MULȚIMI FUZZY. ASUPRA UNEI METODE DE GENERARE A GRADELOR DE APARTENENȚĂ

ing. Leon Bațachia

Institutul de Cercetări în Informatică

Rezumat: Noțiunea centrală în sistemele fuzzy (înglobând în sistem fuzzy conceptele care țin atât de mulțimile fuzzy, cât și de logica fuzzy) este aceea că valorile de adevăr (în cazul logicii fuzzy) sau apartenența la o mulțime (în cazul mulțimilor fuzzy) sunt indicate prin valori în intervalul [0,1]. În cadrul teoriei mulțimilor fuzzy, nu se prezintă niște reguli formale generale pentru stabilirea gradelor de apartenență. Teoria mulțimilor fuzzy propune metode formale de operare cu aceste grade de apartenență după ce ele au fost stabilite într-un anume mod. Apare astfel justificat orice demers menit să stabilească o procedură de generare a acestor valori. În cadrul acestui articol, plecând de la imaginarea unui experiment, se deduce o metodă posibilă de determinare a gradelor de apartenență pentru diferite clase de mulțimi fuzzy.

Cuvinte cheie: mulțimi fuzzy, grade de apartenență, variabile lingvistice, metode de determinare a gradelor de aparteneță.

1. Introducere

Logica fuzzy, una din dezvoltările majore ale teoriei mulțimilor fuzzy, a fost construită pentru a reprezenta o anumită formă de cunoștințe și pentru a raționa cu aceste cunoștințe de formă particulară.

Motivația implicită a fost aceea că manipularea acestor cunoștințe, exprimate într-o formă lingvistică sau verbală de genul: "X este înalt" sau "Y este roșu", să nu fie doar un exercițiu intelectual, ci operarea cu acest tip de cunoștințe să devină pe deplin posibilă la nivelul calculatoarelor.

În 1965 A. Zadeh publica celebrul articol intitulat "Fuzzy Sets" [8] în care descria matematica mulțimilor fuzzy și, prin extensie, logica fuzzy.

Noțiunea centrală în sistemele fuzzy (înglobând în sistem fuzzy conceptele care țin atât de mulțimile fuzzy, cât și de logica fuzzy) este aceea că valorile de adevăr (în cazul logicii fuzzy) sau apartenența la o mulțime (în cazul mulțimilor fuzzy) sunt indicate prin valori în intervalul [0,1].

Autorul nu-și propune să facă în acest articol o prezentare a istoricului și a fundamentelor logicii fuzzy, dar se poate semnala faptul că, de-a lungul timpului, au existat mai multe propuneri de sisteme logice nebivalente (unele chiar având originea în Grecia antică) care să generalizeze logica bivalentă fundamentată de Aristotel și filozofi precedesori lui.

Aceste propuneri de sisteme logice nebivalente au fost făcute atât înainte, cât și după publicarea celebrului articol al lui Zadeh, dar se pare că teoria logicii fuzzy și a mulțimilor fuzzy din care derivă de fapt, rămâne cea mai intuitivă dintre ele.

2. Mulțimi fuzzy

În teoria mulțimilor fuzzy, mulțimile "normale", în accepțiunea tradițională, se numesc mulțimi "crisp", adică bine determinate, pentru a le deosebi de mulțimile fuzzy.

Fie U o mulțime de obiecte, numită univers, ale cărui elemente generice se notează cu u. Apartenența la o submulțime crisp C a lui U este văzută ca o funcție caracteristică μ_C: U $\rightarrow$ {0,1}, definită astfel:

$$\mu_C(u)=\begin{cases}1, & u \in C \\ 0, & u \notin C\end{cases}$$

În cazul unei submulțimi fuzzy F, funcția caracteristică este generalizată la o funcție de apartenență cu valori în intervalul [0,1]. Deci μ_F: U $\rightarrow$ [0,1], și μ_F(u) reprezintă gradul de apartenență al lui u la F. Cu cât este mai aproape de 1 valoarea μ_F(u), cu atât mai mult u aparține lui F.

