# UNELE REZULTATE ÎN PROGRAMAREA MATEMATICĂ ŞI POSIBILE APLICAŢII (II)*

**Dr. Vicenţiu Dumitru**
**Dr. Florica Luban**

*Academia de Studii Economice*
*Bucureşti*

**Rezumat:** În lucrare sunt trecute în revistă unele rezultate matematice obţinute de autori şi se sugerează posibile aplicaţii la rezolvarea unor probleme din tehnică sau economie.

**Cuvinte cheie:** identificarea sistemelor, programe matematică multicriterială, în condiţii de incertitudine şi în condiţii vagi, invarianta mulţimii punctelor Pacto optimale.

## Partea II:

Unele rezultate în programarea matematică şi posibile aplicaţii (II)

## 4. Asupra echivalenţei dintre programarea matematică în sens clasic, multicriterial şi în condiţii vagi

Fie $X \subset R^n$ domeniul de definiţie al unei probleme decizionale. Un scop vag în X este identificat cu o submulţime vagă în X, definită de:

$$\text{supp}\,\mu_0(x);\ \text{unde}\ \mu_0(x): X \to [0,1] \tag{4.1}$$

În mod similar se pot impune m restricţii vagi, date prin m submulţimi vagi în x, definite de funcţiile de apartenenţă:

$$\mu_i(x): X \to [0,1],\quad i = 1, \dots ,m \tag{4.2}$$

Bellman şi Zadeh în [2] numesc decizie optimală, în condiţii vagi pe X, soluţia problemei de maxmin:

$$\max_x \left\{\nu\,(x) \,\middle|\, x\in X\right\} \tag{4.3}$$

unde:

$$D(x)=\min\left\{\mu_0(x),\mu_1(x),\dots,\mu_m(x)\right\} \tag{4.4}$$

Noi vom numi problemă de programare matematică în condiţii vagi următoarea problemă vectorială:

$$\max_{x\in X} F(x)=\begin{bmatrix}\phi\left(\mu_0(x),\ \mu_1(x),\ ,\dots,\mu_m(x);\ p\right)\\ \mu_1(x)\\ \vdots\\ \mu_m(x)\end{bmatrix} \tag{4.5}$$

unde $\phi$, funcţie de $\mu_0(x), \mu_1(x), \dots ,\mu_m(x)$ şi de vectorul parametru p, este o funcţie de tip penalizare asupra funcţiilor care definesc restricţiile vagi.

Orice punct de optim Pareto sau punct nedominat al problemei (4.5) va fi considerat punct de optim al problemei de programare matematică în condiţii vagi.

Reamintim că un punct $x_F^*$ se numeşte punct Pareto optimal pentru problema de programare multicriterială

$$\max_{x\in X} F(x),\ \text{unde}\ F^T(x)=\left(f_1(x),\dots,f_k(x)\right): R^n \to R^k$$

unde F(x) este o funcţie vectorială superior semicontinuă pe mulţimea compactă $X \subset R^n$, dacă nu există $x' \in X$, $x' \neq x_F^*$ astfel că $F\left(x'\right) > F\left(x_F^*\right)$, semnul> având semnificaţia că $F\left(x'\right) > F\left(x_F^*\right)$ este echivalent cu $F\left(x'\right) \geq F\left(x_F^*\right)$ şi $F\left(x'\right) \neq F\left(x_F^*\right)$. Mulţimea punctelor Pareto optimale o vom nota cu P(F) şi este definită de

$$P(F)=\left\{x_F^*\in X \,\middle|\, x_F^*= \arg\max_{x\in X} F(x)\right\}$$

Pentru a justifica această definiţie trebuie să arătăm că ea generalizează definiţia deciziei optimale în sensul lui Bellman şi Zadeh şi, în plus, ea poate furniza optimal unei probleme clasice de programare matematică, adică a unei probleme în care scopul este optimal lui $\mu_0(x)$ pe supp $\mu_s(x)$ unde:

$$\mu_s(x)=\mu_1(x)\wedge\mu_2(x)\wedge \dots \wedge\mu_m(x) = \\ = \min\left\{\mu_1(x),\dots,\mu_n(x)\right\} \tag{4.6}$$

iar

$$\mu_i(x): X \to \{0,1\},\quad i = 1, \dots ,m \tag{4.7}$$

Prima cerinţă este imediată. Într-adevăr, dacă de exemplu, considerăm parametrii funcţiei de penalizare zero şi luăm $\phi(x) = \mu_0(x)$, se ştie că cel puţin o soluţie a problemei de maxmin PMM:

$$\max_x \left\{x_{n+1} \,\middle|\, x\in X, \mu_i(x)\geq x_{n+1},\ i= 0,1,\dots,m\right\} \tag{4.8}$$

este punct de optim. Pareto pentru problema vectorială (4.5).

Pe de altă parte, soluţia problemei (4.8) în $R^{n+1}$ este o soluţie a problemei de maxim definită de (4.3) şi (4.4) în $R^n$. Rezultă că dacă $\phi(x) = \mu_0$, prin rezolvarea problemei (4.5), în sensul determinării mulţimii punctelor eficiente, se obţin soluţiile decizionale optimale vagi Bellman-Zadeh. Mulţimea soluţiilor problemei (4.5) este însă, în general, mult mai bogată decât mulţimea soluţiilor problemei definite de (4.3) şi (4.4).

