CÂTEVA CLASE DE FRACTALI

ing. Theodor Bălan,
ing. Adela Buzuloiu,
ing. Viorel Uţă,
ing. Laura Busuioc

Institutul de Cercetări în Informatică

Rezumat: Lucrarea prezintă suportul teoretic şi rezultatele experimentărilor pentru patru tipuri de fractali foarte des întâlniţi în literatura de specialitate: fractalii Mandelbrot, fractalii Julia, fractalii Hilbert, fractalii stocastici şi liniari.

Lucrarea prezintă şi pachetul de programe EDITEH cu ajutorul căruia s-au făcut experimentările, iar câteva din realizări sunt prezentate pe parcursul paginilor care urmează.

Cuvinte cheie: fractal, dimensiune fractală, planul complex, puncte critice, interactiv, domeniu de culori, generator numere pseudoaleator, linie poligonală primară, modele.

1. Introducere

Foarte puţine aspecte din natură pot fi descrise precis prin relaţii matematice. În general, utilizăm modele aproximative, încercând ciclic să ne apropiem de o cât mai satisfăcătoare evaluare.

Să ne gândim doar la câteva exemple din lumea biologică (universul celular, reţeaua vaselor de sânge), din diversitatea formelor de relief şi a fenomenelor atmosferice (ţărmurile, forma şi mişcarea maselor de aer) sau din universul fizico-chimic (mişcarea browniană, reacţii chimice), pentru a realiza caracterul extrem de neregulat, puternic diversificat, inimitabil chiar, al realităţilor ce ne înconjoară.

O altă viziune, un posibil răspuns, o altă abordare a acestor complexe probleme ar putea fi conceptul de **fractal** introdus la mijlocul deceniului şapte de către B.B. Mandelbrot.

O definire a fractalilor este dificil de dat, preferăm să reliefăm câteva proprietăţi. În primul rând un sistem fractal este caracterizat printr-un înalt grad de fragmentare, de neregularitate. Apoi, există un mare grad de asemănare între o parte a sistemului şi sistemul ca întreg.

Intuitiv, dacă această proprietate de asemănare se poate aplica succesiv fragmentelor, iar asemănarea cu întreg sistemul se păstrează, atunci nivelul de repetabilitate poate reprezenta o caracteristică a fractalilor numită **dimensiune fractală**.

Comparată cu dimensiunea spaţiului euclidian, dimensiunea fractală este cel mult egală, putând lua şi valori zecimale. Spre deosebire de fractalii din natură, numiţi fractali naturali, un fractal creat prin intermediul calculatorului reprezintă o imagine_fractală sau set_fractal.

Asocierea între formă şi culoare realizează imagini deosebite, neaşteptate, adeseori stranii.

Singura problema deosebită în realizarea fractalilor o reprezintă timpul de calcul mare.

Viteza de generare poate fi îmbunătăţită, atât prin creşterea performanţelor calculatorului, dar şi prin intermediul algoritmilor şi condiţiilor de implementare.

Aplicaţiile fractalilor sunt tot mai diversificate, începând cu arta, în general cu tot ce înseamnă imagine, continuând cu medicina (cu referire la circulaţie, la sistemul cardiovascular sau nervos) şi nu în ultimul rând cu cercetările spaţiale.

Lucrarea îşi propune să facă referiri la câteva tipuri de fractali obţinuţi pe calculator, să le prezinte caracteristicile, să analizeze algoritmi de generare şi rezultatele obţinute.

2. Preliminarii

Fiind dat un polinom: $p : C \longrightarrow C;\ n \geq 2$

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} z + a_n$$

şi un număr complex z_0.

Se doreşte răspuns la întrebarea: "ce comportare va avea şirul de puncte $\{z_0,\ p(z_0),\ p(p(z_0)),\ \ldots.\}$,: va diverge către ∞, va converge către un punct fix, va converge ca un ciclu de puncte sau va avea o evoluţie haotică?"

Lucrările matematicienilor Pierre Fatou şi Gaston Julia privitoare la iterarea funcţiilor raţionale, arată că răspunsul la această întrebare trebuie căutat în studiul orbitelor punctelor critice ale polinomului p(z).

Prezentăm pe scurt aceste rezultate:

Condiţia ca un punct z_0 finit să fie un punct de atracţie pentru p(z) este ca $|\ p'(z_0) < 1\ |$.

