UNELE REZULTATE ÎN PROGRAMAREA MATEMATICĂ ȘI POSIBILE APLICAȚII (I)

Dr. Vincențiu Dumitru
Dr. Florica Luban

Academia de Studii Economice
București

Rezumat. În lucrare sunt trecute în revistă unele rezultate matematice obținute de autori și se sugerează posibile aplicații la rezolvarea unor probleme din tehnică sau economie.

Cuvinte cheie: identificarea sistemelor prin optimizare pe direcții conjugate, modele continue pentru probleme mixte, programare matematică în condiții de incertitudine, aplicații la programarea producției pe mașini și în investiții.

1. Asupra problemei identificării proceselor prin optimizare pe direcții conjugate

Să considerăm procesul

$$Ax = y \tag{1.1}$$

în care A este matrice (n x n) nesingulară și prin care fiecărui vector input $x \in R^n$ îi corespunde un vector output $y \in R^n$. Definim ca problemă a identificării sistemului, problema determinării matricei A. Așa cum se observă, problema este considerată determinist, cu alte cuvinte y se poate determina fără zgomot.

Dacă pentru $x^1, ..., x^n$, vectori liniar independenți dispunem de outputurile corespunzătoare $y^1, ..., y^n$, atunci A este soluția ecuației matriceale

$$AX = Y \tag{1.2}$$

adică

$$A = YX^{-1} \tag{1.3}$$

unde matricele X și Y sunt formate cu vectorii coloană x, respectiv y.

Problema pe care o avem în vedere însă aici este aceea a determinării matricei A atunci cînd nu dispunem de outputurile y ci numai de valorile anumitor funcții de y, ca de exemplu:

$$f_1 = x^T \bullet y \tag{1.4}$$

sau

$$f_2 = y^T \bullet y \tag{1.5}$$

Pentru exemplificare să presupunem că A este o matrice simetrică și pozitiv definită și că putem determina valorile funcției (1.4). Atunci procesul (1.1) poate fi identificat cu ajutorul unui algoritm de optimizare

$$x^k = x^{k-1} + \lambda_k^* d^k \mid f_1(x^k) = \min_{\lambda_k} f\left(x^{k-1} + \lambda_k d^k\right) \tag{1.6}$$

unde direcțiile d^k sunt direcții mutual conjugate cu A, adică

$$d^i A d^j = \gamma_i \delta_j^i \tag{1.7}$$

unde

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Într-adevăr, dacă în procesul de optimizare putem crea n direcții d^k, $k=1,...,n$, mutual ortogonale cu A, atunci este ușor de văzut [9], [10] că avem

$$A^{-1} = \widetilde{D} \cdot \widetilde{D}^T \tag{1.8}$$

unde $\widetilde{D}$ este o matrice (n x n) ai cărei vectori coloană sunt vectorii d^k normalizați cu factorul

$$\beta_k = \frac{1}{\sqrt{\gamma_k}} \tag{1.9}$$

adică

$$\widetilde{d}^k := \beta_k d^k, \quad k = 1, ..., n \tag{1.10}$$

Or, factorul de normalizare β_k se poate calcula numai cu ajutorul valorilor funcției f_1 și a lungimii pasului pe direcție, dat fiind că, dacă λ_k^* este determinat prin (1.6), atunci avem

$$\gamma_k = (f_1^{k-1} - f_1^k)/(\lambda_k^*) \tag{1.11}$$

Odată determinată A^{-1} prin (1.8), procesul (1.1) se identifică prin inversare.

Nu este greu de arătat că, dacă am cunoaște valorile outputului y într-un proces de optimizare (1.6) în care d^k sunt direcții conjugate cu A, putem obține direct pe A. Într-adevăr, dacă direcțiile d^k satisfac (1.7), atunci

$$v^k = Ad^k \tag{1.12}$$

satisfac

$$v^i A^{-1} v^j = d^i A A^{-1} A d^j = \gamma_i \cdot \delta_j^i \tag{1.13}$$

cu alte cuvinte, direcțiile v^k sunt mutual conjugate cu A^{-1} și au același factor de normalizare.

Rezultă că avem:

$$A = \widetilde{V} \cdot \widetilde{V}^T \tag{1.14}$$

unde matricea $\widetilde{V}$ are vectorii coloană $\perp$ $\widetilde{v}^j$ dați de:

$$\widetilde{v}^j = \beta_j v^j \tag{1.15}$$

Ținînd cont de (1.15) și de (1.12), rezultă

$$\widetilde{v}^j = \frac{y^j - y^{j-1}}{[-(f^j - f^{j-1})]^{1/2}} = -\frac{y^{j-1} - y^j}{[x^{j-1} y^{j-1} - x^j y^j]^{1/2}} \tag{1.16}$$

Dacă în locul valorilor funcției $f_1(y)$ cunoaștem valorile unei funcții necunoscute $f(y) = \varphi(x)$ pe care o presupunem pseudoconvexă, atunci, în același mod, putem, într-un proces de optimizare pe direcții conjugate să determinăm hessiana funcției $\varphi(x)$ în jurul punctului de optim x^* și să identificăm funcția $\phi(x)$ prin:

$$\phi(x) = \phi(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*) H^* (x - x^*) \tag{1.17}$$

Problema generării direcțiilor conjugate de d^k este discutată în [9], [17].

2. Unele restricții și funcții obiectiv specifice repartizării producției pe mașini. Modele de programare matematică continuă pentru probleme mixte

În problemele de programare a producției, în afară de restricțiile clasice relativ la satisfacerea cererii de produse și la capacitatea disponibilă a mașinilor se cer îndeplinite, dacă este posibil, și alte condiții ca de exemplu: minimizarea dispersiei procesului de producție prin minimizarea numărului de lansări a produselor pe mașini, realizarea unei continuități a prelucrării unui același produs pe o mașină, o încărcare eficientă a mașinilor etc. Realizarea acestor obiective conduce la respectarea termenelor de predare prescrise pentru unele produse, folosirea cît mai intensă și cît mai uniformă a parcului de mașini etc.

