REPREZENTAREA MULȚIMILOR FUZZY : EXPRESII UTILE ÎN FUNDAMENTAREA UNOR OPERAȚII ALGEBRICE

dr. mat. Mircea Sularia

Institutul de Cercetări în Informatică

Rezumat: În această lucrare, se prezintă proprietățile caracteristice ale familiilor de niveluri definite de mulțimi fuzzy sub forma a trei expresii: caracterizarea familiei α-nivelurilor închise, dată de Negoiță și Ralescu; caracterizarea familiei α-nivelurilor deschise, dată de Flondor; o nouă expresie pentru caracterizarea familiei α-nivelurilor închise. Prin intermediul noțiunii de θ-complementară, se precizează o corespondență naturală care există între familiile de α-niveluri închise și familiile de α-niveluri deschise. Se arată apoi utilitatea reprezentării mulțimilor fuzzy prin mulțimi de nivel în fundamentarea diverselor operații algebrice cu mulțimi fuzzy care intervin în aplicații. În esență, rezultatele prezentate pot fi privite ca o confirmare și ca o dezvoltare a principiului de extensie, formulat de Zadeh.

Cuvinte cheie: mulțime fuzzy, relație de ordine, izomorfism de ordine, morfism, imagine, produs cartezian, operație.

1. Introducere

Problema fundamentării operațiilor algebrice uzuale cu mulțimi fuzzy cum ar fi intersecția, reuniunea, complementara și produsul cartezian, precum și a unor operații algebrice cu mulțimi fuzzy având ca suport diverse mulțimi structurate (e.g. spațiu vectorial) este importantă deopotrivă din punct de vedere teoretic, cât și practic: pe plan teoretic, interesează elaborarea structurilor logico-matematice fundamentale ale universului mulțimilor fuzzy, iar pe plan practic interesează obținerea unor formule de calcul operaționale. Ideea abordării acestei probleme prin reprezentarea mulțimilor fuzzy utilizând familia mulțimilor de nivel, aparține lui Negoiță și Ralescu.

Termenul de mulțime fuzzy este utilizat aici în sensul definiției lui Zadeh [1]. Se prezintă trei expresii ale teoremei de repre-zentare a mulțimilor fuzzy cu mulțimi de nivel:

(E1) expresia dată de Negoiță și Ralescu în [2] pentru caracterizarea familiei α-nivelurilor;

(E2) expresia dată de Flondor [3] pentru caracterizarea familiei α-nivelurilor stricte;

(E3) o nouă expresie pentru caracterizarea familiei α-nivelurilor unei mulțimi fuzzy, prin care o condiție din (E1) bazată pe structura topologică a intervalului [0, 1] este înlocuită cu o condiție sugerată de (E2) și exprimată numai în limbajul structurii de ordine a intervalului [0, 1].

Utilizând expresiile (E2) și (E3), pentru orice antiizomorfism de ordine θ al mulțimii ordonate ([0,1], $\leq$) se definește noțiunea de θ-complementară a unei submulțimi fuzzy, care generalizează noțiunea de complementară a unei submulțimi obișnuite. Se prezintă apoi un mod standard de a deriva formule de calcul, pentru diverse operații algebrice cu mulțimi fuzzy, bazat pe noțiunea de imagine a unei mulțimi fuzzy. Derivarea unor astfel de formule este necesară la formularea și rezolvarea unor probleme de optimizare cu parametrii reprezentați prin mulțimi fuzzy [3]. Pe lângă o reconfirmare a formulelor de calcul, date inițial de Zadeh, teorema de reprezentare a mulțimilor fuzzy prin mulțimi de nivel furnizează un instrument teoretic interesant pentru analiza critică a conceptelor și pentru dezvoltarea teoriei.