Pentru orice polinom punctul $z = \infty$ este un punct de atracţie. Iar **n_ciclu** pentru p(z) definit prin $\{z_1 \ldots z_n\}$ cu $p(z_1)=z_2,\ p(z_2)=z_3,\ p(z_{n-1})=z_n;\ p(z_n)=z_1$ este un **n_ciclu** de atracţie dacă:

$$|\ p'(z_n)p'(z_{n-1}) \ldots\ldots p'(z_1) < 1\ |$$

Definim zonă de atracţie a unui punct fixat z_0, mulţimea tuturor punctelor W pentru care popo....op (W) $\longrightarrow z_0$ şi o notăm cu $A(z_0)$. Întotdeauna $A(\infty)$ este nevidă.

Notăm cu $K_p = C - A(\infty)$ mulțimea tuturor punctelor neconvergente la ∞ după iterarea prin p(z); această mulțime se numește ansamblu Julia.

Pentru orice polinom p(z), K_p nu este vidă, iar eventualele n_cicluri finite ale lui p(z) se găsesc în zonele de atracție ale punctelor critice ale lui p(z).

3. Fractalii Mandelbrot și Julia

Fractalul Mandelbrot standard este construit utilizând polinomul $F_c(z) = z^2 + c$.

Pentru fiecare valoare c, $F_c(z)$ are numai un singur punct critic z = 0 și poate avea cel mult un singur 2_ciclu atractiv.

Mai mult, mulțimea K_p este conexă dacă z = 0 nu este atras la ∞.

Încercând o lărgire a posibilităților oferite de acest fractal am considerat $F_c(z) = z^m + c$ cu gradul m un număr real.

Algoritmul constă în următoarele etape:

- se stabilește în planul complex un domeniu pătratic unde se vor căuta punctele aparținând fractalului; acest domeniu este definit printr-un număr complex z_0, specificându-se valorile Real_Z_0 și Imag_Z_0, cât și de lungimea laturii pătratului Inc_Z_0;

- se stabilește în planul ecranului o zonă rectangulară în care va fi desenat fractalul; această zonă este definită prin colțul stânga sus al dreptunghiului (x_1,y_1) și respectiv dreapta jos (x_2,y_2);

- se stabilește puterea m a variabilei din funcția $F_c(z)$.

Fractalul Mandelbrot standard devine un caz particular pentru m = 2.

- se stabilește numărul maxim de iterații N în funcție de care se decide asupra apartenenței punctului complex curent la fractal;

- se stabilește valoarea limită superioară L a normei șirului $\|z_k\|$, unde $z_k = F_c(z_{k-1})$ cu $z_0 = 0$, c fiind punctul curent din domeniul complex supus parcurgerii; procesul iterativ va continua atâta timp cât $\|z_k\| < L$ și $k < N$;

- decizia privind apartenența punctului curent la fractal se ia în următoarele condiții:

- k = N, adică, după N iterații, norma șirului nu a depășit limita; în acest caz punctul complex curent aparține fractalului, iar pixelul din zona de afișare a ecranului va avea culoarea BACKGROUND-ului;

- $\|z_k\| > L$, în acest caz punctul nu aparține fractalului, el ieșind din zona de atracție a punctului critic; distincția între aceste puncte o facem în funcție de k, adică numărul de iterații cât timp $\|z_k\| < L$; se va partiționa intervalul [0, N) în p subintervale de lungime egală și în funcție de apartenența lui k la unul din subintervale, se va colora pixelul curent din zona de afișare ecran.

Fractalii Julia se deosebesc de fractalii Mandelbrot în ceea ce privește modul de iterare a funcției $F_c(z)$. Dacă în cazul fractalului Mandelbrot iterarea pornea din $z_0=0$, iar c era punctul complex curent, fractalul Julia fixează ca un parametru pe c, iar punctul de pornire a iterării este punctul complex curent. Deci, pentru fiecare parametru c definit prin specificarea valorilor Real_C și Imag_C, se va obține un nou fractal Julia.

În rest, generarea fractalilor Mandelbrot și Julia este la fel. În Anexa 1 prezentăm o procedură comună, scrisă în limbajul C.

Implementarea acestor algoritmi a fost făcută într-un sistem de programe mult mai amplu, numit EDITEH, în care fractalii reprezintă o componentă.

