O TEOREMĂ DE REPREZENTARE

Prof. Paul Flondor

Universitatea Politehnica București

Rezumat: Se demonstrează o teoremă de reprezentare pentru mulțimi "fuzzy", cu valori într-o mulțime parțial ordonată. Această teoremă poate sprijini punctul de vedere al modelării "incertitudinii" dinspre schema abstractă a "divizării" valorilor de adevăr (sau, mai bine, a descompunerii convenabile a schemei de înțelegere).

Cuvinte cheie: mulțime fuzzy, reprezentare, relație.

Fie R o relație între elemente din M și elemente din N; $R \subseteq M \times N$.

Pentru $A \subseteq M$, $B \subseteq N$ notăm:

$_A R = \{ y \in N; \exists x \in A, x R y \}$, $R_B = \{ x \in M; \exists y \in B, x R y \}$

Pentru simplitate se va pune $_x R$ în loc de $_{\{x\}}R$ (respectiv R_y în loc de $R_{\{y\}}$) pentru $x \in \mathbf{M}$ ($y \in \mathbf{N}$).

<u>Observație</u> Dacă R^{-1} este inversa lui R atunci

$$R_B = {}_B R^{-1}, \quad {}_A R = \bigcup_{x \in A} {}_x R, \quad R_B = \bigcup_{y \in B} R_y$$

<u>Propoziția 1</u> Pentru $x \in M$, $y \in N$:

$$x R y \Leftrightarrow y \in {}_x R \Leftrightarrow x \in R_y \qquad (1)$$

Se definesc funcțiile:

$_R F: M \to \mathbf{P}(N)$, $\quad G_R : N \to \mathbf{P}(M)$

prin:

$_R F(x) = {}_x R$, $x \in M$; $G_R(y) = R_y$, $y \in N$.

Reformulând propoziția (1) se obține:

<u>Propoziția 2</u> Pentru $x \in M$, $y \in N$:

$$x R y \Leftrightarrow y \in {}_R F(x) \Leftrightarrow x \in G_R(y) \qquad (2)$$

În particular, este clar că fiecare dintre aplicațiile $_R F$ (G_R) caracterizează complet R.

<u>Remarcă</u> Interpretăm (1) sau (2) ca "filosofia" teoremei de reprezentare.

Fie $R \subseteq M \times N$, $S \subseteq N \times P$ relații și $T = R \circ S$ *compunerea* lor. Se reamintește că

$x T z \Leftrightarrow \exists y \in N$ astfel încât $x R y$ și $y S z$.

<u>Propoziția 3</u>

$$_T F(x) = \bigcup_{y \in_R F(x)} {}_S F(y); \quad G_T(z) = \bigcup_{y \in G_S(z)} G_R(y)$$

Demonstrația revine la o verificare.

Fie acum X o mulțime și L o *mulțime parțial ordonată*. Se va nota cu $\leq$ relația de ordine pe L.

Avem: $_{\leq}F(\alpha) = \{ \beta \in L ; \alpha \leq \beta \}$,
$G_{\leq}(\beta) = \{ \alpha \in L ; \alpha \leq \beta \}$

<u>Remarcă</u> Este, poate, sugestivă notația:
$_{\leq}F(\alpha) = [\alpha \to$, $G_{\leq}(\alpha) = \leftarrow \alpha]$ și cuplul $G_{\leq}$, $_{\leq}F$ prin] [.

Este natural să se numească $_{\leq}F$ și $G_{\leq}$ *funcții "nivel"*.

Fie acum $R \subseteq X \times L$ o relație.

Se consideră relația $T = R \circ \leq$ (evident $T \subseteq X \times L$).

Se vor numi $_T F$, G_T funcții "nivel" ale relației R (în literatură acest termen este aplicat mai ales funcției G_T). Avem:

$x \in G_T(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in {}_T F(x) \Leftrightarrow xT\alpha \Leftrightarrow \exists \gamma \in L$ cu $x R \gamma$ și $\gamma \leq \alpha$.

<u>Observație</u> Se mai spune că G_T *"reprezintă"* R.