F este complet determinată de mulțimea de perechi de forma:

$$F=\{(u, \mu_F(u)) \mid u \in U\}.$$

Pentru a clarifica și mai mult lucrurile trebuie adăugate la cele spuse până acum unele remarci. Primele 2 remarci sunt sintetizate din [2].

Remarca 1. Grade de apartenență precise nu există prin ele însele, ci este vorba mai degrabă de indicatori asignați în mod subiectiv de către un individ sau un grup de indivizi. Astfel, dintr-un punct de vedere psihologic, gradul de apartenență nu este un obiect primitiv. El doar reflectă o ordonare a obiectelor din universul de discurs, indusă de către proprietatea asociată cu F, de exemplu, proprietatea *înalt*. Această ordonare, atunci când există, este mai importantă chiar decât înseși gradele de apartenență.

Remarca 2. Gradele de apartenență nu sunt definite în mod absolut, ci sunt dependente de context în cele mai multe cazuri. De exemplu, un om de înălțime precizată, să zicem 1,75 m, poate fi clasificat ca fiind înalt de un italian, dar cu greu poate fi clasificat astfel de un suedez sau un nordic, în general, știut fiind că nordicii sunt obișnuiți să vadă în jurul lor oameni de statură mai impunătoare.

O altă remarcă importantă care trebuie făcută şi care justifică în cea mai mare măsură demersul din cadrul acestui articol, este următoarea:

Remarca 3. Teoria mulţimilor fuzzy nu prezintă nişte reguli formale, generale pentru stabilirea gradelor de apartenenţă în cazul unei mulţimi fuzzy F. Mai precis, dată fiind $F=\{(u, \mu_F(u)) \mid u \in U\}$, nu există o procedură formală, care să asocieze pentru $u \in U$, valoarea $\mu_F(u)$. De fapt, argumentul principal pentru o anumită asociere este reprezentat de considerente de natură intuitivă. Teoria mulţimilor şi a logicii fuzzy propune metode formale de operare cu aceste valori, după ce acestea au fost stabilite într-un anume mod.

Această ultimă remarcă justifică încercările de a găsi metode de determinare a gradelor de apartenenţă care, în conjuncţie cu metode formale de operare asupra acestor valori, să poată furniza o modalitate de transfer a exerciţiului intelectual de tipul celui menţionat la începutul articolului, de la nivelul fiinţei umane la nivelul calculatorului. Desigur, aceste metode pentru determinarea gradelor de apartenenţă ar trebui să aproximeze cât mai bine modul în care omul este capabil să înveţe din experienţă şi să-şi folosească intuiţia pentru "fixarea" acestor valori, ceea ce face ca omul să raţioneze cu uşurinţă asupra unor cunoştinţe de tipul "Viteza maşinii este mare" sau "Temperatura corpului este ridicată".

Un concept important legat de teoria mulţimilor fuzzy este acela de variabilă lingvistică. O variabilă lingvistică este o variabilă care ia ca valori cuvinte din limbajul natural cu înţeles vag (de obicei adjective). În propoziţiile de mai sus, "viteza maşinii" şi "temperatura corpului" sunt variabile lingvistice, iar "mare" şi respectiv "ridicată", sunt valori pentru aceste variabile lingvistice. Alte valori posibile pentru variabila lingvistică "viteza maşinii" pot fi de exemplu: "aproape zero", "mică", "medie", "excesiv de mare".

Valorile variabilelor lingvistice sunt descrise cu ajutorul mulţimilor fuzzy.

În cartea lor, apărută în 1980, *Fuzzy sets and Systems: Theory and Applications*, Dubois şi Prade [3] intitulează unul din capitolele cărţii cu titlul: *De unde vin "ele"?* ; "ele" fiind desigur funcţiile de apartenenţă.

În carte se exemplifică o multitudine de abordări întâlnite în literatură până la acea dată, privind estimarea funcţiilor de apartenenţă care caracterizează mulţimile fuzzy.