Acest pachet de programe dezvoltat unitar operează cu module grafice complexe și variate, oferind modalitățile interactive avansate de definire, manevrare și exploatare a desenelor și imaginilor. Viziunea de ansamblu și detaliu necesare se găsesc în [7].

Revenind la fractalii Mandelbrot și Julia modulul de definire a parametrilor este prezentat în următorul meniu:

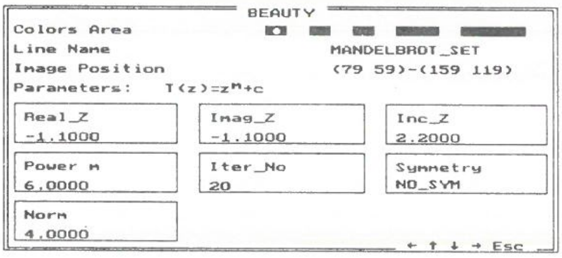

Figura 1

Fractalul Mandelbrot este o componentă a modulului grafic BEAUTY și se selectează din lista parametrului Line_Name.

Parametrul Image_Position se referă la stabilirea colțurilor zonei rectangulare a ecranului unde se va afișa fractalul. Acest lucru se realizează interactiv prin utilizarea mouse-ului sau a tastelor săgeată.

Pentru stabilirea culorilor ce se vor utiliza, există pentru parametrul Colors Area o procedură interactivă de a stabili pentru fiecare subinterval (partiția poate avea maxim p = 12 părți) culoarea dorită. Modificarea culorilor se poate face, atât cu mouse-ul poziționat pe câmpul culorii respective, cât și cu tasta săgeată plus ENTER prin intermediul unui prompter local.

Referitor la parametrii numerici Real_Z, Imag_Z, Inc_Z aceștia sunt editați pe pozițiile afișate, fiind definiți pe 16 biți cu 4 cifre zecimale exacte.

Parametrii Power m și Norm, reprezentând puterea variabilei z din funcția $F_c(z)$, respectiv L limita normei $\|z_k\|$ sunt definiți pe 16 biți cu 3 cifre zecimale exacte.

Editarea acestor parametri numerici se poate face, atât cu mouse-ul poziționat pe câmpul parametrului respectiv, cât și cu tastele săgeată plus ENTER prin intermediul unui prompter local.

În sfârşit, mai există un parametru SYM care oferă prin variantele NO_SYM, OY_SYM, OX_SYM şi XOY_SYM posibilităţile de a realiza imagini prin simetrie.Pentru fractalul Julia în meniul de definire:

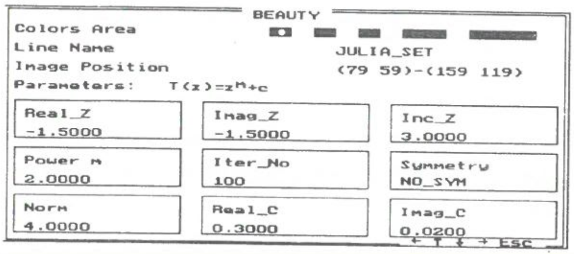

Figura 2

Apar suplimentar parametrii numerici Real_C şi Imag_C ce pot fi editaţi similar la fractalul Mandelbrot.

Pe tot parcursul afişării meniurilor de definire a fractalilor prin tasta F_1 se afişează într-o fereastră distinctă un help paginat. Terminarea afişării se face prin tasta ESC.

Pe baza unor experimentări extensive se pot stabili câteva constatări:

- imaginile sunt deosebite, astfel încât s-ar putea afirma că asistăm la o feerie de culori;

- modificând dimensiunile zonei de afişare pe ecran a fractalilor, imaginea fractalului se va alungi sau lăţi după caz;

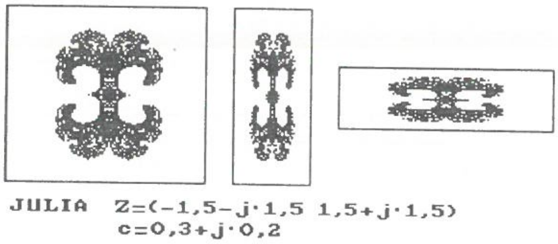

Figura 3

- tot prin modificarea zonei de afişare, dar, în mod proporţional, conţinutul imaginii nu se va modifica, realizându-se o expandare sau o comprimare a imaginii;

