UTILIZAREA MULȚIMILOR FUZZY LA REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE OPTIMIZARE

dr. mat. Mircea Sularia

Institutul de Cercetări în Informatică

Rezumat Lucrarea prezintă direcții de aplicare a mulțimilor fuzzy la rezolvarea unor probleme de optimizare, corelarea optimală a obiectivelor cu resursele; tratarea impreciziei privind valorile unor parametri caracteristici; rezolvarea problemelor de optimizare în numere întregi.

Cuvinte cheie: mulțime fuzzy, mulțimi de nivel, teoreme de reprezentare, imagine, optimizare diferențiabilă, programare matematică fuzzy, punct de maxim Pareto.

Introducere

Un domeniu important de aplicare a mulțimilor fuzzy propus de Bellman și Zadeh prin programarea matematică fuzzy este acela al formulării și al rezolvarii unor probleme de optimizare. În cele ce urmează, ne vom referi mai întâi la problema corelării obiectivelor cu resursele a cărei abordare se bazează pe un procedeu de tratare a restricțiilor incompatibile utilizând mulțimi fuzzy specifice. Prezentăm apoi o procedură standard, de formulare a unor probleme de optimizare în care anumiți parametri sunt definiți prin mulțimi fuzzy și arătăm că rezolvarea acestor probleme necesită ca mulțimile fuzzy să fie reprezentate prin mulțimi de nivel. În ultima parte a lucrării, specificăm anumite posibilități de a utiliza mulțimile fuzzy la rezolvarea unor probleme de optimizare în numere întregi, prin reducerea acestora la probleme uzuale de optimizare diferențiabilă.

1. Problema corelării optimale a obiectivelor cu resursele

Utilizând programarea matematică fuzzy [1] se va prezenta o manieră generală de tratare a unei probleme de corelare a obiectivelor cu resursele [4, 5, 6] formulată matematic prin cerința ca vectorul variabilelelor de decizie $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ să verifice un sistem de inecuații de forma:

$$f_i(x) \geq a_i \quad i = \overline{1,m}$$
$$g_j(x) \leq b_j \quad j = \overline{1,p}$$
$$x \in X \subseteq \Re^n$$

unde:

- X este mulțimea alternativelor
- m este numărul criteriilor de decizie
- p este numărul resurselor
- obiectivul urmărit din punctul de vedere al unui criteriu i este de a alege o alternativă x astfel încât valoarea $f_i(x)$ să fie cât mai mare
- nivelul consumului din fiecare resursă j trebuie să fie cât mai mic
- $f_i(x) \in \Re$ este rezultatul alegerii alternativei x din punctul de vedere al criteriului i
- a_i este nivelul minim satisfacator al rezultatului urmărit a fi realizat din punctul de vedere al criteriului i de către alternativa x care rezolvă problema de decizie
- $g_j(x) \in \Re$ este consumul total din resursa j, corespunzător alternativei x
- b_j este disponibilul din resursa j.

Sistemul precedent de inecuații este deseori incompatibil pentru faptul că există o contradicție inerentă între obiective și resurse în problemele practice de decizie: cu cât obiectivele sunt mai bine satisfăcute, cu atât nivelul resurselor consumate este mai mare. În cazul menționat anterior, se pune problema fie de a reduce nivelurile dorite $(a_i)_{i=1,m}$ ale valorilor $[f_i(x)]_{i=1,m}$, fie de a mări în viitor nivelul resurselor curente disponibile $(b_j)_{j=1,p}$, fie de a combina într-un mod convenabil ambele acțiuni menționate anterior. Pentru a fundamenta rezolvarea acestei probleme apare în mod firesc utilă definirea unui set de m mulțimi fuzzy,

$$p_i : \Re \to [0,1] \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

pentru fiecare obiectiv i și a unui set de p mulțimi fuzzy,

$$\rho_j : \Re \to [0,1] \quad (j = 1,2,\ldots,p)$$

pentru fiecare resursă j astfel încât să fie îndeplinite condițiile următoare :

- $\pi_i(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \geq a_i$;
- $\pi_i(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \leq a_i^{min}$, unde $a_i^{min} < a_i$;
- π_i este o funcție strict crescătoare pe intervalul deschis (a_i^{min}, a_i);
- $\rho_j(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \leq b_j$;
- $\rho_j(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \geq b_j^{max}$, unde $b_j < b_j^{max}$;
- ρ_j este o funcție strict descrescătoare pe intervalul deschis (b_j, b_j^{max});
- $(\exists\, x^0 \in X)\ (\forall\, i)\ (\forall\, j)\ [f_i(x^0) \geq a_i^{min} \wedge g_j(x^0) \leq b_j^{max}]$.

