O ABORDARE FUNCŢIONALĂ A PROBLEMEI AGREGĂRII ESTIMĂRILOR EXPERT

dr. mat. Vsevolod Arnăut

Institutul de Matematică

Academia de Ştiinţe

Republica Moldova

Rezumat: Lucrarea se referă la unele momente legate de expertiza colectivă. După o scurtă caracteristică a acesteia, sunt enumerate etapele principale ale expertizei şi apoi analizate unele momente legate de agregarea estimărilor expert, în vederea obţinerii unei caracteristici generale a obiectelor estimate. În încheiere, sunt prezentate rezultate ale aplicării funcţiilor asociative de mediere la combinarea mulţimilor fuzzy.

Cuvinte cheie: expert, expertiză colectivă, criteriu, estimare, agregare.

1. Introducere

Procesele decizionale au generat, prin importanţa şi necesitatea lor, o serie întreagă de proceduri decizionale. O clasă aparte de proceduri decizionale o constituie expertiza colectivă.

În forma generală şi neformalizată, situaţia expertizei colective poate fi descrisă în felul următor [1]. Există un grup de persoane de care depinde soluţia şi există o mulţime de alternative, dintre care trebuie aleasă alternativa colectivă. Fiecare expert îşi are opinia proprie privind selectarea alternativelor şi posedă, de asemenea, mecanismul de influenţare a generării deciziei colective. Acest fapt determină procedura de obţinere a soluţiei colective din soluţii individuale.

Expertiza colectivă include următoarele etape [2]:

- crearea grupului de administrare, ale cărui obligaţii constau în organizarea procesului de expertiză cu prelucrarea şi analiza ulterioară a informaţiei obţinute;
- elaborarea modelului criterial;
- formarea grupului de experţi;
- procesul de orientare a experţilor, acesta fiind un fel de "acordare a aparatelor vii";
- efectuarea procedurii de estimare;
- prelucrarea şi analiza estimărilor expert;
- elaborarea documentului final.

Procedura de estimare este o componentă importantă a unei expertize colective. În caz general, procedura de estimare este o aplicaţie O a mulţimii M de estimat într-o oricare mulţime P liniar ordonată, ale cărei elemente pot fi supuse operaţiilor de comparare, necesare scoaterii în evidenţă a intentităţii anumitor proprietăţi ale mulţimii M. Aplicaţia O poate fi numită operator al proprietăţii, iar mulţimea P - structură a proprietăţii. Cu alte cuvinte, estimarea este o reprezentare a elementelor mulţimii M cu ajutorul elementelor mulţimii P. Fie $\{O_i\}(i=\overline{1,n})$ - mulţimea de operatori ai proprietăţilor şi, respectiv, $\{P_i\}(i=\overline{1,n})$ - mulţimea de structuri ale proprietăţilor. Atunci, aplicaţia:

$$O: M \to P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n,$$

definită în modul prezentat mai jos

$$Om = (O_1 m, O_2 m, \ldots, O_n m)$$

este reprezentarea elementelor mulţimii M cu ajutorul elementelor mulţimii de structură a proprietăţilor $P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$. De regulă, mulţimile $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sunt submulţimi ale axei reale R.

Procedura de estimare presupune cunoaşterea domeniului de aplicaţie, adică existenţa şi utilizarea experinţei anterioare. Cu alte cuvinte, persoana interesată într-o astfel de estimare, trebuie să posede în arsenal o mulţime de situaţii similare, numite situaţii-etalon, cu un sistem de relaţii, definit pe ea. În cazul deficienţei de situaţii-etalon, se apelează la experţi-persoane înzestrate cu o asfel de experienţă. În ultimă instanţă, estimarea efectuată de expert depinde de mulţimea situaţiilor etalon, de care "dispune" expertul. De aceea, pentru o mai mare obiectivitate, estimarea se va face, nu doar de către un singur expert, ci de un grup de experţi.

În cele ce urmează, ne vom referi nemijlocit la procesarea estimărilor expert. Vom presupune că, în cadrul expertizei, se utilizeaza estimări numerice. Ca rezultat al procesului de estimare se obţine, de regulă, o secvenţă de numere, fiecare dintre ele fiind "măsurarea" unei esenţe de către un expert. De fapt, interesându-ne un tablou general care este o îmbinare a tuturor opiniilor, se recurge adeseori la o agregare a numerelor date, ce duce la o secvenţă mai mică, dar care concentrează deja în sine opinia generală a mai multor experţi.