<u>Problemă</u>

Fie $T \subseteq X \times L$ o *relație*. Să se determine $R \subseteq X \times L$ așa încât $T = R \circ \leq$ (sau, altfel spus, G_T să *reprezinte* R).

Această problemă este, într-o formulare "largă", problema reprezentării. În general, se caută soluții într-o anumită *clasă* de relații (de exemplu, relații de tip "funcție"). Teoremele de existență (și unicitate) pentru soluțiile problemei de mai sus se numesc *teoreme de reprezentare* (Negoiță - Ralescu).

Fie $f : X \to L$ o funcție și $R_f \subseteq X \times L$ graficul ei.

Se obține pentru $T = R_f \circ \leq$ caracterizarea:

$$x \, T \, \alpha \Leftrightarrow f(x) \leq \alpha \qquad (3)$$

Deci $\quad {}_T F(x) = \{ \alpha \in L ; f(x) \leq \alpha \}, x \in X$

$G_T(\alpha) = \{ x \in X; f(x) \leq \alpha \}, \alpha \in L$

<u>Propozitia 4</u> (i) G_T este *crescatoare* (i.e. $\alpha \leq \beta \Rightarrow G_T(\alpha) \subseteq G_T(\beta)$).

(ii) Pentru orice $x \in X$ mulțimea ${}_T F(x)$ are *cel mai mic element.*

<u>Demonstrație</u> (i) $f(x) \leq \alpha$ și $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(x) \leq \beta$.

(ii) $f(x)$ este cel mai mic element din ${}_T F(x)$.

<u>Observație</u> $\alpha \in {}_T F(x)$ și $\alpha \leq \beta \Rightarrow \beta \in {}_T F(x)$.

<u>Teorema (de reprezentare)</u>

Fie $T \subseteq X \times L$ o relație astfel încât:

(i) G_T este *crescatoare.*

(ii) Pentru orice $x \in X$, ${}_T F(x)$ are cel mai mic element.

Atunci există și este unică o funcție $f : X \to L$ cu $T = R_f \circ \leq$ (deci G_T *reprezintă* R_f).

<u>Demonstratie</u> Se definește $f(x)$ = cel mai mic element în ${}_T F(x)$ pentru orice $x \in X$.
Se deduce că $\alpha \in {}_T F(x) \Leftrightarrow f(x) \leq \alpha$
Într-adevar, implicația "$\Rightarrow$" este evidentă din definiția funcției f.
Pentru implicația "$\Leftarrow$" se observă că, dacă $\alpha \in {}_T F(x)$ și $\alpha \leq \beta$, atunci $\beta \in {}_T F(x)$ (căci $\alpha \in {}_T F(x) \Rightarrow x \in G_T(\alpha) \Rightarrow x \in G_T(\beta) \Rightarrow \beta \in {}_T F(x)$, folosind condiția (i)).
În acest fel, existența este demonstrata. Unicitatea este imediată.

<u>Exemplu 1</u> Dacă L este *bine ordonată,* condiția (ii) din teoremă se poate înlocui cu
(ii) Pentru orice $x \in X$, ${}_T F(x) \neq \varnothing$.

Un asemenea caz interesant în aplicații este $L = \mathbf{N}$. (în acest caz, funcțiile $f: X \to \mathbf{N}$ se numesc în literatura "multiset" sau "bag").

<u>Exemplu 2</u> Fie $L = [0, 1]$ cu ordinea naturală.

În acest caz, condițiile din teorema de reprezentare pot fi reduse la:
(*) $(\forall)\, \alpha \in [0, 1]$
$$G_T(\alpha) = \bigcap_{\gamma > \alpha} G_T(\gamma).$$

(plus "convenția" $G_T(1) = \bigcap_{\varnothing} = X$).