Pentru simplificarea rezolvării, se poate alege π_i de forma:

$$[\forall\alpha \in (a_i^{min}, a_i)]\pi_i(\alpha) = \frac{\alpha - a_i^{min}}{a_i - a_i^{min}},$$

şi ρ_j de forma:

$$[\forall\alpha \in (b_j, b_j^{max})]\rho_j(\alpha) = \frac{b_j^{max} - \alpha}{b_j^{max} - b_j}.$$

Simplificarea provine din faptul ca funcţiile π_i şi ρ_j definite prin condiţiile menţionate anterior sunt lineare pe porţiuni. Utilizarea acestor expresii este recomandabilă, în special, în situaţiile în care toate funcţiile f_i si g_j ($i=1,m$; $j=1,p$) sunt lineare.

Problema corelarii optimale a obiectivelor cu resursele în condiţiile descrise anterior poate fi formulată ca o problemă de programare matematică fuzzy [1] astfel :

$$\min_{i=\overline{1,m}}[(\pi_i \circ f_i)(x)] \wedge \min_{j=\overline{1,p}}[(\rho_j \circ g_j)(x)] \leftarrow \max!$$
$$x \in X$$

deci rezolvarea sa revine la obţinerea unei soluţii pentru următoarea problema de optimizare :

$$x_{n+1} \leftarrow \max!$$

$$(\pi_i \circ f_i)(x) - x_{n+1} \geq 0 \quad i = \overline{1,m}$$
$$(\rho_j \circ g_j)(x) - x_{n+1} \geq 0 \quad j = \overline{1,p}$$
$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X \subseteq \Re^n$$
$$x_{n+1} \in \Re$$

Varianta de corelare optimală a obiectivelor cu resursele este definită de vectorul

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in X,$$

format din primele n componente ale soluţiei problemei precedente de optimizare.

Problema programării matematice fuzzy se încadrează în categoria problemelor uzuale de optimizare cu mai multe criterii. În cazul considerat anterior, dacă se defineşte $q = m + p$ şi

$$(\forall k = \overline{1,m})h_k = \pi_k \circ f_k;$$
$$(\forall k = \overline{1,p})h_{m+k} = \rho_k \circ g_k;$$
$$(\forall x \in \Re^n)h(x) = (h_1(x), h_2(x), \ldots, h_q(x)),$$

atunci, o formulare mai generală a problemei corelării optimale a obiectivelor cu resursele, poate fi următoarea: să se determine un punct de maxim Pareto pe $X \subseteq \Re^n$ a funcţiei $h:X \rightarrow \Re^q$. Prin urmare, în acest context mai general o variantă de corelare optimală a obiectivelor cu resursele este definită printr-un vector $x^* \in X$ cu proprietatea ca $h(x^*)$ este un element maximal al mulţimii ordonate $(h(X), \leq)$, unde $\leq$ este relaţia de ordine produs pe $\Re^q$ indusă de ordinea uzuală a lui $\Re$.

2. Reprezentarea parametrilor fuzzy în probleme de optimizare

Teoremele de reprezentare a mulţimilor fuzzy pot fi aplicate la formularea unor probleme de optimizare în care anumiţi parametri sunt definiţi prin mulţimi fuzzy (e.g. programarea lineară cu coeficienţi mulţimi fuzzy [5] extensie a programării lineare cu coeficienţi mulţimi [3]).