Problema determinării unor puncte eficiente pentru problema nelineară (4.5) este abordată în multe lucrări: [31], [37], [40]. Determinarea mulţimii tuturor punctelor eficiente pentru clase de probleme nelineare

* continuare din RRIA vol. 4, nr. 1/1994

este o problemă deschisă. Se cunoaşte, de exemplu [31], că dacă F(x) este concavă atunci prin maximizarea pe X a unei combinaţii convexe a componentelor lui F(x) se obţine un punct eficient al problemei (4.5). În [3] s-a arătat că în cazul programării cu variabile booleene, prin parametrizarea unei funcţii de agregare unicriteriale se pot obţine toate punctele eficiente ale problemei de programare multicriterială.

**Asupra programării matematice clasice în condiţii vagi**

Fie problema de programare matematică (PPM):

$$\min_x \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in X,\ g_i(x) \le 0,\ i=1,\ldots,m \right\} \tag{4.9}$$

unde $X \subset R^n$ este o mulţime nevidă compactă, iar f şi $g_i$ sunt continue pe X.

Fie

$$S_i = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, g_i(x) \le 0 \right\},\quad i=1,\ldots,m \tag{4.10}$$

atunci (4.9) se pot scrie:

$$\min_x \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in X \wedge S_1 \wedge \ldots \wedge S_m \right\} \tag{4.11}$$

În condiţiile date, chiar dacă $X \neq \varnothing$ problema (4.11) poate să nu aibă soluţie. În acest caz se caută o soluţie a problemei de programare matematică în condiţii vagi (PPMV), adică a problemei multicriteriale:

$$\max_{x \in X} F(x) = \begin{bmatrix} \phi(f(x),\ \mu(x);\ p\ ), \\ \mu_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \mu_m(x) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

unde $\mu(x)$ este vectorul de componente $\mu_i(x): x \to [0,1]$ $i = 1,\ldots, m$, funcţii continue pe X astfel încât

$$\begin{cases} 1 \text{ pentru } x \in S_i \\ < 1 \text{ pentru } x \notin S_i \end{cases} \tag{4.13}$$

Funcţia $\psi$ este o funcţie continuă pe X astfel încât, în cazul în care problema (4.9) are soluţie, problema (4.12), pentru anumite valori ale parametrilor $p_i$, să fie echivalentă cu problema (4.9). Pentru aceasta este necesar şi suficient ca soluţia problemei (4.14)

$$\max_{x \in X} \ \psi(f(x), \mu(x), p)$$

să coincidă cu soluţia problemei (4.9).

Condiţia este necesară. Dacă $\psi(f(x), \mu(x);p)$ îşi atinge maximul în afara domeniului admisibil al problemei (4.9) atunci problema (4.12) are soluţii (eventual o infinitate), care nu sunt soluţii ale problemei (4.9). Dacă $\psi$ îşiatinge maximul pe domeniul admisibil al problemei (4.9) atunci pentru echivalenţă este evident că acest maxim trebuie să coincidă cu maximul problemei (4.9).

Condiţia este suficientă. Dacă $\psi(f(x), \mu(x);p)$ este o funcţie care îşi atinge maximul pe doi=meniul admisibil al problemei (4.9), punctele din afara acestui domeniu nu sunt puncte de optim Pareto pentru (4.12), iar dintre punctele domeniului admisibil, datorită faptului că toţi $\mu$ sunt egali cu 1, singurele puncte de optim Pareto sunt cele care optimizează pe $\psi$. Dacă în plus maximul lui $\psi$ pe domeniul admisibil al problemei (4.9) coincide cu maximul problemei (4.9), fapt care are loc dacă, de exemplu, pe domeniul admisibil al lui (4.9), $\psi$ (x) diferă de f(x) printr-o constantă, atunci soluţia problemei (4.12) este şi soluţia problemei (4.9).

Rezultă că este suficient ca $\psi$ să fie o funcţie de penalizare /29/ pentru problema (4.9).

Exemple de astfel de funcţii de penalizare sunt:

$$\psi\ (x; p^0) = -f(x) + \sum_{i=1}^{m} p_i^0\ (\mu_i(x) - 1) \tag{4.15}$$

sau

$$\psi\ (x; p^0) = -f(x) + \sum_{i=1}^{m} p_i^0\ \ln \mu_i(x),\ \mu_i(x) > 0 \tag{4.16}$$

sau

$$\psi\ (x; p^0) = -t(x) + \sum_{i=1}^{m} p_i^0\ \exp(1/\mu_i(x) - 1) \tag{4.17}$$