2. Agregarea în baza aplicării funcţiilor

Presupunem că avem secvenţele $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ şi $A'=\{a'_1,a'_2,\ldots,a'_k\}$ unde $k<m$.

Def. Regula conform căreia secvenţei $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ i se pune în corespondenţă secvenţa $A'=\{a'_1, a'_2,\ldots,a'_k\}$ se numeşte agregare.

Def. Agregarea se numeşte totală dacă secvenţa-imagine obţinută constă dintr-un singur element.

Adesea, procedeul de agregare se bazează pe definirea unui set de funcţii, numit mulţimea funcţiilor de agregare, care se aplică secvenţei obişnuite în rezultatul expertizei. În acest scop, se aplică urmatorul procedeu. Fie mulţimea funcţiilor de agregare $M_A=\{M^1,M^2,\ldots,M^q\}$, unde

$$M^i=\left\{f_1^i\left(x_1,\ldots,x_{n_1}^i\right), f_2^i\left(x_1,\ldots,x_{n_2}^i\right),\ldots,f_{k_i}^i\left(x_1,\ldots,x_{n_k}^i\right)\right\}$$

este submulţimea de rangul i, a mulţimii funcţiilor de agregare şi, fie că avem secvenţa de agregat, $A=\left\{a_1,a_2,\ldots,a_{j+1},\ldots,a_{j+n_p},a_{j+n_p+1},\ldots,a_m\right\}$. Fiecărui element al secvenţei i se atribuie un rang în felul următor:

a) elementelor secvenţei iniţiale li se atribuie rangul 0;
b) dacă elementul a al secvenţei necesare a fi agregată se obţine ca rezultat al aplicării unei funcţii de rangul i, atunci acestui element i se atribuie rangul $r(a)=i$.

Din secvenţa A, se selectează o semisecvenţă de n_p numere $\left\{a_{j+1},\ldots,a_{j+n_p}\right\}$ şi ei i se aplică funcţia

$$f_p^s\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n_p}\right),$$

unde

$$s=\max\left(r\left(a_{j+1}\right),\ldots,r\left(a_{j+n_p}\right)\right)+1,$$

obţinând $a'_{j+1}=f_p^s\left(a_{j+1},\ldots,a_{j+n_p}\right)$

Înlocuim această semisecvenţă cu a'_{j+1} şi obţinem o nouă secvenţă $A'=\left\{a_1,a_2,\ldots,a'_{j+1},\ldots,a_{m-n+1}\right\}$. Aplicând iterativ acest procedeu, micşorăm treptat lungimea secvenţei iniţiale. Un astfel de procedeu îl vom numi procedeu de agregare în baza aplicării funcţiilor.

Rangul mulţimii funcţiilor de agregare este numărul submulţimilor de rang.

Def. Submulţimea funcţiilor de agregare de rangul i se numeşte omogenă, dacă arităţile tuturor funcţiilor ceîi aparţin sunt egale, adică

$$M^i=\left\{f_1^i\left(x_1,\ldots,x_{n^i}\right), f_2^i\left(x_1,\ldots,x_{n^i}\right),\ldots,f_{k_i}^i\left(x_1,\ldots,x_{n^i}\right)\right\}$$

n_i numindu-se dimensiuna submulţimii de rang.

Def. Mulţimea funcţiilor de agregare se numeşte omogenă după ranguri, dacă submulţimile de rang sunt omogene.

Def. Mulţimea funcţiilor de agregare se numeşte omogenă, dacă dimensiunile submulţimilor de rang sunt egale. Dimensiunile submulţimilor de rang determină dimensiunea mulţimii funcţiilor de agregare.

Def. Mulţimea omogenă a funcţiilor de agregare M_A se numeşte corectă în raport cu secvenţa $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ dacă, aplicând-o iterativ, obţinem agregare totală.

Af. 1. Pentru ca mulţimea omogenă a funcţiilor de agregare să fie corectă în raport cu consecutivitatea $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ trebuie să fie satisfăcută condiţia $(n\text{-}1)/(m\text{-}1)$, unde n este dimensiunea mulţimii omogene a funcţiilor de agregare.