2. Notații

Fie X o mulțime și $L = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ mulțimea numerelor reale, cuprinse între 0 și 1 ordonată de relația uzuală de ordine $\leq$ de pe $\mathbb{R}$. Se utilizează următoarele notații :

. $\mathcal{P}(X)$ este mulțimea submulțimilor lui X;

. $\mathcal{F}(X)$ este mulțimea submulțimilor fuzzy ale lui X [1], adică

$\mathcal{F}(X) = L^X$ (mulțimea aplicațiilor $A : X \to L$);

. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(X)$, $\varphi_A: X \to \{0, 1\}$ este funcția caracteristică a submulțimii $A \subseteq X$, definită prin condiția ($\varphi_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$);

. $\Re_1(X)$ este mulțimea aplicațiilor $\sigma: L \to \mathcal{P}(X)$ cu următoarele proprietăți :

(a_1) $\sigma(0) = X$;

(b_1) $\alpha \leq \beta$ implică $\sigma(\beta) \subseteq \sigma(\alpha)$;

(c_1) Pentru orice șir $(\alpha_n)_{n \in N}$ de elemente din L, crescător și convergent astfel încât $\alpha_n \to \alpha$, are loc relația $\sigma(\alpha) = \cap(\sigma(\alpha_n) / n \in \mathbb{N})$;

. $\Re_2(X)$ este mulțimea aplicațiilor $\sigma: L \to \mathcal{P}(X)$ cu următoarele proprietăți :

(a_2) $\sigma(0) = X$;

(b_2) $\alpha \leq \beta$ implică $\sigma(\beta) \subseteq \sigma(\alpha)$;

(c_2) Pentru orice $\alpha \in L$ din $x \in X \setminus \sigma(\alpha)$ rezultă $(\exists\beta < \alpha)\ x \in X \setminus \sigma(\beta)$, deci

$$X \setminus \sigma(\alpha) = \cup (X \setminus \sigma(\beta) / \beta \in L \text{ și } \beta < \alpha);$$

. $\Re^*(X)$ este mulțimea aplicațiilor $\sigma^*: L \to \mathcal{P}(X)$ cu următoarele proprietăți :

(a^*) $\sigma^*(1) = \Phi$;

(b^*) $\alpha \le \beta$ implică $\sigma^*(\beta) \subseteq \sigma^*(\alpha)$;

(c^*) Pentru orice $\alpha \in L$ din $x \in \sigma^*(\alpha)$ rezultă $(\exists\beta > \alpha)\ x \in \sigma^*(\beta)$, deci

$\sigma^*(\alpha) = \cup\,(\sigma^*(\beta)\ /\ \beta \in L$ şi $\beta > \alpha)$;

Pentru orice σ: $L \to \mathcal{P}(X)$ aparţinând uneia din mulţimile $\Re_1(X)$, $\Re_2(X)$ sau $\Re^*(X)$ se notează

$$A_\sigma : X \to L$$

$$(\forall x \in X) A_\sigma(x) = \sup(\alpha \in L\ /\ x \in \sigma(\alpha));$$

. Pentru orice $A : X \to L$ şi $\alpha \in L$, se notează $N_\alpha(A) = \{x \in X\ /\ A(x) \ge \alpha\}$ denumind mulţimea $N_\alpha(A)$, α-nivelul lui A;

. Pentru orice $A : X \to L$ şi $\alpha \in L$ se notează $N_\alpha^*(A) = \{x \in X\ /\ A(x) > \alpha\}$ denumind mulţimea $N_\alpha^*(A)$, α-nivelul strict al lui A.

3. Teorema de reprezentare (Negoiţă-Ralescu [2])

Se definesc

$$(\forall A \in \mathcal{F}(X))\ F(A) : L \to \mathcal{P}(X)$$

$$(\forall \alpha \in L)\ F(A)(\alpha) = N_\alpha(A)$$

Sunt îndeplinite condiţiile următoare :

(i) $(\forall A \in \mathcal{F}(X))\ F(A) \in \Re_1(X)$;

(ii) Corespondenţa $A \mapsto F(A)$ defineşte o aplicaţie bijectivă $F : \mathcal{F}(X) \to \Re_1(X)$ a cărei inversă este aplicaţia $G : \Re_1(X) \to \mathcal{F}(X)$ definită prin relaţia

$$(\forall \sigma \in \Re_1(X))\ G(\sigma) = A_\sigma.$$

Demonstraţie: În [2] p.91 se arată că $(\forall \sigma \in \Re_1(X))\ (\exists! A \in \mathcal{F}(X))\ F(A) = \sigma$ cu $A = A_\sigma$. Deci, $G = F^{-1}$ ■