$\mu_i(x) \neq 0,\ i=1,\ldots,m$

Dacă $\psi$ (x, $p^0$ ) definit de (4.15), (4.16) sau (4.17) este strict concavă pe mulţimea convexă X atunci soluţia de optim Pareto a problemei (4.12) dată de:

$$x^*(p^0) = \operatorname{argmax} \psi\ (x, p^0) \mid\ x \in X, \tag{4.18}$$

conform teoremei lui Everett /25/, este o soluţie a problemei de programare matematică:

$$\max_x \ \left\{ -f(x) \mid\ x \in X,\ \mu_i \ge \mu_i\ (x^*(p^0)), \right. \tag{4.19}$$

$i = 1,\ldots,m$

şi, evident, în cazul în care:

$$\mu_i(x^*\ (p^0)) = 1,\ i=1,\ldots,m \tag{4.20}$$

atunci $x^*(p^0)$ este soluţia problemei de programare matematică:

$$\max_x \ \left\{ -f_0(x) \mid\ x \in X,\ \mu_i \ge 1 \right\}, \tag{4.21}$$

În cazul în care:

$$\psi\ (x) = \mu_0(x) = \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{f(\bar{x}) - f(\underline{x})} \tag{4.22}$$

unde:

$$\bar{x} = \operatorname{argmax}\ (-f(x)) \mid\ x \in X, \tag{4.23}$$

$$\underline{x} = \operatorname{argmin}\ (-f(x)) \mid\ x \in X, \tag{4.24}$$

există soluţii maxmin Bellman-Zadeh obţinute cu ajutorul problemei definite prin (4.3) şi (4.4) sunt soluţii Pareto ale problemei (4.12), iar dacă, de exemplu:

$$\psi\,(x;p^0) = \mu_0(x) + \sum_{i=1}^{m} p_i^0\,\mu_i(x) \qquad (4.25)$$

sau

$$\psi\,(x;p^0) = \mu_0(x) + \sum_{i=1}^{m} p_i^0 \ln \mu_i(x), \qquad (4.26)$$

sau

$$\psi\,(x;p^0) = \mu_0(x) - \sum_{i=1}^{m} p_i^0 \exp(1/\mu_i(x)-1), \qquad (4.27)$$

atunci există p astfel încât soluţia max min a problemei (4.12) să fie o soluţie max min de decizie optimală vagă Bellman-Zadeh şi în acelaşi timp soluţia problemei (4.9), dacă această problemă are soluţii. Dacă $X \neq \varnothing$ problema multicriterială (4.12) are întotdeauna soluţii. În condiţiile enunţate problema (4.14) are, de asemenea, întotdeauna o soluţie care, dacă nu este soluţia problemei (4.9), este soluţia problemai (4.19). Aşa cum am mai făcut remarca, mulţimea soluţiilor problemei (4.12) este însă în general mai bogată.

În continuare vom analiza problema (4.9) în cazul când restricţiile problemei sunt relaxate.

Să presupunem că restricţiile problemei (4.9) definite de (4.10) devin:

$$S_{ri} = \{x \mid g_i(x)+r_iy_i \geq 0, y_i \geq 0, r_i > 0, i=1,...,m\} \qquad (4.28)$$

Numim problema relaxată ataşată problemei (4.9) problema (PMR):

$$\min_x \{f(x) \mid x \in X, g_i(x)+r_iy_i \geq 0,\ y_i \geq 0, r_i > 0, \qquad (4.29)$$
$$i=1,...,m$$

Dacă $y_i$ nu sunt supuşi la restricţii de mărginire superioară, problema PMR are întotdeauna soluţii care coincid cu soluţiile problemei:

$$\min_x \{f(x) \mid x \in X\} \qquad (4.30)$$

Problema relaxată PMR, definită de (4.29), ne permite definirea unei probleme de programare matematică vagă, într-un spaţiu (n+m) dimensional, dar cu avantajul că funcţiile de apartenenţă.

$$\mu_i = \mu_i(y_i), \quad i=1,...,m \qquad (4.31)$$

sunt funcţii de o singură variabilă, mai uşor de definit şi de interpretat.

Problema multicriterială de definiţie a deciziei vagi va fi:

$$\max_{z\in\{XxY\}\cap R} F(z) = \begin{bmatrix} \psi(\mu_0(x), & \mu(y), & p\ ) \\ \mu_1(y_1) \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \mu_m(y_m) \end{bmatrix} \qquad (4.32)$$

unde:

$$z^T = (x,y) \in R^{n+m} \qquad (4.33)$$

$$R = \{z_m \mid g_i(x) + r_iy_i \geq 0,\ i=1,...,m\} \qquad (4.34)$$

$$Y = \prod_{i=1} [0,\bar{y}_i] \qquad (4.35)$$

$$\underline{y}_i = \min_{x\in X}\ g_i(x) \qquad (4.36)$$

$$\bar{y}_i = -\min\{0, y_i\} \qquad (4.37)$$

iar vectorul $\mu(y)$ are componente funcţiile de apartenenţă

$$\mu_i(y_i) : [0,\bar{y}_i] \rightarrow [0,1],\ i=1,...,m \qquad (4.38)$$

Funcţiile $\mu_i(y_i)$ sunt funcţii descrescătoare de $y_i$ unde:

$$\mu_i(0) = 1,\ \ i=1,...,m \qquad (4.39)$$

Funcţia de apartenenţă $\mu_i(y_i)$ este definită de (4.22), (4.23) şi (4.24).