Dem. Dat fiind faptul că, la fiecare agregare, secvenţa se micşorează cu $(n\text{-}1)$ elemente, este simplu de remarcat că $(m\text{-}1)=k(n\text{-}1)$, deci $(n\text{-}1)/(m\text{-}1)$.

De aici, pentru $n=2$ obţinem drept consecinţă faptul că mulţimile omogene ale funcţiilor de agregare de două variabile sunt corecte pentru orice secvenţă.

Af. 2. Numărul claselor de mulţimi omogene corecte ale funcţiilor de agregare este egal cu numărul de divizori ai lui $(m\text{-}1)$, unde m este numărul de elemente ale secvenţei care necesită agregare.

Dem. Deoarece $(n\text{-}1)/(m\text{-}1)$, unde n este dimensiunea mulţimii omogene de funcţii de agregare, rezultă că, reunind toate mulţimile omogene de funcţii de agregare de dimensiunea n într-o clasă, vom obţine atâtea clase câţi divizori are $(m\text{-}1)$.

Def. Mulţimea funcţiilor de agregare se numeşte simplă, dacă toate submulţimile de rang constau din una şi aceeaşi funcţie.

În cele ce urmează, ne vom referi numai la mulţimi simple de funcţii de agregare, pe care le vom identifica cu funcţiile de agregare ce le generează.

Def. Funcţia de agregare satisface o asociativitate completă dacă sunt satisfăcute relaţiile:

$$f\left(f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right),x_{n+1},\ldots,x_{2n-1}\right)=$$
$$f\left(x_1,f\left(x_2,\ldots,x_{n+1}\right),\ldots,x_{2n-1}\right)=$$
$$=\ldots=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},f\left(x_n,x_{n+1},\ldots,x_{2n-1}\right)\right).$$

În cele ce urmează, vom considera că funcţia

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$$

este corectă în raport cu secvenţa supusă agregării

$$\left\{a_1,a_2,\ldots,a_m\right\}.$$

Af. 3. Există $(m\text{-}n\text{+}1)(m\text{-}2n\text{+}2)\ldots(m\text{-}kn\text{+}k)$ posibilităţi de agregare totală a secvenţei

$\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ cu ajutorul funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ respectând ordinea elementelor secvenței, unde $k=(m-1)/(n-1)$.

Dem. Notăm prin f_m numărul posibilităților de agregare totală a unei secvențe de lungimea m. Există $(m-n+1)$ posibilități de extragere a unei semisecvențe de lungimea n dintr-o secvență de lungimea m. De aceea, pentru f_m obținem $f_m=(m-n+1)\ f_{m-n+1}$. Aplicând iterativ raționamente analogice, obținem:

$$f_m=(m-n+1)\ f_{m-n+1}=(m-n+1)(m-2n+2)\ f_{m-2n+2}=$$

$$=(m-n+1)(m-2n+2)(m-3n+3)\ f_{m-3n+3}=\ldots=$$

$$=(m-n+1)(m-2n+2)(m-3n+3)\ldots(m-kn+k)$$

Af. 4 Există $m!\ =(m-n+1)(m-2n+2)\ \ldots(m-kn+k)$ posibilități de agregare totală a secvenței $\{a1,a2,\ldots,am\}$ cu ajutorul funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fără respectarea ordinilor elementelor secvenței.

Dem. Deoarece există $m!$ permutări ale secvenței date și fiindcă fiecare permutare permite $(m-n+1)(m-2n+2)\ \ldots(m-kn+k)$ posibilități de agregare totală cu ajutorul funcției $f(x_1,\ldots,x_n)$ respectând ordinea elementelor secvenței, rezultă că numărul total al posibilităților de agregare totală a secvenței este egal cu $m!=(m-n+1)(m-2n+2)\ldots(m-kn+k)$.

Vom nota prin A_f mulțimea valorilor a_f obținute ca rezultat al agregării totale a secvenței date cu ajutorul funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Def. Vom numi coeficient de agregare a funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ următorul parametru

$$p_a^f = 1 - \frac{\max\limits_{A_f} a_f - \min\limits_{A_f} a_f}{\max\limits_i a_i - \min\limits_i a_i}$$

Af. 5. Orice funçtie asociativă și comutativă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are coeficientul de agregare egal cu unu.