Dacă x este vectorul necunoscutelor, problemele de mai sus conduc la problema minimizării cardinalului lui x, (MCRL): min $|x|^+$, cu condițiile $Ax = b, x \geq 0$, unde cu $|x|^+$ se notează cardinalul lui x, adică numărul componentelor strict pozitive ale lui x. În cele ce urmează presupunem că domeniul de admisibilitate al problemei MCRL este mărginit și fie x_c^* soluția ei.

Pentru determinarea acestei soluții autorii au propus [13] rezolvarea unei probleme echivalente, $P\sigma_1$ în variabile continue. Între cele două probleme există următoarea legătură:

Teorema 2.1. Există un vector $\alpha^T=(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$ astfel încît soluția problemei P σ_1:

$\min \sigma_{1(x)} = \sum_{i=1}^{n} x_i / (\alpha_i + x_i)$, $Ax=b$, $x \geq 0$ este o soluție a problemei MCRL.

Demonstrație. Fie $S = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$. Pentru orice $x \in S$ avem $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x_v^i$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$

unde x_v^i sunt vîrfurile poliedrului soluțiilor admisibile și deci, cum $x_v^i \geq 0$, avem:

$$|x|^+ = \left| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_v^i \right|^+ \geq \max \left| x_v^i \right|^+,$$

adică soluția problemei MCRL nu este un punct interior al lui S. Pot exista mai multe soluții, toate vîrfuri sau chiar o infinitate de soluții în cazul cînd avem mai multe muchii ale poliedrului soluțiilor. Oricum, o soluție a problemei MCRL este un vîrf.

Dacă notăm cu e_x vectorul cu $(e_x)_i = 1$ dacă $x_i > 0$ și $(e_x)_i = 0$ dacă $x_i = 0$, atunci avem:

$$|x|^+ > \sigma_1[x, \alpha \mid x \in R^n, \alpha_1 \leq \alpha_0 \varepsilon_i, x_i \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_i \geq \alpha_0(1-\varepsilon_i)] \geq |x|^+ \cdot (1 - \varepsilon^T e_x) \tag{2.1}$$

unde cu ε se notează vectorul de componente ε_i, $0 < \varepsilon_i < 1$. Fie $\alpha_{\sigma_1} = \min_{i,j} \{ x_{jv}^j > 0, \; x_v^j \}$ și $x^*_{\sigma_1}$ soluția problemei $P\sigma_1$ pentru $\alpha_i = \alpha_{\sigma_1} \varepsilon_i$. Conform cu (2.1):

$$\sigma_1 \left(x_{\sigma_1}^* \right) \geq \left| x_{\sigma_1}^* \right|^+ \left(1 - \varepsilon^T e_{x_{\sigma_1}^*} \right) \tag{2.2}$$

Dacă $\sigma_1 \left| x_{\sigma_1}^* \right|^+ > \left| x_c^* \right|^+$ atunci, cum $\left| x_c^* \right|^+ > \sigma_1(x_c^*)$, luînd ε suficient de mic, rezultă:

$$\sigma_1(x_{\sigma_1}^*) > \sigma_1(x_c^*), \tag{2.3}$$

adică $x_{\sigma_1}^*$ nu este un punct de minim al problemei $P\sigma_1$.

Dacă $\left| x_{\sigma_1}^* \right|^+ < \left| x_c^* \right|^+$, atunci x_c^* nu este o soluție a problemei MCRL.

Ca o consecință imediată a Teoremei 2.1., rezultă că orice soluție $x_{\sigma_1}^*$ a problemei $P\sigma_1$ este o soluție a problemei: min $|x|^+$, cu condițiile $Ax = b - \mu A e_{x_{\sigma_1}^*}$, unde μ este valoarea celei mai mici componente a lui x_c^* diferită de zero, și $e_{x_{\sigma_1}^*}$ este un vector cu $\left(e_{x_{\sigma_1}^*} \right)_i = 1$ dacă $x_i^* > 0$ și $\left(e_{x_{\sigma_1}^*} \right)_i = 0$ dacă $x_i^* = 0$.

De asemenea, să facem observația că, dacă problema MCRL are o soluție unică, atunci cele două probleme sunt echivalente.

Teorema 2.2. O condiție suficientă ca soluția $x_{\sigma_1}^*$ a problemei $P\sigma_1$, pentru un α dat, să fie o soluție x_c^* a problemei MCRL este ca:

$$\left| x_{\sigma_1}^* \right|^+ - \sigma_1 \left(x_{\sigma_1}^*, \alpha \right) < 1 \tag{2.4}$$

Demonstrație. Fie x_c^*, o soluție a problemei MCRL. Avem următorul șir de inegalități:

$$\left| x_{\sigma_1}^* \right|^+ \geq \left| x_c^* \right|^+ > \sigma_1 \left(x_c^* \right) \geq \sigma_1 \left(x_{\sigma_1}^* \right) \tag{2.5}$$

Dacă $\left| x_{\sigma_1}^* \right|^+ - \sigma_1 \left(x_{\sigma_1}^*, \alpha \right) < 1$ inegalitățile (2.5) implică $\left| x_{\sigma_1}^* \right|^+ = \left| x_c^* \right|^+$

Nu rezultă însă neapărat că, dacă

$$\left|x^*_{\sigma_1}\right|^+ = \left|x^*_c\right|^+ \text{ atunci } \left|x^*_{\sigma_1}\right|^+ - \sigma_1\left(x^*_{\sigma_1}\right) < 1$$

sau, ceea ce aste acelaşi lucru, că, dacă

$$\left|x^*_{\sigma_1}\right|^+ - \sigma_1\left(x^*_{\sigma_1}\right) > 1 \text{, atunci}$$

$$\left|x^*_{\sigma_1}\right|^+ \neq \left|x^*_c\right|^+.$$

Pe baza teoremelor 2.1 şi 2.2 putem da următorul algoritm pentru rezolvarea problemei **MCRL**:

Fie la secvenţa k vectorul α^k şi $x^*_{\sigma_s}$ un vîrf cu cel mai mic număr de componente pozitive cunoscut pînă acum.