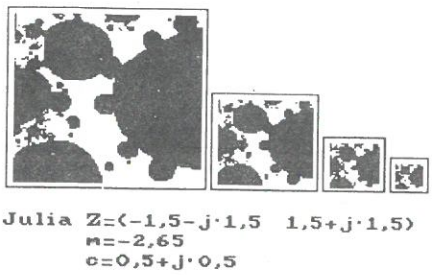

Figura 4

- creşterea numărului de iteraţii conduce la o rarefiere şi o fragmentare a fractalului;

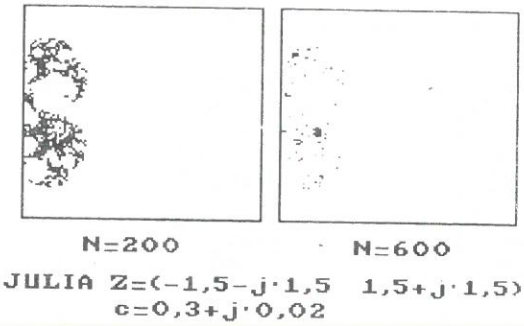

Figura 5

- referitor la restricţiile de convergenţă în normă, efectul creşterii valorii limită a normei duce la migraţia spre dreapta a culorilor şi la îngroşarea zonelor de aceeaşi culoare;

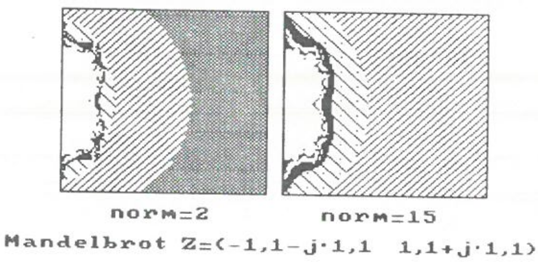

Figura 6

- pentru puterea m întreagă pozitivă imaginea pare a avea un număr de lobi majori egal cu [m/2], orientaţi faţă de centrul imaginii cu acelaşi unghi la centru; presupunerea este mai îndreptăţită cu cât m este mai mare;

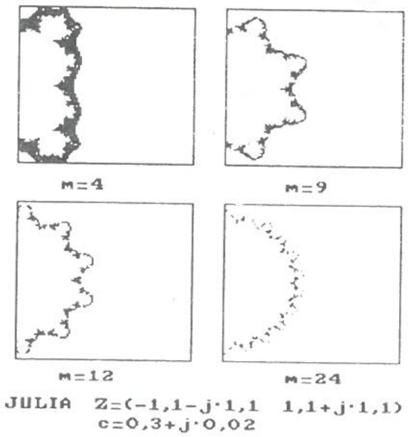

Figura 7

- pentru puterea m întreagă negativă imaginea pare a avea forma unei structuri planetare cu un număr de sateliţi majori egal cu [(1-m)/2] orientaţi simetric faţă de centrul imaginii.

În jurul fiecărui satelit există o zonă difuză, care, pe măsură ce m scade, este mai redusă.

Influența părții zecimale a puterii m este redusă.

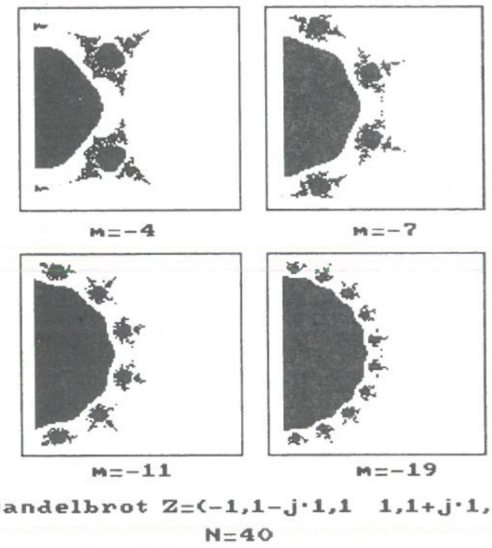

Figura 8

Instrument deosebit de ușor de utilizat, pachetul de programe EDITEH oferă o arie largă de explorare a mirificii lumi a formelor și culorilor, lumea fractalilor neliniari Mandelbrot și Julia.

4.Fractalii poligonali

Acești fractali sunt în primul rând o expresie a formei și mai puțin a culorii.

O primă clasă de astfel de fractali o reprezintă figuri geometrice, obținute pornindu-se de la o line poligonală primară.