Dem. Să arătăm că, la agregarea cu funcții asociative, orice expresie care înfăptuiește agregarea este egală cu expresia obținută prin aplicarea funcției de agregarea începând cu partea stângă, mișcându-se treptat spre partea dreaptă a secvenței, adică

$$f(\ldots f(f(a_1, \ldots, a_n), a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})\ldots, a_{m-n+2}, \ldots, a_m)).$$

Demonstrarea o vom face prin inducție. Pentru $m=(n-1)+1$, corectitudinea afirmației o vom face prin inducție. Pentru $m=2(n-1)+1$ valoarea $f(f(a_1, \ldots, a_n), a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})$ se obține aplicând definiția asociativității. Să presupunem că afirmația este corectă pentru $m=k(n-1)+1$. Vom arăta că ea este corectă și pentru $m=(k+1)(n-1)+1$. Să luăm orice expresie care înfăptuiește agregarea de lungimea respectivă. În ea vom găsi neapărat o semiexpresie de forma $f(a_p, \ldots, a_{p+n-1})$. O vom nota prin a_p^*. Obținem astfel o secvență de lungimea $m=k(n-1)+1$. Pentru ea este valabilă afirmația. Dacă $p=1$ avem:

$$f(\ldots f(a_1^*, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})\ldots), a_{m-n+2}, \ldots, a_m))$$

și substituind pe a_p^* prin $f(a_1,\ldots,a_n)$ obținem

$$f(\ldots f(f(a_1, \ldots, a_n), a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})\ldots, a_{m-n+2}, \ldots, a_m)).$$

Dacă $p\neq1$, atunci, în expresia

$$f(\ldots f(f(a_1,\ldots,a_n), a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})\ldots a_p^* \ldots), a_{m-n+2}, \ldots, a_m)).$$

substituind pe a_p^* prin $f(a_p, \ldots, a_{p+n-1})$, iar pe $f(a_1,\ldots,a_n)$ prin a_p^* obținem o expresie care poate fi adusă la forma propusă. Substituind pe a_p^* prin $f(a_1,\ldots,a_n)$ avem, în final, expresia $f(\ldots f(f(a_1, \ldots, a_n), a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})\ldots, a_{m-n+2}, \ldots, a_m))$.

În concluzie, toate procedurile de agregare a secvenței $\{a_1,\ldots, a_m\}$ cu funcții asociative dau una și aceeași valoare dacă se respectă ordinea elementelor secvenței în procesul de agregare. Funcția de agregare fiind comutativă, la orice permutare a secvenței date vom obține aceeași valoare. Aceasta înseamnă că mulțimea de valori obținute, ca rezultat al agregării totale a secvenței date, constă dintr-un singur element. De aceea, coeficientul de agregare este egal cu unu.

Af. 6. Dacă în calitate de funcție de agregare luăm funcția liniară

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n$$
$$unde\ b_i \geq b_j \geq 0\ pentru\ i \geq j$$

atunci coeficientul de agregare pentru secvența $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se calculează cu ajutorul expresiei

$$p_a^f = 1 - \frac{A - B}{\max\limits_i a_i - \min\limits_i a_i}$$

unde A se obține la agregarea secvenței ordonate în ordine descrescătoare, iar B se obține la agregarea secvenței ordonate în ordine crescătoare.

$$f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, \ldots, a_{i_j}, \ldots, a_{i_n}) - f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_j}, \ldots, a_{i_k}, \ldots, a_{i_n}) =$$
$$b_k a_{i_k} + b_j a_{i_j} - b_k a_{i_j} - b_j a_{i_k} = (b_j - b_k)(a_{i_j} - a_{i_k}).$$

Deoarece $b_j - b_k \geq 0$, această expresie este mai mare sau egală cu zero, atunci când de pe locul cu un rang mai mare j, se transferă un element mai mare pe locul cu un rang mai mic k. Aceeași expresie este mai mică sau egală cu zero, în cazul când de pe locul cu un rang mai mare j se transferă un element mai mic pe locul cu un rang mai mic k.