Pasul 1. Determină

$$\left|x^*_{\sigma_\alpha k}\right|^+ : \sigma_1\left(x^*_{\sigma_\alpha k}\right) = \min \sigma\left(x, \alpha^k\right),$$

$x \in S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

Pasul 2. Test de optimalitate. Dacă

$$\left|x^*_{\sigma_\alpha k}\right|^+ - \sigma_1\left(x^*_{\sigma_\alpha k}\right) < 1,$$

atunci $x^*_{\sigma_\alpha k}$ este o soluţie a problemei MCRL, STOP, altfel se trece la pasul 3.

Pasul 3. Dacă

$$\left|x^*_{\sigma_\alpha k}\right|^+ \leq \left|x^*_{\sigma_s}\right|^+ \text{, atunci}$$

$$x^*_{\sigma_s} := x^*_{\sigma_\alpha k}.$$

Punctul $x^*_{\sigma_s}$ este soluţia problemei MCRL μ:

$$\min |x|^+, Ax = b - \mu_{\sigma_s} Ae_{\sigma_s}.$$

Dacă problema MCRL μ aproximează suficient problema MCRL, STOP, altfel se trece la pasul 4.

Pasul 4.

$\alpha^k := p\,\alpha^k, 0 < p < 1; k := k+1.$

Teorema 2.3. Algoritmul de soluţionare a problemei MCRL este finit. Într-adevăr, dat fiind un punct $x^*_{\sigma_s}$, acesta, fie că este optimul pentru problema MCRL şi după un număr de iteraţii va satisface criteriul de optimalitate ţinînd cont de faptul că $\lim_{\alpha \to 0} \sigma_1(x^0, \alpha) = |x^0|^+$, fie că va fi înlocuit cu un punct optimal deoarece α^k va satisface condiţiile teoremei 2.1.

Funcţia concavă $d(x) = x / (\alpha + x)$, definită pe $R \hat{A} \{\alpha\}$ a fost introdusă în [13] ca o funcţie de un interes general în rezolvarea problemelor de programare întreagă sau mixtă, ca urmare a proprietăţii ei de a avea aproape peste tot, în R_+, în sens generalizat, valori aproape egale cu 1.

Spunem că o proprietate are loc aproape peste tot în sens generalizat dacă raportul dintre măsura mulţimii punctelor care nu posedă proprietatea şi măsura mulţimii tuturor punctelor pe care se studiază această proprietate poate fi făcută mai mică decât un ε arbitrar de mic.

În [11], [16], funcţia d(x) este studiată ca o funcţie de apartenenţă în sensul teoriei mulţimilor vagi. Tot aici se studiază proprietăţile funcţiei de apartenenţă complementare:

$$s(x) = 1 - d(x) = \alpha / (\alpha + x), \ \alpha > 0$$

care este o funcţie convexă pe R_+.

În mod analog cu demonstraţia teoremelor 2.1 şi 2.2. se pot demonstra teoremele:

Teorema 2.4. Există un vector $\alpha^T = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$astfel ca soluţia $x^*_{\sigma_2}$ a problemei P σ_2:

$$\max \sigma_2 (x, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i / (\alpha_i + x_i)$$

cu condiţiile $Ax = b$, $x \geq 0$, să fie o soluţie x^*_c a problemei MCRL.

Teorema 2.5. O condiţie suficientă ca soluţia $x^*_{\sigma_2}$ a problemei Pσ_2 să fie o soluţie a problemei MCRL este ca să aibă loc inegalitatea:

$$\sigma_2\left(x^*_{\sigma_2}\right) + \left|x^*_{\sigma_2}\right|^+ - n < 1$$

Rezultatele obţinute pot fi incluse într-un domeniu mai larg, abordat de V. Cabot [4] în 1975, pentru rezolvarea în real a problemei de determinare a unei soluţii admisibile pentru problema de programare lineară pe o latice, PLL:

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \ x \in S, \ s = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

cu condiţia suplimentară $|x|^+_K \leq r$ unde K este o mulţime de indici.

În legătură cu această problemă, tot în [11] am dat o condiţie pentru caracterizarea unei soluţii cu cardinal minim a problemei PLL, dacă problema are o soluţie admisibilă.

Probleme privind afectarea produselor pe maşini

Presupunem un proces de producţie cu variabile continue - o condiţie de integritate asupra variabilelor nu ar schimba forma modelului, dar ar complica şi mai mult rezolvarea lui - în care notăm cu x_{ik} cantitatea din produsul i care se realizează pe maşina k.

Principalele restricţii ale problemei de afectare sunt:

- restricţii privind acoperirea cererii pe sortimente:

$$\sum_{k \in K} x_{ik} \geq D_i, \quad i \in I \tag{2.6}$$

- restricţii privind capacitatea disponibilă a fiecărei maşini

$$\sum_{i \in I} t_{ik} x_{ik} \leq T_k, \quad k \in K \tag{2.7}$$

unde am notat cu I mulţimea produselor, cu K mulţimea maşinilor, cu D_i cererea pentru produsul i, cu T_k timpul total de funcţionare al maşinii k în perioada respectivă de planificare şi cu t_{ik} timpul necesar maşinii k pentru a realiza o unitate de produs i.

Pentru a realiza vectorul de producţie $x = (x_{ik} | x_{ik} \geq 0, i \in I, \ k \in K)$ cu o împrăştiere minimă şi/sau cu o anumită preferinţă pentru afectarea produselor pe maşini, în [33] propunem ca funcţie obiectiv:

$$\min \sigma_1(x, \alpha) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} p_{ik} x_{ik} / (\alpha_{ik} + x_{ik}),$$

$$p_{ik} \geq 0, \ \alpha_{ik} > 0, \ x_{ik} \geq 0 \tag{2.8}$$

Dacă toţi p_{ik} sunt egali, minimizînd (2.8) supusă la restricţiile liniare, (2.6), (2.7) rezultă conform teoremelor 2.1 şi 2.2 că am minimizat $|x|^+$. Dacă p_{ik} sunt coeficienţii de penalizare diferiţi, numărul componentelor strict pozitive poate creşte, dar putem să obţinem o afectare preferenţiată a produselor pe maşini.