Se prezintă o procedură standard de abordare a unor probleme de optimizare cu parametrii fuzzy, bazată pe ideile lui Soystyer [3] privind optimizarea lineară cu coeficienţi mulţimi şi pe utilizarea unor operaţii uzuale cu mulţimi fuzzy. Se consideră o funcţie vectorială

$$g : \Re^n \times \Re^{p_1} \times \Re^{p_2} \times \ldots \times \Re^{p_k} \rightarrow \Re^m,$$

un şir de k vectori

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \Re^{p_1} \times \Re^{p_2} \times \ldots \times \Re^{p_k}$$

şi un vector

$$b \in \Re^m.$$

Se defineşte mulţimea $D(a_1,a_2,\ldots, a_k) \subseteq \Re^n$ prin condiţia $x \in D(a_1,a_2,\ldots, a_k)$ dacă şi numai dacă x verifică următorul sistem de inecuaţii în $\Re^n$

$$g(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) \leq b$$
$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re^n$$
$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n}.$$

Sistemul anterior include sistemele obişnuite de inecuaţii lineare în $\Re^n$ cu condiţia $k = n$, $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = m$ şi funcţia g să fie definită prin relaţia următoare în spaţiul vectorial $\Re^m$:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = x_1 a_1 + x_2 \times a_2 + \ldots + x_n \times a_n.$$

Se presupune că vectorii $a_1, a_2,\ldots, a_k$ nu sunt cunoscuţi cu precizie, dar se ştie ca valorile lor aparţin unor mulţimi date, şi anume,

$$(\forall i = \overline{1,k})a_i \in A_i \subseteq \Re^{p_i}.$$

Având în vedere modul de formulare a problemelor de optimizare lineară cu coeficienţi mulţimi (a se vedea [3]), se consideră conul din $\Re^m$ dat prin relaţia următoare

$$A = A(b) = \{y \in \Re^m / y \leq b\}$$

şi se defineşte $D \subseteq \Re^n$ prin condiţia $x \in D$ dacă şi numai dacă $x \in \Re^n$, $x \geq 0 \in \Re^n$ şi are loc relaţia de incluziune în $\mathcal{P}(\Re^m)$:

$$g(x, A_1, A_2, ..., A_k) \subseteq A.$$

Prin urmare, mulţimea D este definită prin condiţia următoare :

$$D = \bigcap_{(a_1, a_2, ..., a_k) \in A_1 \times A_2 \times A_k} D(a_1, a_2, ..., a_k).$$

Mulţimea D este o redefinire a mulţimii alternativelor admisibile $D(a_1, a_2, ..., a_k) \subseteq \Re^n$ ale unei probleme de decizie $P(a_1, a_2, ..., a_k)$ în cazul când $(a_1, a_2, ..., a_k)$ sunt parametrii variabili în mulţimi cunoscute. Definiţia adoptată pentru D exprimă o atitudine de prudenţă necesară în rezolvarea pro-blemei de decizie $P(a_1, a_2, ..., a_k)$ atunci când valo-rile concrete ale parametrilor caracteristici sunt incerte: $x \in D$ dacă şi numai dacă oricare ar fi $(a_1, a_2, ..., a_k) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ avem $x \in D(a_1, a_2, ..., a_k)$, adică $x \in D \Leftrightarrow x$ este alternativa admisibilă pentru $P(a_1, a_2, ..., a_k)$ oricare ar fi variaţia parametrilor caracteristici.

Se presupune că variaţia parametrilor caracteristici problemei de decizie $P(a_1, a_2, ..., a_k)$ poate fi descrisă prin k mulţimi fuzzy

$$(\forall i = \overline{1,k})A_i : \Re^{p_i} \rightarrow [0, 1]$$

şi că termenul liber $b \in \Re^m$, care intervine în definiţia mulţimii alternativelor $D(a_1, a_2, ..., a_k)$ este, de asemenea, variabil cu o variaţie descrisă printr-o mulţime fuzzy

$$A : \Re^m \rightarrow [0, 1].$$

Mulţimile fuzzy de mai sus pot fi privite ca distribuţii de posibilitate pentru valorile parametrilor respectivi. Fie $x \in \Re^n$ astfel încât $x \geq 0$. Se consideră funcţia g(x) definită de g astfel :

$$g(x) : \Re^{p_1} \times \Re^{p_2} \times ... \times \Re^{p_k} \rightarrow \Re^m$$

$$[\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \in \Re^{p_1} \times \Re^{p_2} \times ... \times \Re^{p_k}] g(x)(\lambda) = g(x, \lambda).$$