Funcţiile de apartenenţă pot fi definite în diferite moduri:

$$\mu_i(y_i) = 1-a_iy_i/\bar{y}_i,\ 0 \leq a_i \leq 1 \qquad (4.40)$$

sau

$$\mu_i(y_i) = -(1/y_i^{-2})\ y_i^2 + 1,\quad y_i \in [0,\bar{y}_i] \qquad (4.41)$$

sau

$$\mu_i(y_i) = -(1/y_i^{-2})\ -(2/y_i^{-2})\,y_i + 1,\quad y_i \in [0,\bar{y}_i] \qquad (4.42)$$

În paragraful precedent am arătat folosirea funcţiei de apartenenţă:

$$\mu_i(y_i;\alpha_i) = \alpha_i/(\alpha_i + y_i), y_i \in [0,y_i], \alpha_i > 0 \qquad (4.43)$$

pentru rezolvarea problemelor mixte întregi, a problemelor de tip cardinalitate şi am arătat cum aceste rezultate pot fi folosite pentru modelarea problemelor de programarea producţiei.

## 5. Asupra unor funcţionale monotone în optimizarea multicriterială. Probleme de invariantă.

Fie problema vectorială

$$\max_{x} \in X\ F(x)$$

unde $X \subset R^n$ este o mulţime compactă, iar $F(x)$ este un vector de funcţii continue $f_j(x)$: $X \rightarrow R$, $j=1,...,k$.

Aşa cum am menţionat o alternativă $x^* \in X$ se numeşte soluţie Pareto optimală (eficientă sau nedominată) în raport cu $F(x)$: $X \rightarrow R^k$, $(k > 1)$, dacă nu există $x' \in X$ cu $F(x') \geq F(x^*)$ şi $F(x') \neq F(x^*)$

Într-un caz special pentru luarea deciziilor în condiţii vagi în [2] Bellman şi Zadeh au definit funcţia de apartenenţă

$$\beta(x)=\mu(F(x))$$

unde

$$\mu(F(x)) = \min_{j=1,...,k} f_j(x)$$

$$f_j(x): X \rightarrow [0,1], \quad j=1,...,k$$

Fie $P_0^*(F(x)) = \left\{x_0^*=\arg \max_{x \in X} F(x)\right\}$, mulţimea tuturor soluţiilor de optim Pareto în raport cu $F(x)$ şi $P_1^*(F^T(x), \beta(x))=\left\{x_0^*=\arg \max_{x \in X} F(x), \beta(x))\right\}$, mulţimea tuturor soluţiilor Pareto optimale în raport cu $(F^T(x), \beta(x))$

În [19], [20] autorii au arătat că există o soluţie max-min Bellman-Zadeh, $x_\beta^*$ pentru problema $\max_{x \in X} \beta(x)$ astfel încât $x_\beta^* \in P_0^*(F(x))$ şi în plus

$$P_0^*(F(x)) = P_1^*(F^T(x), \beta(x))$$

adică mulţimea $P_0^*(F(x))$ rămâne invariantă faţă de adăugarea funcţionalei $\beta(x)$ la vectorul $F(x)$ al funcţiei obiectiv.

Pentru luarea deciziilor, în afară de criteriul Bellman-Zadeh, pot fi însă folosite şi alte criterii, ca de exemplu:

– Criteriul de regret minmax Savage-Niehans:

$$\min \sigma(F(x))=-\max_{x \in X} (-\sigma(F(x))),$$

unde

$$\sigma(F(x))=\nu(F^*-F(x)),$$

$$F_1^*=(f_1^*,...,f_k^*)^T,$$

$$f^*=\max_{x \in X} f_j(x), \quad j=1,...,k$$

şi $\nu$ este operatorul discret de maxim

$$\nu(F(x))=\max_{j=1,...,k} f_j(x)$$

– Criteriul Hurwicz

$$\min_{x \in X} \chi(x)=-\max_{x \in X}(-\chi(x)),$$

unde

$$\chi(x)=r_0\nu(F^*-F(x))+(1-r_0)\mu(F^*-F(x)),$$

cu

$$0 \leq r0 \leq 1,$$

iar $\nu(F(x)$ şi $\mu F(x)$ sunt definite mai sus.

- Criteriul Laplace

$$\max_{x \in X} \lambda(x)=-\min_{x \in X} (-\lambda(x))$$

unde

$$\lambda(x)=\frac{1}{k} < e,F(x) >,$$

cu

$e=(1,...,1)$ $<,>$ notând produsul scalar.

– O funcţie agregată (criteriul Laplace generalizat)

$$\max_{x \in X} \lambda_1(x)=-\min_{x \in X} (-\lambda_1(x))$$

unde

$$\lambda_1(x) = <r, \ F(x) >,$$

cu

$$r=(r_1,...r_k), \quad r_j \geq 0.$$

În cele ce urmează vom arăta că funcţionalele de mai sus aparţin unei clase de funcţionale care au aceeaşi proprietate de invarianţă Pareto ca şi funcţionala Bellman-Zadeh.