Fie $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\}$ o oarecare permutare a secvenței date. Pentru ea avem

$$f(a_{i_1},\ldots,a_{i_k},\ldots,a_{i_j},\ldots,a_{i_n})\le f(a^1_{i_1},\ldots,a^1_{i_k},\ldots,a^1_{i_j},\ldots,a^1_{i_n})\le$$
$$f(a^2_{i_1},\ldots,a^2_{i_k},\ldots,a^2_{i_j},\ldots,a^2_{i_n})\le$$
$$\le\ldots\le f(a^n_{i_1},\ldots,a^n_{i_k},\ldots,a^n_{i_j},\ldots,a^n_{i_n})=A$$

unde $(a^k_{i_1},a^k_{i_2},\ldots,a^k_{i_n})(k\le n)$ este secvenţa ale cărei prime k elemente sunt dispuse în ordine descrescătoare. Astfel funcţia de agregare are valoarea maximă în cazul permutării secvenţei iniţiale, ordonate în ordine descrescătoare.

În mod analogic avem

$$f(a_{i_1},\ldots,a_{i_k},\ldots,a_{i_j},\ldots,a_{i_n})\le f(a^1_{i_1},\ldots,a^1_{i_k},\ldots,a^1_{i_j},\ldots,a^1_{i_n})\le$$
$$f(a^2_{i_1},\ldots,a^2_{i_k},\ldots,a^2_{i_j},\ldots,a^2_{i_n})\le$$
$$\le\ldots\le f(a^n_{i_1},\ldots,a^n_{i_k},\ldots,a^n_{i_j},\ldots,a^n_{i_n})=B$$

unde $(a^k_{i_1},a^k_{i_2},\ldots,a^k_{i_n})(k\le n)$ este secvenţa, ale cărei prime k elemente sunt ordonate în ordine descrescătoare. În acest fel, funcţia de agregare obţine valoarea minimă în cazul permutării secvenţei iniţiale, ordonată în ordine crescătoare. De aceea, pentru coeficientul de agregare avem

$$p^f_a=1-\frac{A-B}{\max\limits_i a_i-\min\limits_i a_i}$$

Def. Funcţia $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ se numeşte de mediere dacă

$$m\le f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le M$$

unde $m=min\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ şi $M=max\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Def. Vom numi acest procedeu de agregare prin mediere dacă, în calitate de funcţie de agregare, se ia o funcţie de mediere.

În procesul de agregare pot fi implicate o serie de axiome reprezentând cristalizarea unor cerinţe impuse procesului de agregare. Vom exprima aceste axiome bazându-ne pe proprietăţile funcţiilor de mediere [3].

Fie $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ o funcţie de mediere. Presupunând că 0 şi 1 sunt, respectiv, valoarea minimă şi valoarea maximă admise la estimare, avem următoarea axiomă.

Ax. 1. $f(0,0,\ldots,0)=0$ şi $f(1,1,\ldots,1)=1$.

Dacă presupunem că vectorii x şi y se află în relaţia $x\ge y$, în sensul comparării componentă cu componentă, ar însemna că obiectul reprezentat prin vectorul x conform opiniei unor experţi, este mai bun decât obiectul reprezentat prin vectorul y. Deci, în virtutea faptului că o agregare reprezintă o însumare a opiniilor exprimate de toţi experţii, este natural ca agregarea efectuată pe vectorul x să fie mai bună decât cea efectuată pe vectorul y şi, ca rezultat, este firească următoarea axiomă:

Ax. 2. $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ge f(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ pentru $x\ge y$. Această aserţiune poartă denumirea de axiomă a monotoniei.

Făcând abstracţie de unele momente critice, vom presupune că variaţia neînsemnată a opiniei unui expert influenţează foarte puţin opinia generală despre subiectul dat. Acest moment îşi găseşte exprimare în următoarea axiomă.

Ax. 3. Funcţia de mediere este o funcţie continuă. Aceasta este axioma continuităţii.

3. Agregarea estimărilor fuzzy

În conformitate cu ideologia lui Bellman şi Zadeh [4], luarea deciziilor în condiţii fuzzy are loc în baza operaţiei de intersecţie a mulţimilor fuzzy, care definesc restricţiile cu mulţimile fuzzy ce definesc obiectivele. În condiţii fuzzy, ne convine să considerăm echivalente restricţiile şi obiectivele. Astfel, generalizând, vom considera, de fapt, că luarea deciziilor în condiţii fuzzy are loc în baza compoziţiei mulţimilor fuzzy care definesc obiectivele.