În [33] am arătat că în locul funcţiei obiectiv (2.8) se poate utiliza echivalent funcţia:

$$\max \sigma_2(x, \alpha) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} p_{ik} \alpha_{ik} / (\alpha_{ik} + x_{ik}), \tag{2.9}$$

$$p_{ik} \geq 0, \alpha_{ik} > 0, \ x_{ik} \geq 0.$$

Funcţia obiectiv (2.8) sau (2.9), dacă este normalizată corespunzător, o putem interpreta ca o funcţie de apartenenţă [11] pentru realizarea produsului i pe maşina k, în sensul teoriei mulţimilor vagi.

Deci, minimizarea împrăştierii produsului i_0 pe mulţimea K a maşinilor poate fi privită ca minimizarea funcţiei de apartenenţă a produsului i_0 la mulţimea K a maşinilor, adică:

$$\min \sigma_1 (x, \alpha) = \frac{x}{|K|^+} \sum_{k \in K} x_{i_0 k} / (\alpha_{i_0 k} + x_{i_0 k}) \tag{2.10}$$

$$\alpha_{i_0 k} > 0$$

sau maximizarea funcţiei complementare de apartenenţă la nivel zero:

$$\min \sigma_2 (x, \alpha) = \frac{x}{|K|^+} \sum_{k \in K} \alpha_{i_0 k} / (\alpha_{i_0 k} + x_{i_0 k}) \tag{2.11}$$

$$\alpha_{i_0 k} > 0$$

Să presupunem acum că se doreşte ca la realizarea cererii D_i din produsul i, să nu participe decît cel mult m_i dintr-o anume submulţime $V_k \subset K_i$, unde K_i este mulţimea maşinilor care pot realiza produsul i. Această condiţie poate fi impusă de o restricţie de forma:

$$\sum_{k \in V_k} x_{ik} / (\alpha_{ik} + x_{ik}) \leq m_i \tag{2.12}$$

În acelaşi mod se poate scrie o restricţie care să impună ca pe o anumită maşină k să nu se facă decît cel mult n_k produse dintr-o anumită submulţime de produse $V_i \subset I_k$, unde I_k este mulţimea produselor care se pot realiza pe maşina k. Avem:

$$\sum_{i \in V_i} x_{ik} / (\alpha_{ik} + x_{ik}) \leq n_k \tag{2.13}$$

Restricţiile de forma (2.12) sau (2.13) sunt restricţii neconvexe, cu variabile reale, echivalente cu aşa numitele restricţii de cardinalitate [41] sau probleme de programare matematică generalizată pe o latice [30].

Din aceeaşi clasă a restricţiilor neconvexe, putem identifica condiţiile de încărcare eficientă a maşinilor.

Astfel, pentru anumite procese de producţie se poate cere încărcarea unei maşini cu un anumit produs la nivelul capacităţii ei sau la nivel zero, astfel încît maşina să rămînă liberă pentru realizarea altor produse. O astfel de condiţie poate fi scrisă sub forma:

$$x_{ik} \geq \beta \cdot q_{ik} \left[x_{ik} / (\alpha_{ik} + x_{ik}) \right] \tag{2.14}$$

unde q_{ik} este producţia maximă, care poate fi obţinută din produsul i pe maşina k în perioada de programare, şi β este un procent dat.

Pentru modelele de programare a producţiei, foarte adesea determinarea unei soluţii admisibile în raport cu restricţiile de cerere şi capacitate este o problemă dificilă. Ca urmare, problemele de programare matematică cu restricţii inexacte sunt intens studiate.

În cazul restricţiilor liniare (2.6), (2.7), se poate încerca parametrizarea vectorului termenului liber, astfel încît să avem:

$$(A) \begin{cases} \sum_{k \in K} x_{ik} \geq D_i - q_i, & i \in I \quad (2.15) \\ \sum_{i \in I} t_{ik} x_{ik} \leq T_k + \tau_k, & k \in K \quad (2.16) \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} 0 \leq q_i \leq \bar{q}_i, & i \in I \quad (2.17) \\ 0 \leq \tau_k \leq \bar{\tau}_k, & k \in K \quad (2.18) \end{cases}$$

unde q_i este cantitatea din produsul i cu care nu va fi realizată cererea, τ_k este timpul suplimentar necesar maşinii k pentru realizarea programului de producţie, iar $\bar{q}$ şi $\bar{\tau}_k$ sunt limitele prevăzute pentru q_i şi respectiv τ_k.

Pentru a minimiza abaterile față de cerere și capacitățile de producție disponibile, putem utiliza ca funcții obiectiv:

$$\min f_1(q,\tau)=\sum_{i\in I} p_i q_i+\sum_{k\in K} p_k\cdot\tau_k\cdot\ p_i\geq 0,\ p_k\geq 0 \quad (2.19)$$

$$\min f_2(q,\tau)=\sum_{i\in I} p_i q_i^2+\sum_{k\in K} p_k\tau_k^2,\ p_i\geq 0,\ p_k\geq 0 \quad (2.20)$$

Pentru a găsi un vector de producție, $z=(x,q,\tau)\in S=A\cap B$ și care în plus să minimizeze numărul abaterilor de la programul de producție și/sau numărul de suplimentări de capacitate, propunem [33], [35] minimizarea funcției obiectiv:

$$\min \sigma_1(q,\tau,\alpha)=\frac{1}{|I|^{+}+|K|^{+}}\left[\sum_{i\in I} q_i/\left(\alpha_i+q_i\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{k\in K}\tau_k/\left(\alpha_k+\tau_k\right)\right] \quad (2.21)$$

Utilizarea funcției (2.21) este motivată, de asemenea, de teorema 2.1 și 2.2.