Să considerăm acum următoarele două probleme de programare matematică

$$\max_{x \in X} F(x) \tag{5.1}$$

şi

$$\max_{x \in X} F_+(x) \tag{5.2}$$

unde $F^T(x)=(f_1(x),...,f_k(x))$, $F(x):X \rightarrow y \subset R_k$, $(k>1)$, iar $F_+^T(x)=(F^T(x),\varphi(F(x))$, $F_+(x):X \rightarrow Y_+ \subset R^{k+1}$ este vectorul F(x) la care am adăugat a k+1 componentă, o funcţională continuă $\varphi$ (F(x)): $Y \rightarrow R$.

**Teorema 5.1** Fie

$$P^*(F)=\left\{x_F^*=\underset{x\in X}{\operatorname{argmax}}\ F(x)\right\}$$

mulţimea tuturor soluţiilor de optim Pareto pentru problema (5.1) şi fie

$$P^*(F_+)=\left\{x_{F+}^*=\arg\max_{x\in X}\ F_+(x)\right\},$$

mulţimea tuturor soluţiilor de optim Pareto pentru problema (5.2). Atunci:

$$P^*(F) \subset P^*(F_+) \qquad (5.3)$$

Dacă în plus $\varphi$ este izotonă, adică

$$F^1(x) \le F^2(x) \Rightarrow \varphi(F^1(x)) \le \varphi(F^2(x))(5.4) \qquad (5.4)$$

atunci

$$P^*(F)=P^*(F_+) \qquad (5.5)$$

**Demonstraţie.** Fie $x_F^* \in P^*(F)$ şi să presupunem că $x_F^* \notin P^*(F_+)$. Atunci, din definiţia soluţiei de optim Pareto, rezultă că există $x' \in X$ astfel încât

$$f_j(x')=f_j(x_F^*),\ j=1,...k \qquad (5.6)$$

$$\varphi(F(x')) > \varphi(F(x_F^*)) \qquad (5.7)$$

Dar (5.6) implică $\varphi(F(x'))=\varphi F(x_F^*))$ care contrazice (5.7). Deci $x_{F+}^* \in P^*(F_+)$ şi relaţia (5.3) este îndeplinită.

Pentru a demonstra egalitatea (5.5) este suficient să arătăm că, dacă $\varphi(F(x))$ este izotonă, atunci $P^*(F_+) \subset P^*(F)$.

Fie $x_{F+}^* \in P^*(F_+)$, şi să presupunem că $x_{F+}^* \notin P^*(F)$.

Atunci există $x' \in X$, astfel încât

$$f_j(x_{F+}^*) \le f_j(x'),\ j=1,...,k \qquad (5.8)$$

şi pentru cel puţin un indice $j_0 \in \{1,...,k\}$ avem

$$f_{j0}(x_{F+}^*) < f_{j0}(x') \qquad (5.9)$$

Ţinând cont de (5.4), inegalităţile (5.8) implică

$$\varphi(F(x_{F+}^*)) \le \varphi(F(x')) \qquad (5.10)$$

Dar (5.8), (5.9) şi (5.10) împreună contrazic definiţia lui $x_{F+}^*$. Deci $P^*(F_+) \subset P^*(F)$. Cele două incluziuni

$$P^*(F) \subset P^*(F_+)$$

$$P^*(F) \supset P^*(F_+)$$

implică

$$P^*(F) = P^*(F_+)$$

Teorema este demonstrată.

**Observaţie.** Teorema este valabilă şi pentru mulţimile

$$P_*(F) = \left\{x_{*F} = \arg\min_{x\in X}\ F(x)\right\}$$

şi

$$P_*(F_+) = \left\{x_{*F+} = \arg\min_{x\in X}\ F_+(x)\right\}$$

În continuare putem enunţa:

**Lema 5.1.** Funcţionalele $\beta(x)=\mu(F(x))$, $w(x)=\nu(Fx))$, $\lambda(x)=\frac{1}{k}<e,F(x)>, \lambda_1(x)=<r,F(x)>$ sunt funcţionale izotone în raport cu vectorul funcţiei F(x), iar $\sigma(x)=\nu(F^*-F(x))$ şi $\chi(x)=r_0\nu(F^*- F(x))+(1-r_0)*\mu(F^*-F(x))$, $0 \le r_0 \le 1$ sunt funcţionale antitone în raport cu F(x)). (**Notă**. O funcţională $\varphi$ este antitonă dacă $-\varphi$ este izolată).

**Demonstraţie.** Fie

$$F^1(x) \le F^2(x),\ F^1(x),F^2(x) \in Y \subset R^k \qquad (5.11)$$

Atunci $\mu(F^1(x)) \le f_j^1(x) \le f^2(x)$, pentru $j=1,...,k$ şi deci $\mu(F^1(x)) \le \mu(F^2(x))$.

Pentru funcţionalele $\nu(F(x))$ obţinem $\nu(F^2(x)) \ge f_j^2(x) \ge f_j^1(x)$, pentru $j=1,...,k$, deci $\nu(F_j^1(x)) \le \nu(F_j^2(x))$.

