbă este compusă din segmente curbe, fiecare din acestea fiind o polinomială Bezier. Problema care apare este cum să menținem un anumit nivel de continuitate la capete; adică:

dîndu–se parametrii de forma β_1 și β_2 poligonul de control $<V_0,...,V_i,...,V_d>$ definind parametrizarea:

$$q(u) = \sum_{i=0}^{d} V_i B_i^d(u), u \in [0,1]$$

să găsim constrîngeri pe poligonul de control Bezier $<W_0,...,W_j,...W_d>$ definind parametrizarea:

$$r(t) = \sum_{j=0}^{d} W_j B_j^d(t), t \in [0,1]$$

astfel încît r și q să se unească cu continuitate G^1 (sau G^2) în q(1) în raport cu β_1 (și β_2) (conform figura 2):

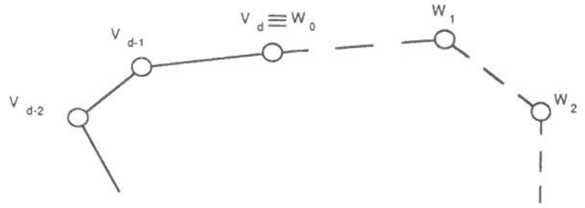

Figura 2

Deoarece o curba Bezier interpolează primul și ultimul dintre vîrfurile de control, putem garanta continuitate C^0 (și deci G^0) făcînd $W_0=V_d$ ca în figura 2.

Să trecem la continuitatea G^1. Să amintim beta-constrîngerea pentru continuitatea G^1:

$$r^{(1)}(0) = \beta_1 q^{(1)}(1) \tag{4}$$

Pentru a obține continuitate G^1 pentru un $\beta_1>0$ dat, putem găsi W_1 utilizînd ecuațiile 2a,2b și 4:

$$d(W_1 - W_0) = d\beta_1 (V_d - V_{d-1}), \beta_1 > 0$$

Simplificînd și rearanjînd rezultă:

$$W_1 = W_0 + \beta_1 (V_d - V_{d-1}), \beta_1 > 0$$

și deoarece $W_0=V_d$,

$$W_1 = V_d + \beta_1 (V_d - V_{d-1}), \beta_1 > 0 \qquad (5)$$

Geometric, ecuația (5) statuteazā că W_1 trebuie să se găsească pe raza ce pleacă din $V_d(=W_0)$ extinzîndu-se în direcția vectorului din V_{d-1} către V_d. Lungimea segmentului W_0W_1 relativ la lungimea segmentului $V_{d-1}V_d$ este dată de parametrul β_1. De aceea, dîndu-se $V_{d-1}V_d$ și $\beta_1>0$, vîrfurile de control W_0 și W_1 pot fi determinate geometric așa cum se vede în figura 3 sau algoritmic utilizînd următoarea construcție:

$$(1) W_0 \Leftarrow V_d \qquad (6a)$$

$$(2) W_1 \Leftarrow W_0 + \beta_1 (V_d - V_{d-1}) \qquad (6b)$$

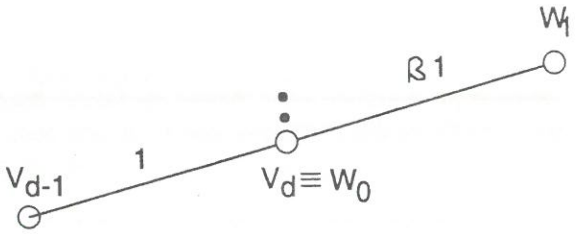

Figura 3

Odată constrînse vîrfurile W_0 și W_1 în concordanță cu continuitatea G^1, vîrful de control W_2 poate fi constrîns să garanteze continuitate G^2 pentru un β_2 dat. Să amintim beta-constrîngerea de continuitate G^2:

$$r^{(2)} 0 = \beta_1 q^{(2)} (1) + \beta_2 q^{(1)} (1)$$

Pentru a obține continuitate G^2 pentru un β_2 dat, utilizăm ecuațiile 3a, 3b și 5 pentru a obține:

$$d(d-1)(W_0 - 2W_1 + W_2) = \beta_1^2 d(d-1)(V_{d-2} - 2V_{d-1} + V_d) + \beta_2 d(V_d - V_{d-1})$$