4. Teorema de reprezentare (Flondor [3])

Se definesc

$$(\forall A \in \mathcal{F}(X))\ F^*(A) : L \to \mathcal{P}(X)$$

$$(\forall \alpha \in L)\ F^*(A)(\alpha) = N_\alpha^*(A)$$

Sunt îndeplinite condiţiile următoare :

(i) $(\forall A \in \mathcal{F}(X))\ F^*(A) \in \Re^*(X)$;

(ii) Corespondenţa $A \mapsto F^*(A)$ defineşte o aplicaţie bijectivă $F^*: \mathcal{F}(X) \to \Re^*(X)$ a cărei inversă este aplicaţia $G^*: \Re^*(X) \to \mathcal{F}(X)$ definită prin relaţia

$$(\forall \sigma \in \Re^*(X))\ G^*(\sigma) = A_\sigma.$$

Demonstraţie: Justificarea afirmaţiilor din enunţ este prezentată în [3] ■

5. Lemă

$$\Re_1(X) = \Re_2(X)$$

Demonstraţie: Fie $\sigma \in \Re_2(X)$ şi $(\alpha_n)_{n \in N}$ un şir de elemente din L crescător şi convergent astfel încât $\alpha_n \to \alpha$. Rezultă $\alpha = \sup(\alpha_n\ /\ n \in N)$. Prin urmare $(\forall n \in N)\ \alpha_n \le \alpha$. Din ($b_2$) rezultă relaţia $\sigma(\alpha) \subseteq \cap\,(\sigma(\alpha_n)\ /\ n \in N)$. Fie $x \in \cap\,(\sigma(\alpha_n)\ /\ n \in N)$. Daca $x \in X \setminus \sigma(\alpha)$ atunci din (c_2) rezultă că $(\exists\beta < \alpha = \sup(\alpha_n\ /\ n \in N))\ x \in X \setminus \sigma(\beta)$, deci $(\exists\, n \in N)\ x \in X \setminus \sigma(\alpha_n)$, contradicţie. Deci, $x \in \sigma(\alpha)$. Astfel, are loc şi relaţia $\cap\,(\sigma(\alpha_n)\ /\ n \in N) \subseteq \sigma(\alpha)$, ceea ce implica $\sigma \in \Re_1(X)$. Se deduce incluziunea $\Re_2(X) \subseteq \Re_1(X)$. Invers, fie $\sigma \in \Re_1(X)$, $\alpha \in L$ şi $x \in X \setminus \sigma(\alpha)$. Dacă $(\forall\, \beta < \alpha)\ x \in \sigma(\beta)$, atunci $[0, \alpha) = \{\beta \in L\ /\ x \in \sigma(\beta)\}$, deci există un şir $(\alpha_n)_{n \in N}$ crescător şi convergent astfel încât $\alpha_n \to \alpha$ si $(\forall\, n \in N)\ x \in \sigma(\alpha_n)$, dar conform ($c_1$) de aici rezultă $x \in \sigma(\alpha)$, contradicţie. Prin urmare $(\exists\beta < \alpha)\ x \in X \setminus \sigma(\beta)$, deci $\sigma \in \Re_2(X)$. Rezultă că este adevarată şi incluziunea inversă $\Re_1(X) \subseteq \Re_2(X)$ ■

6. Propoziţie

Se definesc

$$(\forall A \in \mathcal{F}(X))\ F(A) : L \to \mathcal{P}(X)$$

$$(\forall \alpha \in L)\ F(A)(\alpha) = N_\alpha(A)$$

Sunt îndeplinite condiţiile următoare:

(i) $(\forall A \in \mathcal{F}(X))\ F(A) \in \Re_2(X)$;

(ii) Corespondenta $A \to F(A)$ defineşte o aplicaţie bijectivă F: $\mathcal{F}(X) \to \Re_2(X)$ a cărei inversă este aplicaţia G: $\Re_2(X) \to \mathcal{F}(X)$ definită prin relaţia

$$(\forall \sigma \in \Re_2(X))\ G(\sigma) = A_\sigma.$$

Demonstraţie Afirmaţia din enunţ rezultă din lema 5 şi teorema 3 ■

7. Observaţie

Propozitia 6 poate fi demonstrata direct fără a mai apela la teorema 3. Se constată că familia α-nivelurilor $(N_\alpha(A))_{\alpha \in L}$ determină în mod unic mulţimea fuzzy $A \in \mathcal{F}(X)$ prin următoarele proprietăţi exprimate numai în limbajul structurii de ordine a intervalului [0, 1] :