Evident (5.11) implică $\lambda(F^1(x)) \le \lambda(F^2(x))$ şi $\lambda 1(F^1(x))\, \lambda_1(F^2(x))$.

Deoarece (5.11) implică, de asemenea,

$$F^* - F^1(x) \ge F^* - F^2(x),$$

şi ţinând cont că $\mu(F(x))$ şi $\nu(F(x))$ sunt izotone în raport cu F(x), rezultă:

$$\mu(F^* - F^1(x)) \ge \mu(F^* - F^2(x)),$$

$$\nu(F^* - F^1(x)) \ge \nu(F^* - F^2(x)),$$

astfel că $\sigma(x)$ și $\chi(x)$ sunt funcționale antitone în raport cu F(x).

**Corolarul 5.1.** Ca o consecință a teoremei 5.1 și a lemei 1 avem următoarele egalități:

$$P^*(F(x))=P^*(F^T(x),\mu(F(x))=$$

$$=P^*(F^T(x),\nu(F(x)))=P^*(F^T(x),\lambda(F(x)))=$$

$$=P^*(F^T(x),\lambda_1(F(x)))=P^*(F^T(x),-\sigma(F(x)))=$$

$$=P^*(F^T(x),-\chi(F(x))).$$

**Corolarul 5.2.** Dacă $\varphi(F(x))$ este o funcțională continuă și izotonă de F, unde F este o funcție vectorială definită pe compactul X, atunci există cel puțin o soluție a problemei $\max_{x\in X}\varphi(F(x))$ care este o soluție Pareto optimală a problemei $\max_{x\in X} F(x)$.

În particular, există cel puțin o soluție a fiecăreia din următoarele probleme:

$\max_{x\in X} \mu(F(x))$(criteriul Bellman-Zadeh),

$\min_{x\in X} \nu(F(x))$(criteriul von Neumann-Wald),

$\max_{x\in X} \lambda_1(F(x))$(criteriul Laplace generalizat),

$\min_{x\in X} \sigma(F(x))$(criteriul Savage-Niehans),

← $\min_{x\in X} \chi(F(x))$(criteriul Hurwicz),

care este soluție Pareto optimală în raport cu F(x) pentru $x \in X$

Corolarul 5.2. este consecința teoremei, a lemei 5.1 și a următoarei leme.

**Lema 5.2.** Fie $P^*(F(x))$, mulțimea tuturor soluțiilor de optim Pareto a problemei vectoriale de maxim: $\max_{x\in X} F(x)$, și fie $\Omega_j^*=\left\{x_j^*=\arg\max_{x\in X} f_j(x)\right\}$ unde $X \subset R^n$ este o mulțime compactă, nevidă și fj(x), j=1,...,k sunt funcții continue pe X. Atunci $P^*(F(x))\cap\Omega_j^*\neq\emptyset$ pentru j=1,...,k.

În [23] problema invariației mulțimii soluțiilor Pareto optimale am generalizat-o la cazul operatorilor monotoni în sensul lui Collatz [7].

Avem următoarea **Teoremă 5.2.** Fie $F: R^n \to R^k$ o funcție vectorială superior semicontinuă pe mulțimea compactă $X \subset R^n$ și fie problema vectorială de determinare a mulțimii Pareto optimală $P(F)=\left\{x_F^*\in X \mid x_F^*=\arg\max_{x\in X} F(x)\right\}$.

Dacă $T:R^k \to R^m$ este un operator strict monoton în sensul lui Collatz, adică, dacă $F^1<F^2 \Rightarrow TF^1<TF^2$ și $P(TF)=\left\{x_{TF}^*\in X \mid x_{TF}^*=\arg\max TF(x)\right\}$, atunci $P(TF) \subseteq P(F)$. Dacă T este de tip strict monoton, adică dacă $TF^1<TF^2 \Rightarrow F^1<F^2$, atunci $P(TF) \supseteq P(F)$.

Rezultă că, dacă T este un operator strict monoton și de tip strict monoton, atunci P(TF) = P(F).

Este ușor de văzut că, dacă $\varphi(F(x)):R^k\to R$ este o funcțională istonă de funcția vectorială $F(x):R^n \to R^k$, atunci operatorul $T_+:R^k \to R^{k+1}$ definit prin

$$T_+F=F_+=(F^T(x), \varphi(F(x)))$$

este un operator strict izoton de tip strict izoton.

Rezultă că Teorema 5.1. este o consecință a teoremei 5.2.

Problema invariantei mulțimii soluțiilor Pareto optimale are, de asemenea, loc și în cazul în care asupra variabilelor problemei se aplică o transformare topologică, așa cum am arătat în comunicarea "On the Invariance of the Pareto Optimal Set under Bijective Maps" făcută la Passau SOR XII/1987, în sensul că o transformare bijectivă și bicontinuă transformă puncte Pareto optimale în puncte Pareto optimale. (24).