Între timp, în literatură au fost propuse şi alte metode de generare a funcţiilor de apartenenţă.

Printre metodele propuse de-a lungul timpului, şi care nu vor fi detaliate în acest articol, se pot enumera: exemplificarea (Zadeh 1972 [9]), diferite metode statistice (Hersh şi Caramazza 1976 [5], Civanlar şi Trussell 1986, [1]), preferinţe relative (Saaty 1974, [7]), metode parametrice (Kuz'min 1981 [6]).

În prezentul articol, autorul îşi propune, plecând de la un experiment imaginar, să poată deduce o procedură de determinare a valorilor unei funcţii de apartenenţă μ_F pentru o mulţime fuzzy F.

Desigur că şi în cazul acestei metode ca şi în cazul altor metode propuse pentru determinarea funcţiilor de apartenenţă, funcţiile generate nu sunt în general utilizabile în aplicaţiile practice bazate pe logică fuzzy, fără ajustări rezultate din testare. Ajustările se referă la forma finală a graficului unei funcţii de apartenenţă şi localizarea regiunii vagi corespunzătoare valorii unei variabile lingvistice considerate.

3. Descrierea experimentului

Se consideră o urnă U care conţine n bile, notate cu $u_1,\ldots u_n$. Fiecare bilă u_i are înscrisă o valoare distinctă, notată $v(u_i)$. Se descrie un experiment de extragere a bilelor din urnă, una câte una, în urma căruia se obţin două mulţimi disjuncte S şi T. Aceste mulţimi conţin valori ale bilelor. Mulţimea S conţine k elemente şi mulţimea T, n-k elemente. Reuniunea celor două mulţimi conţine toate valorile bilelor care se aflau în urnă.

S va conţine elementele "mai mici" şi T elementele "mai mari". Altfel spus, dacă se notează

$S=\{a_i\}\ 1 \le i \le k$ şi $T=\{b_j\}\ 1 \le j \le n-k$

există

$a_i < b_j$ pentru oricare i,j cu $1 \le i \le k;\ 1 \le j \le n-k$.

Pe baza unei terminologii aleasă ad-hoc se va spune că mulţimea S este din clasa $\mathcal{S}$ (*short*) şi mulţimea T este din clasa $\mathcal{T}$(*tall*).

Fie $x_1, \ldots, x_n$ valorile ordonate înscrise pe cele n bile. Atunci:

$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$.

În urma experimentului se obţine:

$S=\{x_i\}\ 1 \le i \le k$ şi $T=\{x_i\}\ k+1 \le i \le n$.

Pe scurt, experimentul constă din următorii paşi:

Pas 0. iniţializări: $S=\varnothing$; $T=\varnothing$; urna *U* conţine n bile.
Pas 1. se extrage aleator o bilă u_1 din *U*. Aleator se atribuie uneia şi numai uneia din mulţimi valoarea $v(u_1)$ notată v_1. (Deci, după acest pas, se va obţine fie $S=\{v_1\}$ şi $T=\varnothing$, fie $T=\{v_1\}$ şi $S=\varnothing$);

.

.

.

Pas p. ($1<p\leq n$): Se extrage aleator u din U.
   <u>dacă</u> $v(u)>v_1$
      <u>atunci</u> $T=T\cup\{v(u)\}$
   <u>altfel</u> $S=S\cup\{v(u)\}$.

Se repetă experienţa descrisă mai sus de N ori şi se notează S_k şi T_k mulţimile de clasă $\mathcal{S}$ respectiv $\mathcal{T}$ care se obţin la experienţa k.