(7.1) $N_0(A) = X$;

(7.2) $\alpha \le \beta \Rightarrow N_\beta(A) \subseteq N_\alpha(A)$;

(7.3) $(\forall\alpha \in L)\ [x \in X \setminus N_\alpha(A) \Rightarrow (\exists\beta < \alpha)\ x \in X \setminus N_\beta(A)\ ]$.

Condiția (7.3) se bazează, esențial, pe proprietatea de densitate a lanțului ([0, 1], ≤) ■

În continuare, se introduc conceptele de intersecție și de reuniune a două elemente din mulțimea $\mathfrak{R}_1(X) = \mathfrak{R}_2(X)$ prin care se generalizează, în mod natural, operațiile de intersecție și de reuniune a două mulțimi din $\mathcal{F}(X)$.

8. Definiții

Fie $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}_1(X) = \mathfrak{R}_2(X)$, unde $\mathfrak{R}_1(X)$ și $\mathfrak{R}_2(X)$ sunt definite în paragraful 2.

(i) Pentru orice $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{R}(X)$ se numește intersecția dintre σ_1 și σ_2 elementul $\sigma_1 \cap \sigma_2 \in \mathfrak{R}(X)$ definit prin relația următoare :

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 : L \to \mathcal{P}(X)$$
$$(\forall\alpha \in L)\ (\sigma_1 \cap \sigma_2)(\alpha) = \sigma_1(\alpha) \cap \sigma_2(\alpha).$$

(ii) Pentru orice $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{R}(X)$ se numește reuniunea dintre σ_1 și σ_2 elementul $\sigma_1 \cup \sigma_2 \in \mathfrak{R}(X)$ definit prin relația următoare :

$$\sigma_1 \cup \sigma_2 : L \to \mathcal{P}(X)$$
$$(\forall\alpha \in L)\ (\sigma_1 \cup \sigma_2)(\alpha) = \sigma_1(\alpha) \cup \sigma_2(\alpha).$$

9. Lema

Fie $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{R}(X)$.

(i) Submulțimea fuzzy $A_\sigma : X \to L$, atașată intersecției $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \mathfrak{R}(X)$ este definită prin relația următoare :

$$(\forall x \in X)\ A_\sigma(x) = \min\ [A_{\sigma 1}(x), A_{\sigma 2}(x)].$$

(ii) Submulțimea fuzzy $A_\sigma : X \to L$, atașată reuniunii $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \in \mathfrak{R}(X)$ este definită prin relația următoare :

$$(\forall x \in X)\ A_\sigma(x) = \max\ [A_{\sigma 1}(x), A_{\sigma 2}(x)].$$

Prin urmare, se regăsesc definițiile lui Zadeh de intersecție $A \wedge B$ și de reuniune $A \vee B$ a două mulțimi fuzzy $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

În continuare, se indică o extensie a operației de complementară de la $\mathcal{P}(X)$ la $\mathcal{F}(X)$, bazată pe teorema 4 și pe propoziția 6.

10. Lema

Fie θ: $L \to L$, un izomorfism de mulțimi ordonate de la $(L, \leq)$ în $(L, \geq)$, deci :

(1) $\theta(0) = 1$ și $\theta(1) = 0$;

(2) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \theta(\alpha) \geq \theta(\beta)$;

(3) θ este o aplicație bijectivă.

Pentru orice $\sigma : L \to \mathcal{P}(X)$ se definește

$$C_\theta(\sigma) : L \to \mathcal{P}(X)$$

prin condiția următoare :

$$(\forall\alpha \in L)\ C_\theta(\sigma)(\alpha) = X \setminus \sigma(\theta^{-1}(\alpha)),$$

unde $\theta^{-1} : L \to L$ este inversa aplicației θ.

(i) Dacă $\sigma \in \mathfrak{R}(X)$, atunci $C_\theta(\sigma) \in \mathfrak{R}^*(X)$.