Se notează prin $K = A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i=1,k}$, deci

$$K : \Re^{p_1} \times \Re^{p_2} \times ... \times \Re^{p_k} \rightarrow [0, 1]$$

$$[\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \in \Re^p] K(\lambda) = \min_{i=\overline{1,k}} A_i(\lambda_i)$$

$$\text{unde } p = \sum_{i=1}^{k} p_i.$$

În aceste condiţii, mulţimea alternativelor admisibile D_f ale problemei de decizie $P(a_1, a_2, ..., a_k)$ cu parametrii fuzzy se poate defini prin condiţia $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \Re^n$ astfel încât $x \geq 0$ şi are loc următoarea relaţie de incluziune în mulţimea $\mathcal{F}(\Re^m)$ a submulţimilor fuzzy a lui $\Re^m$:

$$g(x)(K) \subseteq A,$$

unde

$$g(x)(K) : \Re^m \rightarrow [0,1]$$

este imaginea mulţimii fuzzy K prin aplicaţia g(x).

Problema maximizării (minimizării) unei funcţii reale $f: \Re^n \rightarrow \Re$ pe mulţimea D_f definită anterior este, în general, complicată. Într-adevar, aplicând definiţia incluziunii între mulţimi fuzzy rezultă că un vector $x \in \Re^n$ astfel încât $x \geq 0$ are proprietatea $x \in D_f$ dacă şi numai dacă x verifică o familie de relaţii de incluziune în $\mathcal{P}(\Re^m)$ indexată de I = [0,1], şi anume:

$$(\forall \alpha \in [0, 1]) N_\alpha^*[g(x)(K)] \subseteq N_\alpha^*(A),$$

unde pentru orice $B \in \mathcal{F}(\Re^m)$ şi $\alpha \in [0, 1]$, $N_\alpha^*(B)$ este α -nivelul strict al mulţimii fuzzy B, adică

$$N_\alpha^*(B) = \{y \in \Re^m \;/\; B(y) > \alpha\}.$$

Pentru reprezentarea parametrilor, se poate avea în vedere fie utilizarea unor mulţimi fuzzy în scară, fie aproximarea mulţimilor fuzzy prin funcţii în scară adecvate. Faptul că numărul relaţiilor de incluziune, care definesc D_f, este în acest caz finit, poate implica o simplificare a rezolvării.

3. Posibilităţi de aplicare a mulţimilor fuzzy la rezolvarea problemelor de optimizare în numere întregi

În continuare, se vor specifica la anumite posibilităţi de aplicare a mulţimilor fuzzy la formularea şi rezolvarea problemelor de optimizare cu variabile mixte (numere întregi, booleene şi/sau reale). Dintre lucrările dedicate acestui subiect se menţionează [2, 7].

Următoarea observaţie simplă poate fi considerată în acest context:

$(\forall\, n \in N)(\exists$ o mulţime fuzzy C^∞ - diferenţiabilă $\eta: \Re^n \rightarrow [0, 1])\; \mathbf{Z}^n = \{x \in \Re^n \;/\; \eta(x) = 1\}$.

De aici rezultă că orice problemă de optimizare în numere întregi este echivalentă cu o problemă de optimizare nelineară (diferenţiabilă) cu variabile numere reale, după cum se va arăta în continuare.

Dacă $X \subseteq \Re^n$ este o mulţime descrisă de un sistem de ecuaţii şi/sau inecuaţii diferențiabile și η: $\Re^n \to [0, 1]$ este o mulțime fuzzy ca mai sus, atunci problema maximizării unei funcții reale diferențiabile f: $\Re^n \to \Re$ pe mulțimea $X \cap \mathbf{Z}^n$ este echivalentă cu următoarea problemă de optimizare diferențiabila în $\Re^n$:

$$f(x) \leftarrow \max !$$
$$\eta(x) = 1$$
$$x \in X \subseteq \Re^n$$

Condiția ca un vector $y = (y_1, y_1, \ldots, y_m) \in \Re^m$ să fie un vector de variabile booleene, adică $(\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, m\})y_i \in \{0, 1\}$, se poate exprima printr-un sistem de restricții în $\Re^m$ de forma :

$$\rho(y) = 1$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in [0, 1]^m$$

unde $\rho : \Re^m \to [0, 1]$ poate fi orice mulțime fuzzy diferențiabilă, cu proprietatea următoare:

$$y \in \mathbf{Z}^m \Leftrightarrow \rho(y) = 1.$$

Prin urmare, orice problemă de optimizare cu variabile întregi și/sau booleene (P) este echivalentă cu o problemă de optimizare cu toate variabilele numere reale (Q) obținută din (P) prin înlocuirea restricțiilor de apartenență a variabilelor la Z sau la {0, 1} cu restricții corespunzatoare de tipul celor menționate anterior.