Se vor obţine în urma celor N experienţe şirurile de mulţimi:

$S_1, S_2, \ldots S_N$ şi $T_1, T_2, \ldots T_N$

Fie x_i o valoare oarecare din şirul ordonat crescător de valori ale bilelor. Se notează cu $f_S(x_i)$ frecvenţa de apariţie în aceste experimente a lui x_i în şirul de mulţimi $S_1, S_2, \ldots, S_N$, adică frecvenţa de apariţie într-o mulţime de clasă $\mathcal{S}$ şi cu $f_T(x_i)$ frecvenţa de apariţie a lui x_i în şirul $T_1, T_2, \ldots, T_N$, adică frecvenţa de apariţie a lui x_i într-o mulţime de clasă $\mathcal{T}$. Fie χ_{Sk} funcţia caracteristică a mulţimii S_k, $1\leq k\leq N$.

Astfel:

$$f_S(x_i) = \sum_{k=1}^{N} \chi_{Sk}(x_i)/N$$

şi

$$f_T(x_i) = \sum_{k=1}^{N} \chi_{Tk}(x_i)/N;$$

Pentru un număr de experimente foarte mare, $(N\rightarrow\ )$ $f_S(x_i)$ devine probabilitatea ca în cadrul unui experiment, x_i să "cadă" într-o mulţime S de clasă $\mathcal{S}$

$$f_S(x_i) = p(x_i\in S) = \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{n-i}{n}$$

(situaţiile în care x_i va intra în mulţimea S sunt acelea în care fie că bila cu valoarea x_i este extrasă prima şi această valoare este "aruncată" în S, fie că una din cele n-i bile având valori mai mari decât x_i este extrasă prima)

În mod similar se poate calcula şi

$$f_T(x_i) = p(x_i\in T) = \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{i-1}{n}$$

Evident, se verifică faptul că $p(x_i\in S) + p(x_i\in T) = 1$ existând doar două evenimente posibile la fiecare nouă extragere de bilă: $x_i\in S$ sau $x_i\in T$.

4. Observaţii legate de experiment

Se calculează $p(x_i\in S)$ şi $p(x_i\in T)$ pentru $1\leq i\leq n$. Următorul pas care se face este acela de a **postula** că aceste valori obţinute probabilistic sunt tocmai valorile gradelor de apartenenţă ale elementelor x_i la mulţimea S respectiv T. Cu această presupunere avem:

$\mu_S(x_i) = p(x_i\in S)$ respectiv $\mu_T(x_i) = p(x_i\in T)$ $1\leq i\leq n$.

Cu alte cuvinte, se poate considera că orice mulţime din clasa $\mathcal{S}$, obţinută în urma unui experiment ca cel descris anterior, fie aceasta S, este o mulţime fuzzy şi anume:

$S=\{(x, \mu_S(x)) \mid x\in X\}$ cu $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ şi μ_S definit ca mai sus.

Similar, orice mulţime T din clasa $\mathcal{T}$ este o mulţime fuzzy:

$T=\{(x, \mu_T(x)) \mid x\in X\}$ cu μ_T definit ca mai sus.

Fie π_1, π_2 distribuţiile definite astfel

$$\pi_1: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{pmatrix} \qquad \pi_2: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix}$$

unde s-au notat pentru simplitate $s_i = \mu_S(x_i) = p(x_i\in S)$ şi $t_i = \mu_T(x_i) = p(x_i\in T)$. Se observă că π_1 şi π_2 nu sunt distribuţii de probabilitate deoarece, în general,

$$\sum_{i=1}^{n} p(s_i) \neq 1 \text{ şi } \sum_{i=1}^{n} p(t_i) \neq 1.$$

Într-adevăr, se obţine:

$$\sum_{i=1}^{n} p(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{i-1}{n}\right) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{1}{2} + \frac{n(n-1)}{2n} = \frac{n}{2} \neq 1 \text{ pentru}$$

$n\neq 2$. Şi similar, se calculează $\sum_{i=1}^{n} p(s_i) = \frac{n}{2}$.