(ii) $G^*(C_\theta(\sigma)) = \theta \circ A_\sigma$, unde $G^*: \mathfrak{R}^*(X) \to \mathcal{F}(X)$ este definită conform teoremei 4 (ii), și $\circ$ este operația de compunere a aplicațiilor.

Demonstrație (i) Se presupune că $\sigma \in \mathfrak{R}(X)$, deci σ verifică (a_2), (b_2) si (c_2). Atunci, se poate arăta că $\sigma^* = C_\theta(\sigma)$ are proprietățile (a^*), (b^*) și (c^*) din paragraful 2.

(ii) Fie $x \in X$. Atunci, din definiția lui G^* rezultă

$$G^*(C_\theta(\sigma))(x) = \sup\ (\alpha \in L \,/\, x \in X \setminus \sigma(\theta^{-1}(\alpha)))$$

și din proprietățile (1)-(3) ale lui θ rezultă

$$(\theta \circ A_\sigma)(x) = \theta(A_\sigma(x)) = \theta(\sup\ (\beta \in L \,/\, x \in \sigma(\beta))) = \inf\ (\theta(\beta) \,/\, \beta \in L \text{ și } x \in \sigma(\beta)).$$

Utilizând ipotezele făcute, se poate verifica egalitatea

$$\sup\ (\alpha \in L \,/\, x \in X \setminus \sigma(\theta^{-1}(\alpha))) = \inf\ (\theta(\beta) \,/\, \beta \in L \text{ și } x \in \sigma(\beta)),$$

de unde rezultă că

$$(\forall x \in X)\ G^*(C_\theta(\sigma))(x) = (\theta \circ A_\sigma)(x)$$ ■

11. Observație

Se consideră $\mathcal{P}(X)$ scufundat în $\mathfrak{R}(X)$ și $\mathfrak{R}^*(X)$ respectiv prin injecția i definită astfel :

$$i : \mathcal{P}(X) \to \mathfrak{R}(X)$$
$$(\forall A \in \mathcal{P}(X))\ i(A) : L \to \mathcal{P}(X)$$
$$i(A)(0) = N_0(\varphi_A) = X;$$
$$i(A)(\alpha) = N_\alpha(\varphi_A) = A, \text{ pentru } \alpha \in (0, 1]$$

și prin injecția i^* definită astfel :

$$i^* : \mathcal{P}(X) \to \mathfrak{R}^*(X)$$
$$(\forall A \in \mathcal{P}(X))\ i^*(A) : L \to \mathcal{P}(X)$$
$$i^*(A)(1) = N_1^*(\varphi_A) = \Phi;$$
$$i^*(A)(\alpha) = N_\alpha^*(\varphi_A) = A, \text{ pentru } \alpha \in [0, 1).$$

Se consideră operația uzuală de complementară

$$C_X : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

definită prin condiția

$$(\forall A \in \mathcal{P}(X))\ C_X(A) = X \setminus A$$

şi aplicaţia

$$C_\theta: \mathfrak{R}(X) \to \mathfrak{R}^*(X)$$

care asociază fiecărui $\sigma \in \mathfrak{R}(X)$, elementul $C_\theta(\sigma) \in \mathfrak{R}^*(X)$ definit în enunţul lemei 10.

Atunci, $C_\theta \circ i = i^* \circ C_X$. Pe baza acestei observaţii şi a lemei 10, pentru orice izomorfism de mulţimi ordonate θ: $L \to L$ de la $(L, \leq)$ în $(L, \geq)$ se defineşte o operaţie unară pe $\mathcal{F}(X)$,

$$\Gamma_\theta : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$$

$$(\forall A \in \mathcal{F}(X))\ \Gamma_\theta(A) = \theta \circ A,$$

numită operaţia de θ-complementară a mulţimilor fuzzy din $\mathcal{F}(X)$. Denumirea introdusă este justificată de relaţia $G^* \circ C_\theta = \Gamma_\theta \circ G$, unde

$$G : \mathfrak{R}(X) \to \mathcal{F}(X)$$

şi

$$G^* : \mathfrak{R}^*(X) \to \mathcal{F}(X)$$

sunt aplicaţiile definite conform teoremelor de reprezentare, din paragrafele 3, 4 şi 6.