În esență, generarea acestor fractali constă în a înlocui fiecare segment din linia poligonală cu o altă linie poligonală, procesul repetându-se până când lungimea unui segment din linia poligonală, supusă transformărilor, devine mai mică decât o limită impusă.

În funcție de modul cum generăm o linie poligonală ce înlocuiește un segment, vom distinge două tipuri de fractali: **fractali stocastici**, în care linia poligonală este generată pseudoaleatoriu, și **fractali regulați sau liniari,** când linia poligonală este generată determinist după unul sau mai multe modele.

O a doua clasă de fractali poligonali o reprezintă fractalii obținuți prin suprapunerea, în interiorul unei suprafețe rectangulare a unor curbe generate cu ajutorul unor modele. Acest lucru se realizează pe mai multe niveluri, curbele de ordinul **k** fiind generate din curbele de ordinul **k-1**. Din acest punct de vedere acești fractali, fractalii Hilbert, sunt bidimensionali.

4.1. Fractalii stocastici

Algoritmul de generare este următorul:

1. Se stabilește **rezoluția**, adică lungimea minimă între două puncte sub care nu se mai aplică **procedura de** generare;
2. se stabilește linia poligonală primară;
3. se apelează **procedura de generare** între două puncte succesive, care produce cu capetele în cele două puncte succesive o nouă linie poligonală;
4. se trece la următoarea pereche de puncte.

Procedura de generare pentru două puncte este următoarea:

A. se compară distanța dintre cele două puncte cu **rezoluția**. Dacă este mai mare se fac următoarele acțiuni:

A1. se împarte segmentul dintre cele două puncte în **nr_inter** puncte intermediare folosindu-se o **funcție** aleatoare;

A2. pentru fiecare punct astfel obținut, pe perpendiculara la segment în acel punct se alege un punct la o distanță aleatoare între anumite limite (± distanța maximă de căutare) și într-un sens aleatoriu;

A3. între fiecare pereche de puncte succesive astfel obținute:

A3.1. se apelează procedura de generare;
A3.2. se trece la următoarea pereche de puncte.

B. se trece la următoarea pereche de puncte.

Referitor la funcția aleatoare, am ales o funcție foarte simplă și rapidă, preluată din biblioteca IMSL: se pornește de la valoarea conținută în variabila **Seed**, care este multiplicată cu un factor mfac = 7^5 modulo (2^{31} - 1) și apoi rememorată. Valoarea oferită de funcție este în intervalul (0,1). Secvența de program este următoarea:

```
#define mfac 16807     //7^5
double cuv = 2147483647;   // 2^31 - 1
double seed;
double rando(void)
     {
               long cit;
               seed * = mfact;
               cit = seed / cuv;
               seed - = cit * cuv;
               return seed / (cuv + 1);
     }
```

Amănunte despre obținerea numerelor aleatorii se găsesc în [2].

Parametrii pentru acest tip de fractali sunt:

rez - rezoluția, distanța minimă sub care nu se mai aplică procedura de generare;
Dmax - distanța maximă până la care se determină punctul intermediar;
nr_inter - numărul de puncte intermediare în care se partiționează un segment;
const_stoch - valoarea cu care se inițializează variabila seed din funcția rando înaintea primului apel, oferind posibilitatea de a repeta aceeași cale.

Definirea acestor parametri în cadrul oferit de pachetul EDITEH se face într-un meniu de forma:

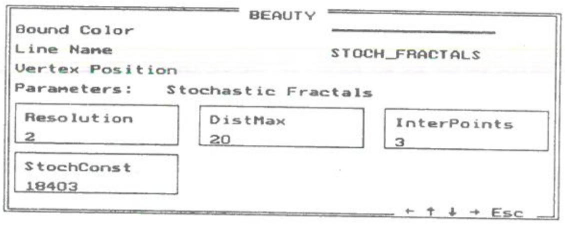

Figura 9

Modulul de editare a parametrilor numerici și a culorii de trasare este același cu cel prezentat anterior.

Cât privește parametrul Vertex_Position, printr-un editor specializat se definește interactiv linia poligonală primară. Sunt puse la dispoziție un meniu complet de funcții prin care se poate defini sau modifica ulterior linia poligonală primară: adăugare, înlocuire, parcurgere, inserare, ștergere vârfuri din listă, apoi simetrii față de dreapta și punct, translație, rotație, asemănare linie poligonală. Editarea este asistată de o funcție de zoom și una de help.