Rezolvînd pentru W_2 rezultă (8a):

$$W_2 = 2W_1 - W_0 + \beta 1^2 (V_{d-2} - 2V_{d-1} + V_d) + \frac{\beta 2 (V_d - V_{d-1})}{d-1}$$

Substituind V_d cu W_0 și ecuația (5) pentru W_1 și rearanjînd rezultă (8b):

$$W_2 = \beta 1^2 V_{d-2} - (2\beta 1^2 + 2\beta 1 + \frac{\beta 2}{d-1}) V_{d-1} + (\beta 1^2 + 2\beta 1 + \frac{\beta 2}{d-1} + 1) V_d$$

Față de abordarea algebrică dată mai sus, pentru determinarea lui W_2, a fost dezvoltată o abordare geometrică de către Farin și îmbunătățită ulterior de Boehm.

Construcția Farin-Boehm ia ca date de intrare poligonul de control $<V_{d-2}, V_{d-1}, V_d>$ și parametrii de forma $\beta 1 > 0 și \beta 2$. Ea produce ca ieșire poligonul de control $<W_0, W_1, W_2>$, astfel încît curbele să se întîlnească cu continuitate geometrică G^2 în raport cu $\beta 1 și \beta 2$. Construcția poate fi statutată astfel:

$$(1) \gamma \Leftarrow \frac{(d-1)(1+\beta 1)}{\beta 2 + \beta 1 (d-1)(1+\beta 1)} \qquad (9a)$$

$$W_0 \Leftarrow V_d \qquad (9b)$$

$$W_1 \Leftarrow W_0 + \beta 1 (V_d - V_{d-1}) \qquad (9c)$$

$$T \Leftarrow V_{d-1} + \beta 1^2 \gamma (V_{d-1} - V_{d-2}) \qquad (9d)$$

$$W_2 \Leftarrow W_1 + \frac{1}{\gamma}(W_1 - T) \qquad (9e)$$

Interpretarea geometrică a acestei construcții este dată în figura 4.

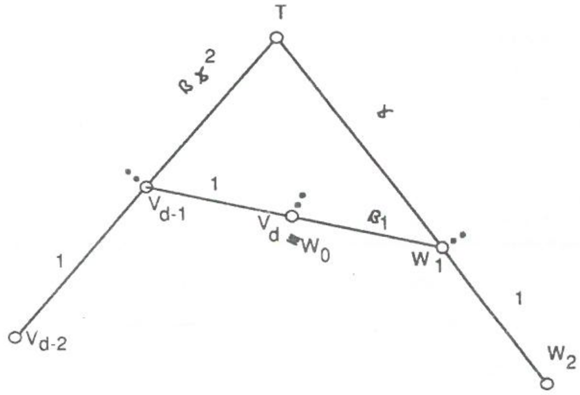

Figura 4

Cu alte cuvinte, doar W_3 poate fi ales liber dacă insistăm să avem continuitate geometrică G^2 odată ce $\beta 1 și \beta 2$ sînt aleși. Punctul crucial constă în faptul că relaxarea constrîngerilor de continuitate ne dau două grade de libertate în plus. În particular, putem ajusta $\beta 1 și \beta 2$ ca să asigurăm continuitatea G^2 în ambele curbe.

Nota traducătorului.