Complementara unei mulţimi fuzzy în sens Zadeh se obţine pentru θ: $L \to L$ definită prin condiţia $\theta(\alpha) = 1 - \alpha$, pentru orice $\alpha \in L$. Operaţiile de intersecţie, reuniune şi θ-complementară definesc pe $\mathcal{F}(X)$ o structură fundamentală atât pentru dezvoltarea teoriei, cât şi pentru aplicaţii.

12. Utilizarea teoremelor de reprezentare în fundamentarea unor operaţii algebrice

Pentru a fundamenta definiţiile unor operaţii algebrice cu mulţimi fuzzy sunt necesare noţiuni adecvate de morfism, imagine a unei mulţimi fuzzy printr-o aplicaţie şi produs cartezian al unei familii finite de mulţimi fuzzy. În acest sens, se vor aplica teoremele de reprezentare.

12.1 Conceptul de morfism în universul mulţimilor fuzzy

Universul mulţimilor fuzzy $U(\mathcal{F})$ înseamnă clasa tuturor tripletelor

$$\mathbf{A} = (X, L, A),$$

unde X este o mulţime, $L = [0, 1]$ şi $A \in \mathcal{F}(X)$.

Se poate pune problema de a introduce un concept de morfism în $U(\mathcal{F})$, care să extindă conceptul uzual de aplicaţie între mulţimi. O noţiune standard de morfism se poate obţine prin aplicarea teoremelor de reprezentare expuse anterior.

Conform teoremei 3 de reprezentare, universul mulţimilor fuzzy poate fi identificat cu clasa $U(\mathfrak{R})$ a tuturor tripletelor

$$\sigma = (\mathcal{P}(X), L, \sigma),$$

unde X este o mulţime, σ: $L \to \mathcal{P}(X)$ şi $\sigma \in \mathfrak{R}(X)$.

Fie σ şi τ din $U(\mathfrak{R})$, unde σ este definit ca mai sus si τ este definit prin tripletul

$$\tau = (\mathcal{P}(Y), L, \tau),$$

unde Y este o mulţime, τ: $L \to \mathcal{P}(Y)$ şi $\tau \in \mathfrak{R}(Y)$.

Următoarea noţiune de morfism apare naturală: un morfism de la σ în τ este o aplicaţie

$$f: \sigma(0) \to \tau(0)$$

cu proprietatea

$$(\forall \alpha \in L)\ f(\sigma(\alpha)) \subseteq \tau(\alpha).$$

Traducerea acestui concept în $U(\mathcal{F})$ utilizând teorema de reprezentare 3 conduce la noţiunea de morfism în sens Goguen dată în [2], şi anume: un morfism în $U(\mathcal{F})$ de la **A** în **B**, cu $\mathbf{A} = (X, L, A)$ şi $\mathbf{B} = (Y, L, B)$, este o aplicaţie f: $X \to Y$ cu proprietatea

$$(\forall x \in X)\ B(f(x)) \geq A(x).$$

Se procedează în mod similar, utilizând teorema 4. Conform teoremei de reprezentare 4, universul mulţimilor fuzzy poate fi identificat cu clasa $U(\mathfrak{R}^*)$ a tuturor tripletelor

$$\sigma^* = (\mathcal{P}(X), L, \sigma^*),$$

unde X este o mulţime, $\sigma^*: L \to \mathcal{P}(X)$ şi $\sigma^* \in \mathfrak{R}^*(X)$.

Fie σ^* şi τ^* din $U(\mathfrak{R}^*)$, unde σ^* este definit ca mai sus şi τ^* este definit prin tripletul

$$\tau^* = (\mathcal{P}(Y), L, \tau^*),$$

unde Y este o mulţime, $\tau^*: L \to \mathcal{P}(Y)$ şi $\tau^* \in \mathfrak{R}^*(Y)$.