O altă observaţie este aceea legată de faptul că gradele de apartenenţă astfel determinate pentru o mulţime fuzzy din clasa $\mathcal{S}$ sau clasa $\mathcal{T}$ nu depind decât de n şi i, adică de numărul de elemente x_i (cardinalul mulţimii X) şi de poziţia i a unui element în şirul ordonat $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Deci $\mu_S(x_i)$ şi $\mu_T(x_i)$ nu depind de valoarea x_i ci doar de poziţia **i** a acesteia în şirul de valori ordonate, desemnând "contextul de lucru" şi de numărul de valori din şir **n**, confirmându-se astfel primele două remarci din secţiunea 2 a articolului.

Se poate calcula şi poziţia **i** din şir pentru care elementul corespunzător x_i face parte în acelaşi grad din mulţimile S şi T, rezultate în urma experimentului prezentat. Avem:

$$\mu_S(x_i) = \mu_T(x_i) \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{n-i}{n} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{i-1}{n}$$

$\Rightarrow$ i-1=n-i $\Rightarrow$ i=$\frac{n+1}{2}$. Pentru n=2k+1, rezultă i=k+1.

În sfârşit, se observă că $\mu_S(x_1) \rightarrow 1$ şi $\mu_S(x_n) \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$. De asemenea, $\mu_T(x_1) \rightarrow 0$ şi $\mu_T(x_n) \rightarrow 1$ penru $n \rightarrow \infty$.

5. Concluzii şi generalizări posibile

Prin experimentul imaginat s-a dedus o procedură de generare simultană a gradelor de apartenenţă pentru mulţimi fuzzy din clasa $\mathcal{S}$ şi respectiv din clasa $\mathcal{T}$ procedură ce are ca date de intrare doar contextul de lucru adică mulţimea X={x_1, x_2,..., x_n}. În termenii utilizaţi în logica fuzzy, X este universul de discurs. După fixarea universului de discurs şi a variabilei lingvistice, clasele $\mathcal{T}$ şi $\mathcal{S}$ se instanţiază la mulţimi fuzzy corespunzând valorilor unei variabile lingvistice. De exemplu, dacă se consideră contextul vârsta oamenilor, pentru variabila lingvistică *vârstă*, valorile avute în vedere pot fi *bătrân* şi respectiv *nebătrân*, iar dacă se consideră contextul înălţimea oamenilor, pentru variabila lingvistică *înălţime*, valorile considerate pot fi *înalt* respectiv *neînalt*. În experimentul considerat s-a presupus că există doar două clase de mulţimi fuzzy, ceea ce înseamnă că pentru o variabilă lingvistică fixată, numărul de valori posibile, respectiv numărul de mulţimi fuzzy care partiţionează domeniul de lucru este 2. Experimentul poate fi extins aşa cum se va vedea pe parcursul acestei secţiuni la considerarea mai multor clase de mulţimi fuzzy, ceea ce înseamnă variabile lingvistice cu tot atâtea valori posibile considerate.

Este evidentă acum utilitatea acestei proceduri. Pentru o mulţime fuzzy oarecare ce caracterizează o anumită proprietate (sau o valoare de variabilă lingvistică) ce poate fi măsurată printr-un anume procedeu şi pentru care se poate indica numeric rezultatul măsurării putem obţine şirul $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Dacă nu există un procedeu de măsurare bine pus la punct pentru proprietatea respectivă, este suficientă ordonarea, pe baza estimării făcute de un expert (pe baza bunului simţ în cele din urmă) în raport cu proprietatea respectivă a unor obiecte din domeniul fizic de lucru, deoarece s-a văzut că prin metoda prezentată ceea ce contează este ordinea în şir, şi nu valoarea efectivă. Pe baza experimentului imaginat se pot genera automat valorile gradelor de apartenenţă. Dacă respectiva mulţime fuzzy este din clasa $\mathcal{T}$ atunci gradele de apartenenţă vor fi valorile generate ale funcţiei μ_T, iar dacă respectiva mulţime fuzzy este din clasa $\mathcal{S}$ atunci gradele de apartenenţă vor fi valorile generate ale funcţiei μ_S. Desigur, în aplicaţiile practice care utilizează logica fuzzy, de exemplu, în controlul fuzzy, aceste valori astfel determinate pot fi ajustate pentru folosirea efectivă, ţinând seama de faptul că şi această determinare are o doză de arbitrar în modul în care se specifică contextul de lucru, respectiv şirul de valori distincte x_1, x_2,..., x_n.