Pentru o mai bună înțelegere a conținutului articolului tradus mai sus considerăm utilă discuția următoare:

Reprezentarea parametrică a unei curbe are fiecare componența exprimată ca o funcție separată univariată (de un singur parametru). Coordonatele unui punct pot fi scrise ca un vector rînd astfel:

$[X(u)\ Y(u)]$ – pentru o curbă în spațiul euclidian 2D

$[X(u)\ Y(u)\ Z(u)]$–pentru o curbă în spațiul euclidian 3D (1)

Este mai convenabil să notăm vectorii rînd cu $q(u)$. De asemenea, derivata parametrică în raport cu parametrul u poate, de asemenea să fie reprezentată ca un vector rînd, astfel:

$$\frac{d^2}{du^2} q(u) = [\frac{d^2}{du^2} X(u) \frac{d^2}{du^2} Y(u)]$$

respectiv:

$$\frac{d^2}{du^2}q(u)=[\frac{d^2}{du^2}X(u)\frac{d^2}{du^2}Y(u)\frac{d^2}{du^2}Z(u)] \quad (2)$$

Cel mai adesea o curbă oarecare nu poate fi uşor definită prin intermediul unei singure funcţii analitice şi aceasta determină segmentarea ei şi utilizarea separată a cîte unei funcţii analitice pentru fiecare bucată formînd o reprezentare din bucăţi a curbei. O curbă spline este compusă dintr-o succesiune de polinomiale numite segmente curbe spline.

Fie o curbă în spaţiul 3D, parametrizată în raport cu un parametru arbitrar u. Vectorul tangent unitar are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu vectorul primei derivate parametrice, dar este normalizat. Notîndu-l cu T(u) şi presupunînd o derivată de ordinul întîi nenulă, avem:

$$T(u)=\frac{q^{(1)}(u)}{|q^{1}(u)|} \quad (3)$$

Vectorul curbură K(u) are mărimea egală cu curbura şi este îndreptat dinspre punctul dat spre centrul de curbură (centrul cercului osculator). Pentru o parametrizare arbitrară, K(u) este dat de următoarea relaţie:

$$K(u)=\frac{(q^{(1)}(u)xq^{(2)}(u))xq^{(1)}(u)}{|q^{(1)}(u)|^4} \quad (4)$$

Dîndu-se două curbe q(u) şi r(u), fie joncţiunea lor q(u)/r(u). Conform ecuaţiei 3 continuitatea vectorului tangent unitar se obţine dacă:

$$\frac{q^{(1)}(1)}{|q^{(1)}(1)|}=\frac{r^{(1)}(0)}{|r^{(1)}(0)|} \quad (5)$$

adică:

$$q^{(1)}(1)\frac{|r^{(1)}(0)|}{|q^{(1)}(1)|}=r^{(1)}(0) \quad (6)$$

sau

$$r^{(1)}(0)=\beta 1q^{(1)}(1) \quad (7)$$

Pentru a determina condiţiile necesare asupra lui $r^{(2)}(u)$ pentru a menţine continuitatea vectorului curbură, se pleacă de la ecuaţile 4 şi 7:

$$\frac{(\beta 1q^{(1)}(1)xr^{(2)}(0))x\beta 1q^{(1)}(1)}{|\beta 1q^{(1)}(1)|^4}=\frac{(q^{(1)}(1)xq^{(2)}(1))xq^{(1)}(1)}{|Q^{(1)}(1)|^4}$$

Se poate observa ca o soluţie suficientă este:

$$r^{(2)}(0)=\beta 1^2q^2(1) \quad (8)$$

În cazul general, $r^{(2)}(0)$ poate, de asemenea, să includă un termen adiţional ce este un multiplu de $q^{(1)}(1)$:

$$r^{(2)}(0)=\beta 1^2q^2(1)+\beta 2q^{(1)}(1) \quad (9)$$

Această condiţie garantează continuitatea vectorului curbură (şi deci a curburii).

Condiţiile 7 şi 9 exprimă cerinţele de continuitate ale vectorului tangent unitar şi ale vectorului curbură şi înlocuiesc condiţiile convenţionale de continuitate ale primei şi celei de-a doua derivate parametrice. De notat că, aceste noi constrîngeri sînt exprimate în termenii a doi parametri de forma $\beta 1$*şi*$\beta 2$ astfel încît $\beta 1=1$ indică continuitatea primei derivate, iar $\beta 1=1$ şi $\beta 2=0$ indică continuitatea primelor două derivate.

ing. Marius Niţu
lab. 2.24 - GeMaSOFT-ICI