<u>Demonstrație</u> Dacă se presupune (*) se deduce imediat că G_T este *crescătoare* ($\alpha \leq \beta$ și $\gamma > \beta \Rightarrow \gamma > \alpha$).
Cum $x \in G_T(1) \Rightarrow 1 \in {}_T F(x)$, pentru orice $x \in X$, rezultă că ${}_T F(x) \neq \varnothing$, $(\forall)\, x \in X$.
Mai mult, dacă $\alpha \in {}_T F(x)$ și $\alpha \leq \beta$, atunci $\beta \in {}_T F(x)$ (s-a arătat cum rezultă aceasta din monotonia lui G_T).
Rezultă că dat $x \in X$, ${}_T F(x)$ este un interval de tip $(\alpha_x, 1]$ sau $[\alpha_x, 1]$.
Dacă ${}_T F(x) = (\alpha_x, 1]$, atunci $x \in G_T(\beta)$ pentru orice $\beta > \alpha_x$ deci $x \in G_T(\alpha_x)$ (conform *) și deci $\alpha_x \in {}_T F(x)$, contradicție.
Astfel, ${}_T F(x)$ sunt intervale *închise* $[\alpha_x, 1]$ deci au cel mai mic element.
Reciproc, dacă sunt îndeplinite (i), (ii) din teorema de reprezentare se deduce imediat ca ${}_T F(x) = [\alpha_x, 1]$ deci $G_T(1) = X$. Dacă incluziunea $G_T(\alpha) \subseteq \bigcap_{\gamma > \alpha} G_T(\gamma)$ ar fi strictă, atunci

pentru $y \in \bigcap_{\gamma > \alpha} G_T(\gamma)$, $y \notin G_T(\alpha)$ am

avea $\gamma \in {}_T F(y)$ pentru orice $\gamma > \alpha$ și deci $\alpha \in {}_T F(y)$ contradicție (${}_T F(y)$ este interval închis).

<u>Observație</u> Dacă $R \subseteq M \times N$ este o relație, se notează $\bar{R}$ complementara mulțimii R în $M \times N$. Avem

$x \, \bar{R} \, y \Leftrightarrow$ x nu este în relație cu y , deci

$${}_x\bar{R} = N - {}_xR, \qquad \bar{R}_y = M - R_y$$

pentru orice $x \in M$, $y \in N$.

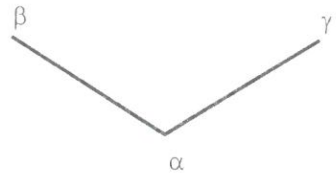
Dacă se notează $P(M) \xrightarrow{c} P(M)$, $P(N) \xrightarrow{c} P(N)$ aplicațiile (bijective) de trecere la complementară se poate scrie:

$${}_{\bar{R}}F = C \circ {}_R F , \qquad G_{\bar{R}} = C \circ G_R.$$

Folosind aceste observații, se pot obține teoreme de reprezentare în cazul X × L considerând (cu notațiile teoremei de reprezentare) funcția $G_{\bar{\gamma}}$. În cazul în care L este *total* ordonată, se obțin teoreme de reprezentare pentru nivelurile *deschise* (vezi 2- bibliografie). Nu se va intra în detalii.

În încheiere, se prezintă un exemplu "concret".

Exemplu 3 Fie L mulțimea parțial ordonată, dată în diagrama Hasse de



O relație $T \subseteq X \times L$ satisface condițiile teoremei de reprezentare dacă şi numai dacă :
$G_{\gamma}(\alpha) = G_{\gamma}(\beta) \cap G_{\gamma}(\gamma)$ şi $X = G_{\gamma}(\beta) \cup G_{\gamma}(\gamma)$.

Bibliografie

1. **NEGOIȚĂ, C. V., RALESCU, D.**: Simulation, Knowledge-Based Computing and Fuzzy Statistics, 1987
2. **NEGOIȚĂ, C. V., FLONDOR, P., SULARIA M.**: On Fuzzy Environment in Optimization Problems. În: Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, 1977, vol. 13-24.
3. **BRANIMIR, G., TEPAVCEVIČ, A.**: Partially ordered and relational valued fuzzy relations I. În: Fuzzy Sets and Systems, 1995, 72.
4. **KIYOHIKO, U., MASAYUKI FUJISE**: Fuzzy Inference Based on Families of α-Level Sets. IEEE Transctions of fuzzy systems, 1993, vol.1, nr.2.