În cazul general al unui domeniu continuu de lucru $U \subset \mathbf{R}$, x_1, x_2,..., x_n reprezintă un eşantion de puncte distincte ale respectivului domeniu. Punctele pot fi eşantionate cu pas constant sau variabil. Pentru valori intermediare, situate pe axa reală între aceste puncte din şir, gradele de apartenenţă pot fi, de exemplu, valorile obţinute prin procedee de interpolare. Dacă este vorba despre o mulţime fuzzy de clasă $\mathcal{T}$ pentru o valoare x, aparţinând domeniului de lucru, dar situată în afara limitelor x_1 şi respectiv x_n, se poate lua μ_T (x) = 0, dacă x< x_1 şi respectiv μ_T (x) = 1, dacă x> x_n. Analog, pentru o mulţime fuzzy de clasă $\mathcal{S}$, μ_S (x) = 1 dacă x< x_1 şi respectiv μ_S (x) = 0, dacă x> x_n. Pentru aplicaţii practice se poate opta, de exemplu, pentru o eşantionare suficient de fină a domeniului de lucru (cât de fină este această eşantionare, deci cât de mare este numărul de puncte n în care se calculează funcţiile de apartenenţă după procedeul expus, este dependent de problemă) şi apoi extinderea la întreg domeniul continuu de lucru al funcţiilor de apartenenţă prin aproximarea acestora cu funcţii liniare pe porţiuni.

Testarea şi evaluarea repetată a sistemului bazat pe logica fuzzy în condiţiile rezolvării unei probleme reale, vor permite ajustarea adecvată a funcţiilor de apartenenţă, determinarea gradelor de apartenenţă prin procedeul prezentat fiind un punct de plecare în determinarea formei finale a funcţiilor de apartenenţă pentru mulţimile fuzzy considerate.

Procesul de dezvoltare a unui sistem fuzzy este iterativ, etapele intermediare între definirea problemei şi realizarea finală a sistemului fiind reluate ciclic. În acest proces, expertul domeniului problemei, realizatorul şi utilizatorul sistemului ce va fi dezvoltat conlucrează. Este cunoscut faptul că în dezvoltarea sistemelor fuzzy, timpul consumat pentru definirea problemei, definirea variabilelor lingvistice, definirea valorilor acestor variabile lingvistice (a mulţimilor fuzzy care le caracterizează), definirea regulilor fuzzy şi construirea sistemului prototip, este mult mai mic în comparaţie cu etapele de testare şi ajustare fină a sistemului pentru a răspunde la cerinţele de performanţă impuse. Etapa de ajustare fină poate presupune printre altele: adăugarea de noi variabile lingvistice cu valori specifice, adăugarea de valori (mulţimi fuzzy) la variabile lingvistice existente, modificarea localizării regiunilor fuzzy corespunzătoare valorilor variabilelor lingvistice (prin deplasare laterală), ajustarea formei graficelor pentru funcțiile de apartenență ce caracterizează valori ale variabilelor lingvistice.

S-a văzut că gradul de apartenență pentru un element x_i la o mulțime fuzzy este dependent de poziția acestuia în șirul ordonat $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ și de numărul n. Se poate pune și problema preciziei rezultatelor, în sensul "apropierii" gradelor de comparație calculate, de cele "percepute", "învățate" de către o ființă umană în urma experienței de zi cu zi. Intuitiv, se poate spune că aceasta se întâmplă în măsura în care finețea pasului de eșantionare (diferența între două valori succesive din șir) și frontierele contextului de lucru (x_1 și respectiv x_n) aproximează limitele de percepție ale subiectului uman.