Exemplificăm acest fractal prin:

Figura 10

Acești fractali se pot utiliza foarte bine la simulări în domeniul topografic.

4.2 Fractalii liniari

Fractalii liniari reprezintă figuri geometrice, rezultate prin înlocuirea repetată a segmentelor unei linii poligonale primare cu unul sau mai multe modele stabilite anterior.

Deci, factorul caracteristic unui fractal liniar este modelul ce reprezintă elementul grafic utilizat repetabil. El este o linie poligonală predefinită și care va înlocui la scară segmentul dintre două puncte succesive ale liniei poligonale de bază.

Acest procedeu se poate repeta pe mai multe niveluri, iar pe fiecare nivel se poate alege un alt model.

Problema generării și utilizării acestor modele este rezolvată de pachetul de programe EDITEH într-un mod interactiv prin intermediul aceluiași meniu de funcții cu care se generează și linia poligonală primară. Pachetul de programe EDITEH oferă posibilitatea de a gestiona simultan un număr de 16 modele (fără ca acest număr să reprezinte o restricție), din care un prim grup de 5 modele sunt fixate, fiind prezentate mai jos:

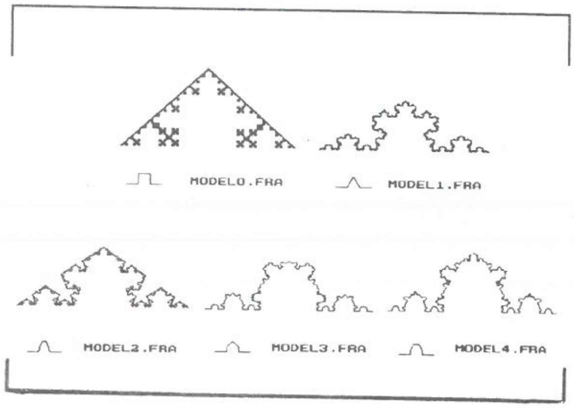

Figura 11

Un al doilea grup de 5 modele este definit dar poate fi modificat interactiv, iar un al treilea grup poate fi definit de utilizator.

Definirea unui fractal liniar constă în a stabili într-un meniu parametrii următori:

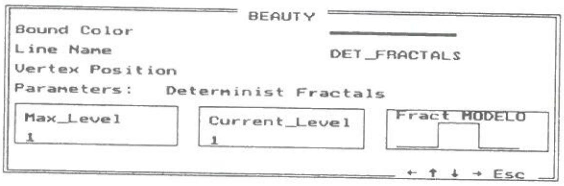

Figura 12

Parametrii Bound_Color și Vertex_Position au aceeași semnificație și se definesc la fel ca la fractalii stocastici. Parametrul Max_Level stabilește numărul de repetări dorit. Prin parametrii Current_Level și Model se alege modelul pe fiecare nivel.
Limita superioară pentru Max_Level este 5, această limită fiind suficientă pentru atingerea rezoluției ecranului.
Exemplificăm acest fractal:

Figura 13

generat pe linia poligonală primară în trei niveluri cu modele distincte: 3, 0, 1.

4.3 Fractalii Hilbert

Algoritmul de generare a acestor fractali este următorul:

1. se stabilește **ordinul** curbelor Hilbert;
2. se alege suprafața rectangulară unde vom genera fractalii;
3. se alege **modelul** ca element grafic primar;
4. se apelează procedura recursivă de generare.

Definirea unui fractal Hilbert constă în a stabili într-un meniu cu următorii parametri:

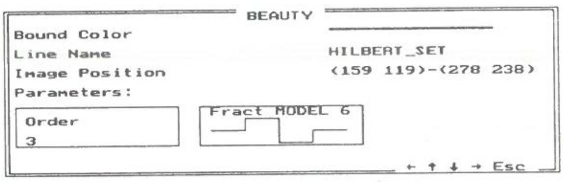

Figura 14

Parametrul Bound_Color reprezintă culoarea de trasare, iar parametrul Image_Position definește suprafața rectangulară utilizată.

Parametrul **Order** reprezintă numărul de suprapuneri ale curbelor Hilbert. Limita maximă stabilită pentru acest parametru este 5, aceasta fiind impusă de rezoluția ecranului.