Aproximații lineare

Rezolvarea problemelor de programare matematică neconvexă este dificilă. Un algoritm pentru obținerea unei soluții optimale pentru modele cu funcții obiectiv neconvexe separabile și restricții liniare este propus de Falk și Soland în [27]. Algoritmul utilizează o procedură de "branch and bound", care se efectuează printr-o succesiune de optimizări cu funcții obiectiv date de anvelopa convexă a funcției neconvexe pe anumite domenii.

Cum pentru funcții separabile concave anvelopa convexă este lineară, rezultă că pentru toate modelele neconvexe de mai sus, în cazul problemelor de dimensiuni mari, ne putem mărgini la o soluție suboptimală, obținută în cadrul unor anumite limite de calcul date. Pentru exemplificarea procedurii pe un exemplu numeric se poate consulta [11].

Fie:

$$\varphi_{1j}\left(x_j,\alpha_j\right)=\frac{x_j}{\alpha_j+x_j} \quad (2.22)$$

$$\varphi_{2j}\left(x_j,\alpha_j\right)=\frac{\alpha_j}{\alpha_j+x_j} \quad (2.23)$$

Anvelopa convexă în intervalul $\left[l_j\,,L_j\right]$ a funcției φ_{1j} este:

$$\psi_{1j}\left(x_j,\alpha_j\right)=\left[\alpha_j/\left(\left(\alpha_j+l_j\right)\left(\alpha_j+L_j\right)\right)\right]\bullet x_j+$$
$$+\,l_jL_j/\left(\left(\alpha_j+l_j\right)\bullet\left(\alpha_j+L_j\right)\right) \quad (2.24)$$

iar a funcției $-\varphi_{2j}$ pe același interval este:

$$\psi_{2j}\left(x_j,\alpha_j\right)=\left[\alpha_j/\left(\left(\alpha_j+l_j\right)\left(\alpha_j+L_j\right)\right)\right]\bullet x_j+$$
$$+\left[1-l_jL_j/\left(\left(\alpha_j+l_j\right)\bullet\left(\alpha_j+L_j\right)\right)\right] \quad (2.25)$$

a) Să considerăm funcția obiectiv neconvexă (2.8) în care toți $p_{ik}=1$. Considerînd în mod natural că fiecare $x_{ik}\in\left[0,c_{ik}\right]$, unde c_{ik} este cantitatea din produsul i pe care mașina k o poate tehnic realiza, anvelopa convexă a funcției (2.8) ținînd seama de (2.24) cu $l_j=0$, $L_j=c_{ik}$ avem:

$$\psi_3(x,\alpha)=\sum_{i\in I}\sum_{k\in K}\left[1/\left(\alpha_{ik}+c_{ik}\right)\right]x_{ik}\,,\ \alpha_{ik}>0 \quad (2.26)$$

și pentru $\alpha_{ik}<<c_{ik}$ putem enunța următoarea teoremă de primă aproximație:

Teorema 2.6. Funcția obiectiv a unui proces de producție care minimizează numărul de componente strict pozitive ale vectorului de producție și prin aceasta dispersia prelucrării pe mașini este, într-o primă aproximație, o funcție lineară, cu coeficienți invers proporționali cu capacitatea mașinilor, relativă la fiecare componentă a vectorului de produse.

b) În cazul funcției (2.21), pentru $q_i\in\left[0\,,\overline{q}_i\right]$, $\tau_k\in\left[0\,,\overline{\tau}_k\right]$, anvelopa convexă este:

$$\psi_4(x,\alpha)=\frac{1}{|I|^{+}+|K|^{+}}\left[\sum_{i\in I}\frac{1}{\alpha_i+\overline{q}_i}\,q_i+\right.$$
$$\left.+\sum_{k\in K}\frac{1}{\alpha_k+\overline{\tau}_k}\,\tau_k\right] \quad (2.27)$$

de unde pentru $\alpha_i<<\overline{q}_i$ și $\alpha_k<<\overline{\tau}_k$ putem enunța teoremele:

Teorema 2.7. Funcția obiectiv a unui proces de producție, care minimizează numărul de poziții neîndeplinite din planul de producție este, într-o primă aproximație, o funcție lineară, cu coeficienții invers proporționali cu nivelul permis de nerealizare a cererii.

Teorema 2.8. Funcția obiectiv a unui proces de producție, care minimizează numărul de suplimentări de capacitate de producție este, într-o primă aproximație, o funcție lineară, cu coeficienți invers proporționali cu nivelul permis de suplimentare a capacității de producție.

O altă justificare a acestor aproximații lineare ar putea fi și aceea a unor penalizări invers proporționale cu mărimea disponibilității vectorului resursă neparametrizat, ceea ce corespunde ideii intuitive că, o resursă cu disponibil mare permite un interval de variație mai mare decît o resursă cu disponibil mai mic.

Unele din funcțiile obiectiv prezentate mai sus au fost testate numeric, atît prin rezolvarea unor probleme test, cît și a unor probleme concrete de programare a producției la o secție de electrozi de sudură [36].

Experimentele au condus la obținerea unor programe de producție cu un număr de schimbări de matrițe la presare, de depășiri de capacități și de nerealizări ale pozițiilor de plan mai mic decît în cazul utilizării altor funcții de eficiență.

3. Asupra unor modele de programare matematică în investiţii

Dat fiind un model, problema formulării unor criterii de determinare a unei soluţii, în condiţii de incertitudine asupra coeficienţilor şi apoi a rezolvăriii modelului de optimizare în raport cu acest criteriu, a făcut obiectul a numeroase cercetări care s-au constituit deja în discipline de studiu, cum ar fi programarea stocastică, în care se presupune că se cunosc funcţiile de distribuţie a vectorilor coeficienţilor sau a erorilor cu care aceştia sunt cunoscuţi. Pentru probleme reale, determinarea acestor distribuţii poate fi ea însăşi o problemă grea, astfel încît prezintă un real interes studiul modelelor în care despre unii coeficienţi se cunoaşte numai că ei variază în anumite intervale sau domenii. Diferite aspecte nestocastice ale inexactităţii au făcut obiectul unor cercetări, devenite de acum clasice, cum sunt cercetările lui Dantzig [8] sau mai recent [1], [5], [14], [39], [42].