În acest caz, următoarea noţiune de morfism apare naturală: un morfism de la σ^* in τ^* este o aplicaţie $f : \sigma^*(0) \to \tau^*(0)$ cu proprietatea

$$(\forall \alpha \in L)\ \ f(\sigma^*(\alpha)) \subseteq \tau^*(\alpha).$$

Prin traducerea acestui concept în $U(\mathcal{F})$ utilizând teorema de reprezentare 4 rezultă o altă noţiune de morfism, şi anume: un morfism în $U(\mathcal{F})$

de la **A** = (X, L, A) în **B** = (Y, L, B) este o aplicație $f : N_0^*(A) \to N_0^*(B)$ cu proprietatea

$$(\forall x \in N_0^*(A))\ B(f(x)) \geq A(x).$$

12.2 Imagine

Fie X și Y două mulțimi. Dacă f: X → Y este o aplicație atunci se definește

$$(\forall \sigma \in \Re^*(X))\ \Re^*(f)(\sigma) : L \to \mathcal{P}(Y)$$

astfel încât

$$(\forall \alpha \in L)\ \Re^*(f)(\sigma)(\alpha) = f(\sigma(\alpha)).$$

Se constată că

$$(\forall \sigma \in \Re^*(X))\ \Re^*(f)(\sigma) \in \Re^*(Y)$$

și corespondenta $\sigma \mapsto \Re^*(f)(\sigma)$ definește o funcție

$$\Re^*(f) : \Re^*(X) \to \Re^*(Y)$$

care verifică relația

$$\Re^*(f) \circ i^*_X = i^*_Y \circ \mathcal{P}(f),$$

unde

$$i^*_X : \mathcal{P}(X) \to \Re^*(X)$$

și

$$i^*_Y : \mathcal{P}(Y) \to \Re^*(Y)$$

sunt scufundările canonice, specificate in observația 11, iar

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$$

este corespondenta standard care atașează fiecărei submulțimi A a lui X imaginea sa $f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ prin aplicația f, adică

$$(\forall A \in \mathcal{P}(X))\ \mathcal{P}(f)(A) = f(A).$$

Pe baza celor de mai sus, se definește

$$\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$$

prin relația următoare

$$(\forall A \in \mathcal{F}(X))\ \mathcal{F}(f)(A) = G^*[\Re^*(f)(\sigma^*)],$$

unde $\sigma^* = F^*(A) \in \Re^*(X)$ si $G^* : \Re^*(Y) \to \mathcal{F}(Y)$ este bijecția corespunzătoare din teorema 4.

Mulțimea fuzzy $\mathcal{F}(f)(A)$: Y → L definită prin condiția precedentă se poate numi imaginea mulțimii fuzzy A: X → L prin aplicația f : X → Y. Se constată că

$$\mathcal{F}(f)(A)(y) = 0, \text{ daca } y \in Y \setminus f(X);$$

$$\mathcal{F}(f)(A)(y) = \sup\,(A(x) / x \in f^{-1}(y)),$$

fapt ce arată că se regăsesc formulele de calcul cunoscute [2].

12.3 Produs cartezian

Fie $\sigma = (\mathcal{P}(X), L, \sigma)$ și $\tau = (\mathcal{P}(Y), L, \tau)$ două elemente din U(ℜ). Se definește un triplet

$$\sigma \times \tau = (\mathcal{P}(X \times Y), L, \sigma \times \tau),$$

unde

$$\sigma \times \tau : L \to \mathcal{P}(X \times Y)$$

este dată prin relația

$$(\forall \alpha \in L)\ (\sigma \times \tau)(\alpha) = \sigma(\alpha) \times \tau(\alpha).$$

Se constată că σ **x** τ este, de asemenea, din U(ℜ). Conform definiției date, σ **x** τ se numește produsul cartezian dintre σ și τ în U(ℜ). După cum se va arăta în continuare, aplicând teorema de reprezentare 3 se obține în U($\mathcal{F}$) un concept asociat de produs cartezian.

Se consideră în U($\mathcal{F}$) două elemente **A** si **B** cu **A** = (X, L, A) și **B** = (Y, L, B). Se notează $\sigma = F_X(A) \in \Re(X)$ și $\tau = F_Y(B) \in \Re(Y)$, unde

$$F_X: \mathcal{F}(X) \to \Re(X) \text{ și } F_Y: \mathcal{F}(Y) \to \Re(X)$$

sunt bijecțiile standard din teorema 3 (ii).