Exemplificăm acest fractal prin:

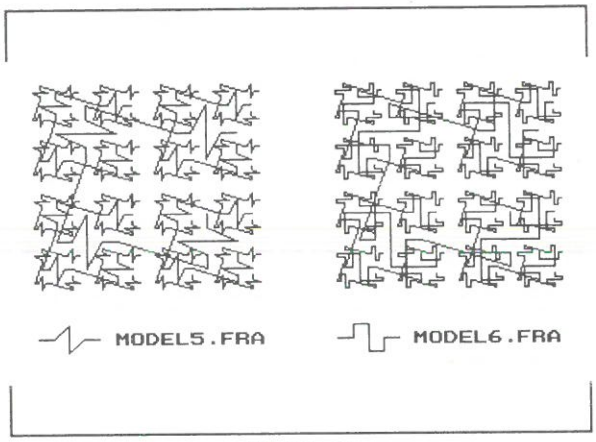

Figura 15

alături fiind **modelul** generator.

5. Concluzii

Dintre multiplele posibilități de obținere și de prezentare grafică ale fractalilor, am prezentat câteva dintre cele mai des întâlnite. Cele câteva comentarii referitoare la fractalii Mandelbrot și Julia au rezultat dintr-o intensă operație de experimentări. Pachetul de programe **EDITEH** s-a dovedit un instrument perfect adaptat cerințelor de lucru interactiv oferind largi posibilități de exprimare, atât în domeniul fractalilor, dar și în general în domeniul formelor și culorilor.

ANEXA 1

```
//
// pseudocod pentru fractalii MANDELBROT si JULIA
//
IF MANDELBROT
 BEGIN void mf(int x1,int y1,int x2,int y2,int inter,
double m,double rz,double iz,double dz,double norm)
 END
ELSE
 BEGIN void jf(int x1, int y1, int x2, int y2, int inter,
double m, double rz, double iz, double dz, double norm,
double rc, double ic)
 END
{
int col_area[12] = {DARKGRAY, YELLOW,
LIGHTBLUE, LIGHTGREEN,BROWN, LIGHTGRAY,
LIGHTCYAN, LIGHTRED, WHITE, BLUE, LIGHT
MAGENTA, GREEN};
 int i,j,k,p,l;
 double e,px,py,a,b,w,q,u,v,d,mod;
 p=m; e=m-p;    // partea întreagă şi zecimală a puterii
 px=dz/(x2-x1); // paşii de parcurgere domeniu complex
 py=dz/(y2-y1);
 a=rz;
 for(i=x1; i<=x2; i++)
   {
    b=iz;
    for(j=y1; j<=y2; j++)
      {
       k=0; mod=0;
  IF MANDELBROT
   BEGIN w=0; q=0; END
  ELSE
   BEGIN w=a; q=b; END
       while(k<iter && mod<norm)
         {
          if(w*w+q*q!=0)
            {
             u=1; v=0;     // calculul funcţiei
             l=p;
             while(l!=0)
               {
                d=u*w-v*q;
                v=v*w+u*q;
                u=d;
                if(p<0) l++; else l--;
               }
             if(p<0)
               {
                d=u/(u*u+v*v);
                v=-v/(u*u+v*v);
                u=d;
               }
             if(e!=0)
               {
                d=e/2.*log(w*w+q*q);
                q=e*atan2(q,w);
                w=exp(d)*cos(q);
                q=exp(d)*sin(q);
               }
             else
               {
                w=1; q=0;
               }
             d=u*w-v*q;
             q=v*w+u*q;
             w=d;
            }
  IF MANDELBROT
   BEGIN w+=a; q+=b; END
  ELSE
   BEGIN w+=rc; q+=ic; END
          mod=w*w+q*q;  k++;
         }
       l=getbkcolor();      // stabilire culoare pixel
       if(k<iter) l=col_area[k/(iter/12)];
       putpixel(i,j,l);
       b+=py;
      }
    a+=px;
   }
}
```

Bibliografie

1. DOGARU, D.: Elemente de grafică 3-D, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1988.
2. SIMA, V.: Metode în matematica aplicată, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1992.
3. MANDELBROT, B.B. : The Fractal Geometry of Nature Freeman, San Francisco, 1982.
4. FRAME, M., ROBERTSON, J.: A generalized Mandelbrot Set and the Role of Critical Points, Computer & Graphics, Pergamon Press, 1990, p.35
5. GUJAR, V.: Fractal Images in the Complex Plane, HAVSAR, C.B. Computer & Graphics, VANGALA, N. Pergamon Press, 1990, p.45
6. WIRTH, N.: Algorithms + Data Structures = Programs, Prentice-Hall Inc, 1976, p.130
7. * * *: Pachetul de programe EDITEH, Manual de prezentare şi utilizare, I.C.I., Bucureşti, 1993.
8. * * *: PC - Raport Calculatoare Personale, nr.17, Supliment Fractalia, Februarie, 1994.