Una dintre problemele relativ mai simple este aceea în care se presupune că vectorul termenilor liberi ai resurselor sau vectorul coeficienţilor funcţiei obiectiv variază într-un domeniu poliedral convex şi mărginit.

În [1] se studiază această problemă în cazul unor modele lineare de programare matematică în care se presupune că vectorul coeficienţilor funcţiei obiectiv este un punct arbitrar al unui poliedru convex şi mărginit. Pentru rezolvarea problemei, criteriul linear de alegere a soluţiei este înlocuit printr-unul din următoarele criterii: criteriul de minimax al lui Wald, criteriul lui Laplace de minimizare a mediei aritmetice a pierderilor, criteriul lui Hurwitz de minimizare a unei combinaţii lineare dintre maximul şi minimul pierderii sau prin criteriul lui Savage-Niehans de regret minimax. Soluţia optimală a modelului se defineşte în acest caz astfel ca, oricare va fi valoarea coeficienţilor în domeniul de variaţie, să ne asigurăm o soluţie optimă în raport cu una din funcţiile scop menţionate mai sus. În [1] se arată că pornind de la probleme lineare, cu coeficienţii funcţiei obiectiv variind într-un domeniu poliedral convex şi mărginit, se ajunge la rezolvarea uneia sau mai multor probleme lineare, în funcţie de criteriul ales, pe domenii extinse.

În [14], extindem rezultatele din [1] la cazul în care funcţia obiectiv este convexă în vectorul variabilelor x şi convexă sau concavă în v (vectorul coeficienţilor funcţiei obiectiv), iar domeniul de admisibilitate X este o mulţime convexă arbitrară, nu neapărat un poliedru convex, vectorul v rămînînd să fie un punct arbitrar într-un poliedru convex şi mărginit V.

Aceste rezultate pot fi utilizate pentru a pune în evidenţă posibilitatea rezolvării unor modele nelineare de investiţii, în condiţii de incertitudine asupra valorii nete a proiectelor. Problema alocării fondurilor la diferite proiecte de investiţii a reprezentat una dintre primele aplicaţii ale programării matematice în economie. Încă din 1955, Lorie şi Savage [32] definesc problema PLS astfel: dată fiind valoarea netă prezentă a unui set de alternative de investiţii independente şi date fiind cheltuielile pentru aceste proiecte în fiecare din cele T perioade de timp, pe orizontul căruia se studiază problema, să se găsească subsetul de proiecte care maximizează valoarea totală netă actuală a proiectelor acceptate şi care satisface în acelaşi timp restricţiile asupra cheltuielilor în fiecare din cele T perioade.

Problema poate fi modelată ca o problemă de programare lineară întreagă.

$$\max \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \tag{3.1}$$

cu condiţiile

$$\sum_{j=1}^{n} c_{t_j} x_j \le C_t, \quad t=1,\ldots,T \tag{3.2}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3.3}$$

unde:

v_j - valoarea netă prezentă a proiectului j, cînd se ia în consideraţie procentul actual al dobînzii;

c_{t_j} - cheltuielile necesare proiectului j în perioada t;

C_t - cheltuielile maxime permise în perioada t.

Ulterior, acest model a fost extins de Weingartner [43] la cazul în care proiectele sunt interdependente. Şi în acest caz, problema ce se propune a fi rezolvată este o problemă de programare lineară cu variabile zero-unu:

$$\max f(v,x) = v^T x \tag{3.4}$$

$$x \in X \tag{3.5}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3.6}$$

unde f(x) este o funcţie lineară în x, cu coeficienţi v, iar X este un poliedru convex.

Este evident că pentru problema alegerii proiectelor de investiţii, atît faptul că X este un poliedru convex, cel puţin în cazul proiectelor interdependente, cît şi faptul că coeficienţii v sunt cunoscuţi cu exactitate, sunt ipoteze destul de restrictive, astfel încît este justificat următorul model de alegere a proiectelor de investiţii, MWDL, model care maximizează valoarea netă actuală, în condiţiile celei mai proaste stări a vectorului v în V:

$$\max_{x \in X} \min_{v \in V} f(v,x) \tag{3.7}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3.8}$$

unde f(v,x) este o funcţie concavă în x pentru v fixat, şi linear în v pentru x fixat, X o mulţime convexă, iar V un poliedru convex şi mărginit.

Avem **Teorema 3.1.** Problema (3.7) este o problemă convexă. Demonstraţia este imediată ţinînd seama de faptul că, pentru x fixat, funcţia $\varphi(x) = \min_{v \in V} f(v,x)$ este o funcţie concavă.

Rezolvarea însă a unei probleme booleene de max min (3.7) - (3.8) nu ar fi o problemă simplă chiar dacă problema este convexă. Reducerea ei la cazul unei probleme lineare zero-unu reprezintă desigur un avantaj evident, ţinînd seama că pentru dimensiunile relativ mici ale unor asemenea probleme, rezolvarea ei nu mai prezintă astăzi dificultăţi.

Teorema 3.2. Soluţia problemei MWDLE:

$$\max x_{n+1} \tag{3.9}$$

$$[x, x_{n+1}] \in X_e \tag{3.10}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \dots, n \tag{3.11}$$

unde:

$$X_e = \left\{ [x, x_{n+1}] \,\middle|\, x \in X, f_k(v^k, x) \geq x_{n+1}, v^k \in \hat{V} \right\} \tag{3.12}$$

iar, $\hat{V}$ notează mulţimea vîrfurilor poliedrului convex şi mărginit V, este o soluţie a problemei MWDL.