O modalitate interesantă de validare a funcțiilor de apartenență, generate prin procedeul expus în acest articol sau prin alte procedee, îl poate constitui aplicarea metodologiei experimentale a timpului de răspuns propusă de Dunn [4] și inspirată din cercetările în domeniul psihologiei cognitive în care aceeași metodologie de validare este folosită pentru a verifica modele de categorizare și procese de formare a conceptelor caracteristice ființei umane. În experimentele propuse de Dunn, se folosesc subiecți umani care răspund prin Da sau Nu la stimuli de genul frazelor "X este Y". X parcurge domeniul de valori al universului de discurs în mod aleator sau nealeator, în timp ce variabila lingvistică Y ia valori specifice (de exemplu, *rece*, *cald*, *fierbinte*, în cazul variabilei lingvistice *temperatura)*. Chiar dacă metoda propusă de Dunn, nu poate fi utilizată pentru validarea formei funcției de apartenență, prelucrarea datelor privind răspunsurile și timpurile de răspuns ale subiecților umani permite localizarea regiunii vagi, corespunzătoare unei anumite valori a variabilei lingvistice considerate. Pentru o mulțime fuzzy F caracterizată printr-o funcție μ_F timpul de răspuns al subiecților umani este în mod consistent mai mare în punctele x pentru care $0 < \mu_F(x) < 1$ decât pentru punctele x în care în mod clar $\mu_F(x) = 0$ sau $\mu_F(x) = 1$ (punctele x despre care se poate afirma cu certitudine că aparțin sau nu aparțin mulțimii F).

Metoda prezentată permite generarea gradelor de apartenență pentru mulțimi fuzzy făcând parte din două clase posibile $\mathcal{S}$ și $\mathcal{T}$. Ea poate fi ușor extinsă, așa cum s-a precizat, la considerarea mai multor clase de mulțimi fuzzy pentru un domeniu de lucru. Experimentul care stă la baza unei astfel de metode generalizate se obține prin modificarea corespunzătoare a experimentului anterior prezentat. De exemplu, alături de clasele $\mathcal{S}$ și $\mathcal{T}$ se poate considera clasa mulțimilor elementelor "medii" $\mathcal{M}$. Se presupune că în urma extragerii celor n bile din urnă se obțin 3 mulțimi disjuncte S, M și T. Mulțimea T conține elementele care sunt "mai mari" decât elementele din mulțimea M, și S conține elementele "mai mici" decât elementele din mulțimea M.

Experimentul imaginat va permite deducerea unei metode de generare simultană a gradelor de apartenență pentru mulțimile fuzzy făcând parte din 3 clase. Mai jos se descriu pașii experimentului:

Pas 0. Inițializări: $S = \varnothing$; $M = \varnothing$; $T = \varnothing$; urna U conține n bile.
Pas 1. Se extrag aleator 2 bile u_1 și u_2 din U ale căror valori după ordonare și, eventual, renumerotare sunt v_1 și v_2 cu $v_1 < v_2$. Se "aruncă" aleator v_1 în S sau în M și v_2 în M sau în T.

.

.

.

Pas p. ($1 < p \le n$); Se extrage aleator u din U.
    dacă $v(u) < v_1$
        atunci $S = S \cup \{v(u)\}$
    altfel dacă $v(u) > v_2$
        atunci $T = T \cup \{v(u)\}$
    altfel $M = M \cup \{v(u)\}$

La fel ca și în cazul experimentului anterior, se vor putea deduce pentru o valoare oarecare x_i din șirul ordonat de valori înscrise pe bilă, $p(x_i \in S)$, $p(x_i \in M)$ respectiv $p(x_i \in T)$.

Vom avea de data aceasta $p(x_i \in S) + p(x_i \in M) + p(x_i \in T) = 1$ și se vor lua $\mu_S(x_i) = p(x_i \in S)$, $\mu_M(x_i) = p(x_i \in M)$ și respectiv $\mu_T(x_i) = p(x_i \in T)$ pentru $1 \le i \le n$.