Se definește $A \times B \in \mathcal{F}(X \times Y)$ prin relația

$$A \times B = G_{X \times Y}(\sigma \times \tau),$$

unde $G_{X \times Y}: \Re(X \times Y) \to \mathcal{F}(X \times Y)$ este inversa bijecției standard $F_{X \times Y}: \mathcal{F}(X \times Y) \to \Re(X \times Y)$ din teorema 3 (ii). De aici, rezultă că

$$A \times B : X \times Y \to L$$

și

$$(\forall (x, y) \in X \times Y)\ (A \times B)(x, y) = \min[A(x), B(y)].$$

Astfel, s-a regăsit noțiunea de produs cartezian **A x B** = ($\mathcal{P}(X \times Y)$, L, A x B) în U($\mathcal{F}$), dată în [2].

Noțiunea de produs cartezian a două mulțimi fuzzy se poate extinde prin recurenta la cazul unei familii finite de *n* mulțimi fuzzy, $\mathbf{A}_i = (X_i, L, A_i)$ cu $i = 1, 2, \ldots, n$ și $n \geq 3$. În mod similar, utilizând teorema 4, rezultă o altă noțiune de produs cartezian în U($\mathcal{F}$).

12.4 Aplicații la definirea unor operații algebrice cu mulțimi fuzzy

Conceptul de morfism în universul mulțimilor fuzzy, introdus în 12.1, permite generalizarea într-o manieră standard a diverselor noțiuni algebrice uzuale, cum ar fi, de exemplu, generalizarea noțiunii de operație n-ară pe o mulțime printr-o noțiune de operație n-ară, pe o mulțime fuzzy.

Dezvoltarea formală a noțiunilor poate fi realizată în funcție de obiectivele teoretice sau practice urmărite. În contextul aplicării mulțimilor fuzzy la rezolvarea unor probleme concrete de optimizare [3] intervine necesitatea de a extinde operații algebrice pe o mulțime X la operații algebrice pe $\mathcal{F}(X)$ (e.g. suma a doua mulțimi fuzzy sau produsul unei mulțimi fuzzy cu un scalar, pentru cazul în care X are o structura de $\mathfrak{R}$-spațiu vectorial). Explicităm aici maniera standard prin care se poate realiza această extensie, utilizând noțiunile de imagine a unei mulțimi fuzzy printr-o aplicație și produs cartezian de mulțimi fuzzy definite conform 12.2 și 12.3.

Fie X o mulțime și

$$\omega : X^n \rightarrow X$$

o operație n-ară pe X. Există o extensie standard a lui ω la o operație n-ară $\omega_{\mathcal{F}}$ pe $\mathcal{F}(X)$,

$$\omega_{\mathcal{F}} : [\mathcal{F}(X)]^n \rightarrow \mathcal{F}(X),$$

$$(\forall(A_1, A_2,..., A_n) \in [\mathcal{F}(X)]^n)$$

$$\omega_{\mathcal{F}}(A_1, A_2,..., A_n) = \mathcal{F}(\omega)(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n),$$

unde

$$\mathcal{F}(\omega) : \mathcal{F}(X^n) \rightarrow \mathcal{F}(X)$$

este aplicația definită de ω conform 12.2 prin care fiecarei mulțimi fuzzy $A \in \mathcal{F}(X^n)$ i se atașează mulțimea fuzzy $\mathcal{F}(\omega)(A) \in \mathcal{F}(X)$ (imaginea prin ω a lui A) și

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n: X^n \rightarrow L$$

este produsul cartezian al celor n mulțimi fuzzy, definit conform 12.3, prin relația următoare:

$(\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n)$ $(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n)(x) = \min[A_1(x_1), A_2(x_2),..., A_n(x_n)]$.

Bibliografie

1. **ZADEH, L. A.:** Fuzzy Sets, Information and Control, 1965, no.8, pp.338-353.
2. **NEGOIȚĂ, C. V., RALESCU, D.A.:** Simulation, Knowledge-based Computing, and Fuzzy Statistics, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1987.
3. **NEGOIȚĂ, C. V., FLONDOR, P., SULARIA, M.:** On fuzzy environment in optimization problems. În: Econ.Comp.Econom. Cybernetics Stud.Res., 1977, no.1, p.13-24.