Demonstraţia este imediată dacă observăm că în condiţiile în care pentru x fixat funcţia f(v,x) fiind lineară în v îşi va atinge minimul într-un vîrf al lui V şi deci avem

$$\max_{x\in X} \min_{v\in V} f(v,x) = \max_{x\in X} \min_{v^k\in \hat{V}} f(v^k,x) \tag{3.13}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \ j = 1, \dots, n, \ x_j \in \{0,1\}, \ j=1, \dots, n \tag{3.14}$$

Odată obţinută relaţia (3.13), teorema este demonstrată deoarece pe X_e, $\max x_{n+1}$ nu poate depăşi $\min_{v\in V} f(v,x)$ conform condiţiilor puse în (3.12).

Observaţie. Problema MWDLE este o problemă zero-unu convexă. Dacă X este o mulţime convexă definită de relaţii lineare atunci problema MWDLE este o problemă lineară zero-unu.

În locul **criteriului (3.7), de minimax a lui Wald**, am putea considera un **criteriu Savage-Niehans** de minimax al regretului şi ca urmare să rezolvăm o problemă MSNDL:

$$\min_{x\in X} \max_{v\in V} \left[\max_{x\in X} f(v,x) - f(v,x) \right] \tag{3.15}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \dots, n \tag{3.16}$$

Teorema 3.3. Dacă f(x,v) este o funcţie lineară în v şi V este un poliedru convex şi mărginit, iar $\hat{V}$ este mulţimea vîrfurilor poliedrului V, atunci avem:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X} \max_{v\in V} \left[\max_{x\in X} f(v,x) - f(v,x) \right] = \\ &= \min_{x\in X} \max_{v\in \hat{V}} \left[\max_{x\in X} f(v,x) - f(v,x) \right] \end{aligned} \tag{3.17}$$

Demonstraţia rezultă din faptul că, pentru v fixat, funcţia $\phi(v) = \max_{x\in X} f(v,x) - f(v,x)$ este o funcţie convexă în v dacă f(v,x) este lineară în v.

Teorema 3.4. În condiţiile teoremei 3.3, o soluţie a problemei MSNDL

$$\min_{[x, x_{n+1}]\in X_e} x_{n+1} \tag{3.18}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \dots, n \tag{3.19}$$

unde:

$$X_e = \left\{ [x_1, x_{n+1}] \,\middle|\, x \in X, x_{n+1} \geq z^k - f(v^k, x), v^k \in \hat{V} \right\}, \tag{3.20}$$

$$z^k := \min_{x\in X} f(v^k, x), \quad k = 1, \dots, |\hat{V}| \tag{3.21}$$

este o soluţie a problemei MSNDL.

Demonstraţia este imediată ţinînd cont de teorema 3.3.

Observaţie. Dacă f(v,x), pentru v fixat, este o funcţie convexă în x şi X este o mulţime convexă, atunci problema MSNDLE este o problemă zero-unu convexă. Dacă f(v,x) este lineară în v şi x, iar X este un poliedru convex, atunci problema este o problemă zero-unu lineară.

Criteriul lui Laplace de maximizare a mediei aritmetice a cîştigurilor în vîrfurile extreme ale lui V

$$\max \frac{1}{|\hat{V}|} \sum_{k=1}^{\hat{V}} f(v^k, x), x \in X, x_j \in \{0,1\}, j = 1, \dots, n \tag{3.22}$$

conduce, de asemenea, la o problemă zero-unu convexă dacă $f(v^k,x)$ sunt funcţii concave în x, şi X este o mulţime convexă.

Bibliografie

1. AVENHAUS, R., BEEDGEN, R., CHERNAVSKY, S.Y., ş.a.: Handling Uncertainties. In: Linear Programming Models, W.P. - 80 -170, IASA, Laxenburg, Austria, 1980.
2. BELLMAN, R.E., ZADEH, L.A.: Decision-making in a Fuzzy Environment, Management Sci. (Appl. Ser), 1970, pp. 141-164.
3. BURKARD, R.E., KEIDING, H., KRARUP, J., PRUZAN, P.M.: Relationship between Optimality and Efficiency in Multicriteria 0-1, Math. Institut Universitat zu Köln, Report 80-10, Aug. 1980.
4. CABOT, V.: On the Generalized Lattice Point Problem and Nonlinear Programming, Operations Research vol.23, nr.3, 1975, pp. 565-571.
5. CHERNAVSKY, S.Y.: Decision Making under Uncertainty (O priniatii reshenii v usloviiah neopredeleonnosti) In: Factor neopredeleonnosty pri prinjatii optimalnih reshenii v bolshih systemah energetiki. Irkutsk, 1974, pp. 35-46.
6. CIOBANU, GH., STOICA, M: Production Scheduling in Fuzzy Conditions, LCCE Preprint CO-13-1979, A.S.E. Bucureşti, 1979.
7. COLLATZ, L.: Functional Analysis and Numerical Mathematics, Academic Press, New York, 1966.
8. DANTZIG, G.B.: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1963.
9. DUMITRU, V., LUBAN, FL., MOGA, S., SERBAN, R.: Nonlinear Programming, Algorithms, Programms, Numerical Results. Appendix P with Fl. Luban, S. Moga, R. Serban. (Programare nelineară, algoritmi, programe, rezultate numerice. Appendix în

colaborare cu Fl. Luban, S.Moga, R.Serban), Bucureşti, Editura Academiei Române, 1975, p. 208.