În cele ce urmează, vom considera că obiectivul general G constă dintr-o ierarhie de obiective, la al cărei nivel de jos există m obiective, corespunzând unor m criterii de estimare C_i. Când fiecare obiect o din mulţimea de obiecte O este estimat în conformitate cu criteriul C_i, pe scara S_i se obţine $s_i\,(o)$. De criteriul C_i este legat obiectivul G_i, definit ca o mulţime fuzzy al cărei univers este scara S_i. Mulţimea fuzzy care corepunde obiectivului G_i are funcţia de apartenenţă egală cu μ_{G_i}. Fiecare obiectiv G_i generează pe mulţimea obiectelor o mulţime fuzzy O_{G_i} cu funcţia de apartenenţă $\mu_i(o)=\mu_{G_i}(s_i(o))$ ce desemnează nivelul de compatibilitate a obiectelor cu obiectivul G_i. Obiectivul general G poate fi exprimat printr-o categorie complicată, a cărui mulţime de bază îl reprezintă produsul cartezian $S_1\times S_2\times\ldots\times S_m$. De aceea, pentru a obţine gradul de compatibilitate al obiectivului o cu obiectivul general este necesară agregarea totală a secvenţei $\{\mu_1(o),\mu_2(o),\ldots,\mu_m(o)\}$. Aşadar, pentru a obţine compoziţia mulţimilor fuzzy O_{G_i}, compoziţie definind mulţimea fuzzy ce desemnează nivelul de compatibilitate al obiectelor cu obiectivul general, efectuăm o agregare totală, pe care o vom defini pe baza funcţiilor de agregare corecte în raport cu secvenţa $\{\mu_1(o),\mu_2(o),\ldots,\mu_m(o)\}$. În calitate de funcţii de agregare, vom considera funcţiile de mediere asociative, comutative, monotone şi continui. În punctul precedent, am văzut că astfel de funcţii au coeficientul de agregare egal cu 1. De aici, concluzia că procedeul de agregare nu depinde de ordonarea secvenţei iniţiale şi de ordinea aplicării funçtiei de agregare. Aceasta ne oferă posibilitatea de a defini compoziția mulțimilor fuzzy O_{G_i} pe bază recursivă cu condiția ca funcția de agregare $r(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ să fie corectă în raport cu secvența $\{\mu_1(o), \mu_2(o), \ldots, \mu_m(o)\}$.

$$r^{(1)} = r(\mu_1, \mu_2(o), \ldots, \mu_k(o));$$
$$r^{(2)} = r(r^{(1)}, \mu_{k+1}(o), \ldots, \mu_{2k-1}(o));$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r^{(i)} = r(r^{(i-1)}, \mu_{(i-1)k-i+3}(o), \ldots, \mu_{ik-i+1}(o));$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu_G(o) = r^{(n)} = r(r^{(n-1)}, \mu_{m-k+2}(o), \ldots, \mu_m(o))$$

unde $n = (m-1)/(k-1)$.

În punctul precedent, am văzut că numărul claselor de funcții corecte de agregare în raport cu secvența $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ este egal cu numărul de divizori ai lui $(m-1)$. Funcțiile de mediere asociative, comutative, monotone și continui au forma [5].

$$med(x_1, \ldots, x_m, \alpha) =$$
$$\begin{cases} \max(x_1, \ldots, x_m), daca & \max(x_1, \ldots, x_m) \le \alpha \\ \alpha, & daca \min(x_1, \ldots, x_m) \le \alpha \le \max(x_1, \ldots, x_m) \\ \min(x_1, \ldots, x_m), daca & \min(x_1, \ldots, x_m) \ge \alpha \end{cases}$$

Această subclasă a funcțiilor de agregare, corecte în raport cu secvența $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, este o reuniune de funcții, dependentă de parametrul α.

Af. 7. Compoziția mulțimilor fuzzy, organizată recursiv în baza funcțiilor de mediere asociative, comutative, monotone și continui, depinde doar de parametrul α.