## O posibilă implicație a invariantei Pareto în luarea deciziilor

Să considerăm o societate condusă la momentul $t_i$ prin vectorul valorilor funcției $F_i(x, t_i) = (f_1(x, t_i), f_2(x, t_i),..., f_k(x, t_i))$ unde $x \in H$={mulțimea membrilor societății}, iar fj, j=1,...,k sunt funcții care măsoară diferite aspecte ale vieții populației, ca de exemplu: veniturile membrilor societății, educația, sănătatea etc. În raport cu $F_i(x)$ la momentul $t_i$ distingem în H mulțimea $P_i$, $P_i$ = {mulțimea membrilor din H, nedominați în raport cu $F_i$}.

Vom spune despre societate că este politic stabilă în perioada $\tau$ dacă $P_i=P_{i+1}$, pentru $t_i, t_{i+1} \in \tau$ . Din teorema de invarianță, rezultă că un guvern poate permite să se desfășoare în societate orice activitate al cărei rezultat se măsoară printr-o funcțională izotonă, în raport cu componentele actualului vector de funcții de decizie, fără teoremă că situația politică se va schimba. Mai mult, el poate introduce, pentru a convinge și atrage populația, o infinitate de astfel de obiective în viața societății.

Implicații asemănătoare pot fi considerate dacă F este vectorul caracteristicilor unui produs, iar problema de stabilitate este văzută în raport cu evoluția pe piață a produselor competitive.

În concluzie, pentru a schimba o situație, producătorul sau factorul de decizie trebuie să acționeze cu funcționalele neizotone.

## Bibliografie


1. AVENHAUS, R., BEEDGEN, R., CHERNANSKY, S.Y., ş.a.: Handling Uncertainties. In: Linear Programming Models, W.P. - 80 -170, ISASA, Laxenburg, Austria, 1980.
2. BELLMAN, R.E., ZADEH, L.A.: Decision-making in a fuzzy environment, Management Sci. (Appl. Ser), 1970, pp. 141-164.
3. BURKARD, R.E., KEIDING, H., KRARUP, J., PRUZAN, P.M.: Relationship between Optimality and Efficiency in Multicriterial 0-1, Math. Institut Universitat zu Köln, Report 80-10, Aug. 1980.
4. CABOT, V.: On the generalized lattice point problem and nonlinear programming, Operations Research vol.23 nr.3, 1975, pp. 565-571.
5. CHERNANSKY, S.Y.: Decision Making Under Uncertainty (O prinjaţii resheny v uslovijah neopredellnosty) In: Factor neopredellenosty pri prinjatii optimalnhy resheniy v bolsha systemak energetiki. Irkutsk, 1974, pp. 35-46.
6. CIOANU, GH., STOICA, M: Production Scheduling in Fuzzy Conditions, LCCE Preprint CO-13-1979, A.S.E. Bucureşti, 1979.
7. COLLATZ, L.: Functional Analysis and Numerical Mathematics, Academic Press, New York, 1966.
8. DANTZIG, G.B.: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1963.
9. DUMITRU, V., LUBAN, FL., MOGA, S., SERBAN, R.: Nonlinear Programming, Algorithms, Programms, Numerical Results. Appendix P with Fl. Luban, S. Moga, R. Serban. (Programare nelineară, algoritmi, programe, rezultate numerice. Appendix în colaborare cu Fl. Luban, S.Moga, R.Serban), Bucureşti, Editura Academiei Române, 1975, pp. 208.
10. DUMITRU, V.: Conjugate Direction Method, Hessian Approximation and a New Class of Mixed Algorithms for Optimization, Econ. Comput. Econ. Cybern. Stud. Res. 1975, No.2, pp. 39-53.
11. DUMITRU, V., LUBAN, FL.: Funcţii de apartenenţă şi unele modele de programare matematică cu aplicaţii în programarea producţiei, LCCE Preprint CO-15-79, A.S.E., Bucureşti, 1979.
12. DUMITRU, V., LUBAN, FL.: Asupra unor modele neconvexe de programare matematică. LCCE Preprint, CO-28-79, A.S.E.
13. DUMITRU, V., LUBAN, FL.: Modele de programare cu variabile reale pentru probleme discrete sau mixte. În studii şi cercetări de calcul economic şi cibernetică economică, Nr.2, 1980.
14. DUMITRU, V., LUBAN, FL.: Asupra unor modele de programare matematică cu funcţii obiectiv neliniare şi coeficienţii inexacţi, LCCE Preprint MMM - 5 - 81.
15. DUMITRU, V., LUBAN, FL.: Mathematical Programming Real Variable Models for Integer and Mixed-Integer Problems and Some Applications to Production Scheduling. In Mathematica Cluj-Napoca, 1981, vol.23, nr.46, pp. 11-23.
16. DUMITRU, V., LUBAN, FL.: Membership Functions, Some Mathematical Programming Models and Production Scheduling. In Fuzzy sets and systems No.8, 1982, pp. 19-33.
17. DUMITRU, V., LUBAN, FL.: A Nongradient Algorithm with Final Newtron Moves. In Methods of Operations Researchs, nr.49, pp. 17- 27, 1985.
18. DUMITRU, V., LUBAN, FL.: Approximation and Optimization Using Values. In Procendings of the Colloquium on aproximation and optimization, Cluj-Napoca, October 25-27, 1984, pp. 229-239.
19. DUMITRU, V., LUBAN, FL.: On the Fuzzy and Multicriterial Mathematical Programming. Methods Operations Reserches No. 53, 1986, pp. 57-66.
20. DUMITRU, V., LUBAN, FL.:On Some Optimization Problems under Uncertainty. In Fuzzy Sets and Systems No. 18, 1986, pp. 237-272.
21. DUMITRU, V., LUBAN, FL.: On the Monotone Functionals im Multicriteria Optimization. In Econ. Comput. Econ. Cybern. Stud. Res. 1987, No. 1, pp. 77-83.
22. DUMITRU, V., LUBAN, FL.: On the Pareto Invariance of Some Decision Functionals. Methods Operations Researches, No. 57, 1987, pp. 3-10.
23. DUMITRU, V., LUBAN, FL.: Monotone Operators and Pareto Invariance in Multicriteria Optimization. In Proceedings of the XIII. Symposium on Operations Research, Paderbon 1988, in methods of Operations Research 60, Verlag Anton Hain, Frankfurt am Main 1990.
24. DUMITRU, V., LUBAN, FL.: On the Invariance of the Pareto Optimal Set. In curs de apoziţie în Computer Science i. of Moldova.
25. EVERETT, N.: Generalized Lagranger Multiplier Method for Solving Problem of Optimum Allocation of Resources. In: Operations Researches, No. 11, 1963, pp. 399-417.
26. ESOGBUE, A.O., BELLMAN, R.E.: Fuzzy Dynamic Programming and its Extensions. In: TIMS/Studies in the Management Sciences, No. 20, 1984, pp. 147-167.
27. FALK, J.E., SOLAND, R.M.: Algorithm for Separable non-Convex Programming Problems, Management Science, No. 15, 1969, pp. 550- 569.
28. FALK, J.E.: Exact Solutions of Inexact Linear Programms, In: Operations Research, Vol. 24, No. 4, July-Aug - 1976, pp. 783-787.
29. FIACCO, A.V., McCORMICK, G.P.: Nonlinear Programming Sequential Unconstrained Minimization Techniques, John Wiley, 1968.
30. GLOVER, P., KLINGMAN, D.: The Generalized Lattice - Point Problems. In: Operations Research, Vol. 21, 1973, pp. 141-155.