Exemplu numeric

Pentru a concretiza observațiile precedente, se dă în continuare un exemplu de rezolvare a unei probleme de optimizare în numere întregi, utilizând o mulțime fuzzy standard

$$\eta : \Re \times \Re \to \Re$$

$$[\forall(x, y) \in \Re \times \Re]\eta(x, y) = \frac{[\cos(\pi \cdot x)]^2 + [\cos(\pi \cdot y)]^2}{2},$$

cu proprietatea suplimentară ca

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{(x, y) \in R \times R \ / \ \eta(x, y) = 1\}.$$

Expresia generală a unei mulțimi fuzzy standard, η: $\Re^n \to [0, 1]$, cu proprietatea

$$\mathbf{Z}^n = \{x \in \Re^n \ / \ \eta(x) = 1\}$$

de tipul celei considerate în acest exemplu este următoarea :

$$[\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re^n]\eta(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} [\cos(\pi \cdot x_j)]^2.$$

Se consideră următoarea problemă de optimizare în numere întregi [2, pag. 127]:

$$2x + 5y \leftarrow \max !$$

cu restricțiile:

$$2x - y \leq 9$$
$$2x + 8y \leq 31$$
$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

unde x,y numere întregi.

Se atașează problemei precedente sistemul de ecuații cu variabile numere reale format din restricțiile de mai sus în forma standard la care se adaugă următoarele condiții :

- vectorul variabilelor de bază (x, y) să aparțină α-nivelului lui η pentru $\alpha = 1$;

- valoarea funcției obiectiv să fie cel putin 20.45.

Utilizând funcția Find din Mathcad 2.04 cu valorile inițiale x = 1.46 și y = 6.03 rezultă ca soluția acestui sistem, obținută cu algoritmul respectiv, coincide cu soluția (x, y) = (3, 3) a problemei precedente de optimizare în numere întregi (Anexa 1). Dacă la sistemul atașat din Anexa 1 se adaugă restricțiile x, $y \leq 1$ și se înlocuiește limita inferioară 20.45 a funcției obiectiv cu 5.25 rezultă soluția booleană (x, y) = (1, 1) pentru care funcția obiectiv a aceleiași probleme este maximă (Anexa 2). Pornind de la elementele prezentate anterior, pot fi elaborate diverse metode de rezolvare a problemelor de optimizare cu variabile mixte utilizând algoritmi de optimizare diferențiabilă. Pentru reprezentarea unei variabile $x \in [0, 1]$ se poate utiliza expresia $x = 0.5 \times (1 + \cos \alpha)$, în vederea eliminării restricțiilor $x \geq 0$ și $x \leq 1$.

Rezultă că modul de tratare a unei probleme de optimizare cu variabile întregi și/sau booleene pe care l-am prezentat nu implică o creștere a dimensiunii problemei echivalente atașate decât cu o singură ecuație suplimentară față de dimensiunea problemei considerate inițial.

Dacă, exceptând condițiile de apartenență a variabilelor la **Z**, problema inițiala de optimizare în numere întregi este cu restricții definite de funcții diferențiabile, atunci și problema echivalentă atașată are această proprietate, fiind în plus o problemă cu toate variabilele numere reale. Transformarea propusa conduce, în general, la probleme de optimizare echivalente, complicate din punctul de vedere al structurii matematice (restricții neconvexe, definite de funcții periodice). Cu toate acestea, problemele respective sunt rezolvabile, dacă se elaborează algoritmi de optimizare diferențiabilă, bine adaptați la structura particulară a problemelor concrete.