Dem. Fie $med(x_1, \ldots, x_m, \alpha)$ o funcție de agregare corectă în raport cu secvența $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Să demonstrăm că rezultatul agregării cu o astfel de funcție coincide cu rezultatul agregării efectuate cu ajutorul funcției $med(x_1, \ldots, x_m, \alpha)$. Deoarece coeficientul de agregare al funcțiilor comutative și asociative este egal cu unu, rezultă că ordinea agregării acestei secvențe nu are nici o importanță. Așadar, vom considera că secvența este ordonată în ordine crescătoare și vom acționa asupra ei recursiv, începând cu partea stângă. Vom considera trei cazuri:

a) $\max_i (a_1, a_2, \ldots, a_m) \le \alpha$. Drept rezultat al aplicării recursive a funcției $med(x_1, \ldots, x_k, \alpha)$ asupra secvenței, vom avea valoarea argumentului x_k. De aceea, valoarea ultimei aplicări va fi $a_m = \max_i (a_1, \ldots, a_m) = med(x_1, \ldots, x_m, \alpha)$.

b) $\min_i (a_1, a_2, \ldots, a_m) \ge \alpha$. Drept rezultat al aplicării recursive a funcției $med(x_1, \ldots, x_k, \alpha)$ asupra secvenței, vom avea valoarea argumentului x_1. De aceea, valoarea ultimei aplicări va fi $a_1 = \min(a_1, \ldots, a_m) = med(x_1, \ldots, x_m, \alpha)$.

c) $\max_i (a_1, a_2, \ldots, a_m) \le \alpha \le \min (a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Să divizăm secvența dată în semisecvențe de lungimea $(k-1)$ începând cu partea dreaptă și să le numerotăm începând cu partea stângă. Există o semisecvență pentru care extremitatea de stânga este mai mică sau egală cu α, iar extremitatea de dreapta este mai mare sau egală cu α. Să presupunem că ea are indicele p. Atunci, pentru toate $(p-1)$ semisecvențe drept rezultat al aplicării recursive a funcției $med(x_1, \ldots, x_k, \alpha)$ vom avea valoarea argumentului x_k, deoarece $\max_i (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jk}) \le \alpha \ pentru \ j \le p-1$.

Obținem valoarea $a_{(p-1)k-p+2}$ care este extremitatea de dreapta a semisecvenței $(p-1)$. Aplicând, în continuare, funcția $med(x_1, \ldots, x_k, \alpha)$ obținem valoarea α deoarece, după cum s-a menționat, la etapa p avem

$$\max_i (a_{(p-1)k-p+2}, \ldots, a_{pk-p+1}) \le \alpha \le \min_i (a_{(p-1)k-p+2}, \ldots, a_{pk-p+1})$$

O aplicare pe mai departe a funcției $med(x_1, \ldots, x_k, \alpha)$ ne dă valoarea α deoarece semisecvențele rămase se află spre dreapta de α. Astfel, drept rezultat al agregării cu ajutorul funcției $med(x_1, \ldots, x_k, \alpha)$ obținem valoarea $\alpha = med(x_1, \ldots, x_k, \alpha)$.

Așadar, toate funcțiile de agregare corecte, dependente de α, dau același rezultat de agregare.

De remarcat că operația de compoziție a mulțimilor fuzzy în scopul luării deciziilor în condiții fuzzy, propusă de Bellman și Zadeh, se obține ca un caz particular pentru valoarea parametrului egală cu zero.

Bibliografie

1. **ROTARI, E.G., LEVCENCO, V.I., PECERSKII, I.N.**: Estimări expert în probleme de asistare a programelor tehnico-științifice. În: Știința, Chișinău, 1984.
2. **ROTARI, E.G., LEVCENCO, V.I., BURDAEV, B.P.**: Sistemul interactiv de achiziție și prelucrare a informației expert. În: Știința, Chișinău, 1985.
3. **DUBOIS, D., PRADE, H.**: Theorie des possibilites, Masson, Paris, 1988.
4. **BELLMAN, R., ZADEH, L.**: Decision-Making in Fuzzy Environment. În: Management Science, 17, No.4, 1970, pp. 141-164.
5. **ARNĂUT, V.**: A Form of Multidimensional Averiging Functions Satisfying the Property of Associativity. În: Computer Science Journal Of Moldova, Vol. 2, No. 2, 1994.