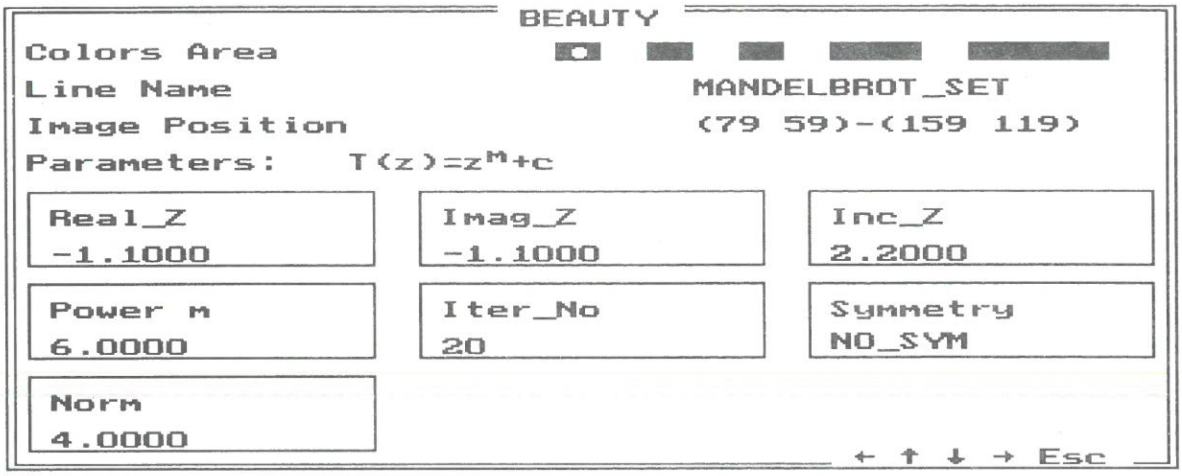

Figura 1

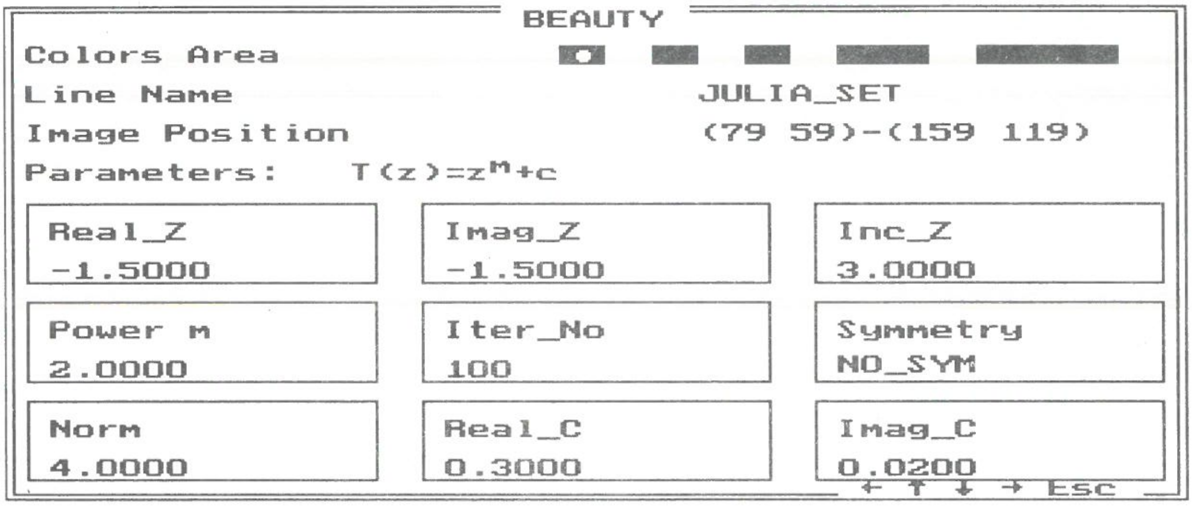

Figura 2