10. **DUMITRU, V.**: Conjugate Direction Method, Hessian Approximation and a New Class of Mixed Type Algorithms for Optimization, Econ. Comput. Econ. Cybern. Stud. Res. 1975, No.2, pp. 39-53.
11. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**: Funcţii de apartenenţă şi unele modele de programare matematică cu aplicaţii în programarea producţiei, LCCE Preprint CO-15-79, A.S.E., Bucureşti, 1979.
12. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**: Asupra unor modele neconvexe de programare matematică. LCCE Preprint, CO-28-79, A.S.E.
13. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**: Modele de programare cu variabile reale pentru probleme discrete sau mixte. În: Studii şi Cercetări de Calcul Economic şi Cibernetică Economică, Nr.2, 1980, pp 57-67.
14. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**: Asupra unor modele de programare matematică cu funcţii obiectiv nelineare şi coeficienţii inexacţi, LCCE Preprint MMM - 5 - 81.
15. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**: Mathematical Programming Real Variable Models for Integer and Mixed-Integer Problems and Some Applications to Production Scheduling. In: Mathematica, Cluj-Napoca, 1981, vol.23, nr.46, pp. 11-23.
16. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**: Membership Functions, Some Mathematical Programming Models and Production Scheduling. In: Fuzzy Sets and Systems No.8, 1982, pp. 19-33.
17. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**: A Nongradient Algorithm with Final Newton Moves. In: Methods of Operations Research, nr.49, 1985, pp. 17- 27.
18. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**: Approximation and Optimization Using only Functions Values. In: Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization, Cluj-Napoca, October 25-27, 1984, pp. 229-239.
19. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**: On the Fuzzy and Multicriteria Mathematical Programming. Methods of Operations Research No. 53, 1986, pp. 57-66.
20. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**:On Some Optimization Problems under Uncertainty. In: Fuzzy Sets and Systems, No. 18, 1986, pp. 237-272.
21. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**: On the Monotone Functionals in Multicriteria Optimization. In: Econ. Comput. Econ. Cybern. Stud. Res. 1987, No. 1, pp. 77-83.
22. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**: On the Pareto Invariance of Some Decision Functionals. Methods of Operations Research, No. 57, 1987, pp. 3-10.
23. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**: Monotone Operators and Pareto Invariance in Multicriteria Optimization. In: Proceedings of the XIIIth. Symposium on Operations Research, Paderbon 1988, in Methods of Operations Research No. 60, Verlag Anton Hain, Frankfurt am Main 1990.
24. **DUMITRU, V., LUBAN, FL.**: On the Invariance of the Pareto Optimal Set. In: Computer Science Journal of Moldova, vol.1, No.3, 1993, pp 51-61.
25. **EVERETT, N.**: Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problem of Optimum Allocation of Resources. In: Operations Research, No. 11, 1963, pp. 399-417.
26. **ESOGBUE, A.O., BELLMAN, R.E.**: Fuzzy Dynamic Programming and its Extensions. In: TIMS/Studies in the Management Sciences, No. 20, 1984, pp. 147-167.
27. **FALK, J.E., SOLAND, R.M.**: An Algorithm for Separable non-Convex Programming Problems, Management Science, No. 15, 1969, pp. 550- 569.
28. **FALK, J.E.**: Exact Solutions of Inexact Linear Programms. In: Operations Research, Vol. 24, No. 4, July-Aug, 1976, pp. 783-787.
29. **FIACCO, A.V., McCORMICK, G.P.**: Nonlinear Programming Sequential Unconstrained Minimization Techniques, John Wiley, 1968.
30. **GLOVER, P., KLINGMAN, D.**: The Generalized Lattice - Point Problems. In: Operations Research, Vol. 21, No.1, 1973, pp. 141-155.
31. **KARLIN, S.**: Mathematical Methods and Theory in Games Programming and Economics, Addison-Wesley, Reading U.S.A. 1959.
32. **LORIE, J.H., SAVAGE, L.T.**: Three Problems in Rationing Capital, J. Business, 1955, pp.229-239.
33. **LUBAN, FL., DUMITRU, V.**: Asupra repartizării producţiei pe maşini prin programare matematică. In: Studii şi Cercetări de Calcul Economic şi Cibernetică Economică, Nr. 4, 1979, pp 43-50.
34. **LUBAN, FL.**: Programarea producţiei la o secţie de electrozi de sudură, prin programare matematică. În: Studii şi Cercetări de Calcul Economic şi Cibernetică Economică, nr. 1, 1980, pp 47-56.
35. **LUBAN, FL., DUMITRU V.**:Theorems for Linear Approximation of Some Nonconvex Production Programming Models. In: Proceedings of the fifth European Meeting on Cybernetics and Systems Research, Vienna, 8-11 April, 1980, Hemisphere Publishing Corporation, Washington DC, 1982, pp. 361-365.
36. **LUBAN, FL.**: Modele de optimizare a activităţilor economice din metalurgie. Teza de doctorat, ASE, Bucureşti, 1980.
37. **MARUSCIAC, I.**: Metode de rezolvare a problemelor de programare nelineară, Editura Dacia, Cluj, 1973.
38. **NEGOIŢĂ, C.V., SULARIA, M.**: On Fuzzy Mathematical Programming and Tolerance in Planning. In: Economic Cybernetics and Economic Computation. Studies and Research, No.1, 1976, pp. 3-15.
39. **SOYSTER, A,L.**: Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexacte Linear Programming, Operations Research, Vol.21, No. 5, 1973.
40. **STANCU-MINASIAN, I.M.**: Programarea stocastică cu mai multe funcţii obiectiv. Editura Academiei Românici, Bucureşti, 1980.

41. **TANAHASKI, K., LUENBERGER, D.**: Cardinality - Constrained Linear Programming, Stanford University, 1971.
42. **WIRTZER, A.D., CHERNAVSKY, S.Y.**: On Search for Optimal Strategies for Economic System Development under Uncertainty. (In: Systemnîi analiz i perspectivnoe planirovanie), Moscow, Computer Centre of the Academy of Sciences of USSR, 1973, pp. 209-217.
43. **WEINGARTNER, H., MARTIN, H.**: Capital Budgeting of Interrelated Projects: Survey and Synthesis, in Managerial Economics, G.P.E. Clarkson Ed., Penguin Books, Baltimore SUA, 1968.
44. **ZIMMERMANN, M.J.**: Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions. In: Fuzzy Sets and Systems, No.1, 1978, pp. 44-45.