Anexa 1

E x e m p l u   n u m e r i c

Rezolvarea unei probleme de optimizare in numere intregi utilizand o multime fuzzy standard

Valori initiale variabile

x := 1.46   y := 6.03   z := 0   u := 0   v := 0   w := 0

Given

Expresia conditiei (x, y) ∈ N x N

$$0.5\cdot(\cos(\pi\cdot x))^2 + 0.5\cdot(\cos(\pi\cdot y))^2 \approx 1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Restrictiile problemei de optimizare in forma standard

$$2\cdot x - y + z \approx 9 \qquad 2\cdot x + 8\cdot y + u \approx 31$$

$$z \geq 0 \qquad u \geq 0$$

Conditia ca valoarea functiei obiectiv sa fie cel putin 20.45

$$2\cdot x + 5\cdot y - v + w \approx 0$$

$$v \geq 0$$

$$w \geq 0$$

$$v - w \geq 20.45$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} := \mathrm{Find}(x,y,z,u,v,w)$$

Solutia sistemului asociat [Mathcad 2.04 / Dos]

Valori variabile principale

x = 3   y = 3

Valori variabile auxiliare

z = 6   u = 1

v = 21.017   w = 0.017

Valoarea functiei obiectiv

v − w = 21

Anexa 2

E x e m p l u   n u m e r i c

Rezolvarea unei probleme de optimizare
cu variabile booleene utilizand o multime fuzzy standard

Valori initiale variabile

$x := 0.001 \quad y := 0 \quad z := 0 \quad u := 0 \quad v := 0 \quad w := 0$

Given

Expresia conditiei $(x, y) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}$

$$0.5\cdot(\cos(\pi\cdot x))^2 + 0.5\cdot(\cos(\pi\cdot y))^2 \approx 1$$

$$x \geq 0 \quad x \leq 1$$

$$y \geq 0 \quad y \leq 1$$

Restrictiile problemei de optimizare in forma standard

$$2\cdot x - y + z \approx 9 \qquad z \geq 0$$

$$2\cdot x + 8\cdot y + u \approx 31 \qquad u \geq 0$$

Conditia ca valoarea functiei obiectiv sa fie cel putin 5.25

$$2\cdot x + 5\cdot y - v + w \approx 0$$

$$v \geq 0$$

$$w \geq 0$$

$$v - w \geq 5.25$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} := \mathrm{Find}(x,y,z,u,v,w)$$

Solutia sistemului asociat [Mathcad 2.04 / Dos]

Valori variabile principale

$x = 1 \qquad y = 1$

Valori variabile auxiliare

$z = 8 \qquad u = 21$

$v = 9.146 \qquad w = 2.146$

Valoarea functiei obiectiv

$v - w = 7$

Concluzii

În lucrare au fost considerate trei direcții de aplicare a mulțimilor fuzzy în abordarea unor probleme de optimizare numerică:

- corelarea optimală a obiectivelor cu resursele, utilizând o metodă de tratare a restricțiilor incompatibile în programarea matematică;

- formularea și rezolvarea unor probleme de optimizare cu parametrii fuzzy;

- formularea și rezolvarea problemelor de optimizare cu variabile mixte (numere întregi, booleene și/sau reale).

Rezultă că formalismul mulțimilor fuzzy poate constitui o sursă de idei utile mai ales în perfecționarea aplicării metodelor existente de rezolvare a problemelor de optimizare.

Bibliografie

1. **BELLMAN, R.E., ZADEH, L.A.**: Decision Making in a Fuzzy Environment, Management Science 17B (1970), pp.141-164.
2. **FABIAN, C., STOICA, M.**: Fuzzy Integer Programming. În: B.R. Gaines, L.A. Zadeh and H.-J. Zimmermann (eds.), Fuzzy Sets and Decision Analysis, Studies in the Management Sciences 20 Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1984, pp.123-131.
3. **ISHIBUCHI, H., TANAKA, H.**: Multi-objective programming in optimization of the interval objective function. În: European Journal of Operational Research, 48, 1990, pp.219-225.
4. **NEGOIȚĂ, C.V., SULARIA, M.**: On Fuzzy Programming and Tolerances in Planning. În: Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, 1, 1976, pp.3-14.
5. **NEGOIȚĂ, C.V., FLONDOR P., SULARIA, M.**: On Fuzzy Environment in Optimization Problems. În: Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, 1 1977, pp.3-12.
6. **SULARIA, M.**: On Fuzzy Programming in Planning, Kibernetes, 6, 1977, pp.229-230.
7. **ZIMMERMANN, H.-J., POLLATSCHEK, M.A.**: Fuzzy 0-1 Linear Programs, In: B.R.Gaines, L.A. Zadeh and H.-J. Zimmermann (eds.), Fuzzy Sets and Decision Analysis. În: Studies in the Management Sciences 20, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1984, pp.133-145.