Extinderea la cazul general cu m clase de mulțimi fuzzy pe un domeniu de lucru este imediată. Fie acestea $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_m$ și fie $C_1, C_2, \ldots, C_m$ instanțele acestor clase, reprezentând mulțimi fuzzy, care se obțin în urma experimentului schițat mai jos pentru un context de lucru fixat. C_2 conține elementele "mai mari" decât elementele din C_1 și "mai mici" decât elementele din C_3 și, în general, C_j conține elementele "mai mari" decât cele conținute în C_{j-1} și "mai mici" decât cele conținute în C_{j+1}, $1 < j < m$.

Pas 0. Inițializări: $C_1 = \varnothing$, $C_2 = \varnothing, \ldots$ $C_m = \varnothing$; urna U conține n bile.
Pas 1. Se extrag aleator m-1 bile $u_1, u_2, \ldots u_{m-1}$ din U ale căror valori după ordonare și, eventual, renumerotare sunt $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ cu $v_1 < v_2 < \ldots < v_{n-1}$. Pentru fiecare j ($1 \le j \le m-1$) se "aruncă" aleator v_j în C_j sau C_{j-1}

.

.

.

Pas p. ($1 < p \le n-m-2$); Se extrage aleator u din U.
    dacă $v(u) < v_1$
        atunci $C_1 = C_1 \cup \{v(u)\}$
    altfel dacă $v(u) > v_{m-1}$
        atunci $C_m = C_m \cup \{v(u)\}$

altfel determină j astfel încât v(u) < v_j şi v(u) > v_{j-1} ($1 \le j \le m-1$)

$C_j = C_j \cup \{v(u)\}$

Se va putea deduce ca şi în cazul primului experiment (particularizare a prezentului experiment pentru m=2) $p(x_i \in C_j)$ pentru $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

Astfel $\sum_{j=1}^{m} p(x_i \in C_j) = 1$, pentru oricare i, $1 \le i \le n$. La fel se va postula $\mu_{Cj}(x_i) = p(x_i \in C_j)$ pentru oricare i,j cu $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

Experimentul extins permite deducerea unei metode de generare simultană a gradelor de apartenenţă pentru mulţimi fuzzy care caracterizează variabile lingvistice de cardinalitate m, cu m arbitrar.

Observaţiile şi concluziile legate de primul experiment rămân valabile şi în cazul general.

Bibliografie

1. **CIVANLAR, H.R., TRUSSELL, H.J.**: Determination and Applications of Membership Functions Based On Statistical Data., In Recent Developments in the Theory and Applications of Fuzzy Sets, Proceedings of NAFIPS' 86. New Orleans, 1986.
2. **DRIANKOV, D., HELLENDOORN H., REINFRANK M.**: An Introduction to Fuzzy Control, Springer Verlag, Berlin, 1993.
3. **DUBOIS, D., PRADE, H.**: Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. New York, Academic Press, 1980.
4. **DUNN, P.**: A Paradigm for Vallidating Membership Functions, BUSEFAL nr. 37/1988, p. 95-106.
5. **HERSH, H.M., CARAMAZZA, A.**: A Fuzzy Set Approach to Modifiers and Vagueness in Natural Language., Journal of Experimental Psychology, 1976, 105, p. 254-276.
6. **KUZ'MIN, V.B.**: A Parametric Approach to Description of Linguistic Values of Variables and Hedges., Fuzzy Sets and Systems, 1981, 6, p. 27-41.
7. **SAATY, T.L.**: Measuring the Fuzziness of Sets, Journal of Cybernetics, 1974, 4, p. 53-61.
8. **ZADEH, L. A.**: Fuzzy Sets. Information and Control, vol. 8, 1965, p. 338-353.
9. **ZADEH, L. A.**: Fuzzy languages and their relations to human and machine intelligence, Man Comput. Proc. Int. Conf., 1972, p. 130-165. S. Karger, Basel.
10. * * * Lucrările seminarului "Mulţimi fuzzy: teorie şi aplicaţii", ICI, 1996.