31. **KARLIN, S.**: Mathematical Methode and Theory in Games Programming and Economics, Addison-Wesley, Reading,U.S.A. 1959.
32. **LORIE, J.H., SAVAGE, L.T.**: Three Problems in Rationing Capital, J. Business, pp.229-239, 1955.
33. **LUBAN, FL., DUMITRU, V.**: Asupra repartizării producţiei pe maşini prin programare matematică. In: Studii şi cercetări de calcul economic şi cibernetică economică, Nr. 4, 1979.
34. **LUBAN, FL.**: Programarea producţiei la o secţie de electrozi de sudură, prin programare matematică. În: Studii şi cercetări de calcul economic şi cibernetică economică, nr. 1, 1980.
35. **LUBAN, FL., DUMITRU V.**:Theorems for Linear Approximation of Some Nonconvex Production Programming Models. In Proceedings of the fifth European Meeting on Cybernetics and Systems Research, Vienna, 8-11 April, 1980, Hemisphere Publishing Corporation, Washington DC, 1982, pp. 361-365.
36. **LUBAN, FL.**: Modele de optimizare a activităţilor economice din metalurgie. Teză de doctorat, ASE, Bucureşti, 1980.
37. **MARUSCIAC, I.**: Metode de rezolvare a problemelor de programare neliniară, Editura Dacia, Cluj, 1973.
38. **NEGOIŢĂ, C.V., SULARIA, M.**: On Fuzzy Mathematical Programming and Tolerance in Planning. Econ, Comp, Ec. Cybern. In: Studi. Res, No.1, 1976, pp. 3-15.
39. **SOYSTER, A,L.**: Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexacte Linear Programming, Operations Research, Vol.21, No. 5, 1973.
40. **STANCU-MINASIAN, I.M.**: Programarea stocastică cu mai multe funcţii obiectiv. Editura Academiei României, Bucureşti, 1980.
41. **TANAHASKI, K., LUENBERGER, D.**: Cardinality - Constrained Linear Programming, Stanford University, 1971.
42. **WIRTZER, A.D., CHERNANSKY, S.Y.**: On Search for Optimal Strategies for Economic System Development under Uncertainty,(In Systemnyi analiz i perspectivnoe planirovanie), Moscow, Computer Centre of the Academy of Sciences of USSR, 1973, pp. 209-217.
43. **WEINGARTNER, H., MARTIN, H.**: Capital Budgeting of Inserrelated Projects: Survey and Synthesis, in Managerial economics, G.P.E. Clarkson Ed., Penguin Books, Baltimore SUA, 1968.
44. **ZIMMERMANN, M.J.**: Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions. In Fuzzy sets and Systems No.1, 1978, pp. 44-45.