TRANSFORMATA WIGNER-VILLE . VERSIUNI DISCRETE PERIODICE ŞI APERIODICE

ing. Doinita Ghinea

Grupul Şcolar Industrial Nr.19

Bucureşti

Rezumat: Utilizarea transformatei Wigner-Ville în scopul analizei timp-frecvenţă a semnalelor nestaţionare prezintă un mare avantaj faţă de alte metode, datorită preciziei cu care se pot localiza evoluţiile spectrale, însă apariţia termenilor de interferenţă face dificilă interpretarea imaginilor obţinute. În prezenta lucrare sunt abordate principiile de calcul al versiunilor discrete, periodice şi aperiodice, ale transformatei Wigner-Ville.

Cuvinte cheie: Transformata Wigner-Ville, analiză spectrală evolutivă,semnale nestaţionare, semnal vocal, semnale multicomponente,semnale temporale simulate.

1. Introducere

Analiza spectrală evolutivă este, poate, unul din domeniile cele mai interesante, dacă ne gândim la faptul că majoritatea semnalelor, indiferent de provenienţa lor, nu au o frecvenţă constantă în timp. În această categorie, a semnalelor nestaţionare, putem include semnalele obţinute de la traductorul de vibraţii, de la semnalul vocal, de la electoencefalograf, ecograf, seismograf.

Analiza semnalelor nestaţionare pune probleme deosebite, mai ales când semnalele analizate au frecvenţe multiple (semnale multicomponente), iar legile de evoluţie conduc la puncte în care acestea se intersectează.

Metoda transformatei Wigner-Ville este una dintre cele mai puternice metode care permit rezolvarea problemei menţionate, cu o precizie foarte bună.

În această lucrare, se prezintă o analiză comparativă a unor versiuni ale transformatei Wigner-Ville periodică şi aperiodică. În prima parte, sunt prezentate pe scurt proprietăţile energetice ale transformatei Wigner-Ville discrete (TWVD). Urmează apoi o prezentare detaliată a unor algoritmi propuşi pentru calculul versiunilor discrete .

Lucrarea se încheie cu câteva studii de caz, în care semnalele temporale simulate sunt analizate cu TWVD, obţinându-se legile de evoluţie ale frecvenţelor semnalelor componente.

2. Versiuni periodice ale transformatei Wigner-Ville

Din transformata Wigner-Ville discretă generală se pot deduce transformate Wigner-Ville discrete simplificate (TWVDS) şi pot fi obţinute proprietăţile lor corespunzătoare.

În Tabelul 1, sunt rezumate toate TWVDS posibile, dându-se direct proprietăţile lor de periodicitate, precum şi caracteristicile energetice [1], [2].

Plecând de la chestiunile prezentate anterior, se pot sublinia următoarele puncte esenţiale:

- -TWVDS sunt mai simple decât TWVD generale (de reamintit că TWVD generale sunt supraeşantionate în planul timp-frecvenţă). Dar, prin aceasta, anumite proprietăţi verificate de TWVD generale pot fi pierdute prin TWVDS. Totuşi, în absenţa acoperirilor, TWVDS conţin toate informaţiile suficiente pentru reprezentarea TWV continue:
- -toate TWVDS au capacitatea de a traduce caracteristicile timp-frecvenţă ale semnalului, fără a avea, totuşi, aceleaşi proprietăţi;
- -TWVDS cu indice de timp par sau/şi indice de frecvenţă par sunt cele mai interesante dintre TWVDS, în practică, pentru că indicii pari sunt legaţi natural de eşantioanele semnalului sau spectrului său; în special, TWVDS, W(2p,k) şi W(2p,2q) prezintă multe avantaje, mai ales sub aspectul proprietăţilor, şi nu în ceea ce priveşte simplitatea calculului.

3. TWVDS aperiodică şi comparaţia cu TWVDS periodică

În secţiunea 1, s-a definit un ansamblu de TWVDS. O caracteristică deosebit de importantă şi comună tuturor acestor versiuni simplificate, este aceea că ele posedă proprietatea de periodicitate timp-frecvenţă.

S-ar părea că această proprietate teoretică nu este totdeauna verificată de TWV discrete, calculate în practică. De fapt, dacă se lucrează cu un subansamblu de indici de timp şi frecvenţă, nu se ajunge în mod obligatoriu la TWVDS care să verifice proprietăţile P1-P4 din [9].

Deoarece în calculul numeric al TWVD intervin operaţii de inversare a semnalului (sau a spectrului), conjugări, multiplicări şi TFD, urmărind modul în care aceste operații sunt realizate (periodizarea semnalului sau a produsului său, limitarea sau nu a semnalului sau produsului și prelungirea prin zerouri, alegerea dimensiunii TFD etc.), se obțin diferite versiuni ale TWVDS, care nu posedă exact aceleași proprietăți și care pot, uneori, foarte bine să nu verifice proprietatea de periodicitate timp-frecvență.

În această acțiune, numărul de zerouri de care ne ajutăm variază funcție de dimensiunea produsului, care atinge valoare maximă la (N-1), atunci când indicele de decalaj este N/2-1 sau N/2. Pe de altă parte, alegerea numarului de zerouri de care ne ajutăm, ca și dimensiunea TFD poate fi arbitrară.

Toate aceste aspecte sunt ilustrate în figura 1,

TWVD	Periodicitate	$P1{:}1/4 \sum_{k \text{ sau } q}(.,.)$	$P2{:}1/4 \sum_{n \text{ sau } p}(.,.)$
W(n,k)	2N x 2N	$\begin{cases} 4\lvert x_{n/2}\rvert^2 & pentru\ n\ par \\ 0 & pentru\ n\ impar \end{cases}$	$\begin{cases} 4\lvert X_{k/2}\rvert^2 & pentru\ k\ par \\ 0 & pentru\ k\ impar \end{cases}$
W(2p,k)	N x N	$2\lvert x_p\rvert^2$	$\begin{cases} 2\left(\lvert X_{k/2}\rvert^2 + \lvert X_{k/2+N/2}\rvert^2\right) & k\ par \\ 0 & k\ impar \end{cases}$
W(2p,2q)	N/2 x N/2	$\lvert x_p\rvert^2 + \lvert x_{p+N/2}\rvert^2$	$\lvert X_q\rvert^2 + \lvert X_{q+N/2}\rvert^2$
W(2p,2q+1)	N x N/2	$\lvert x_p\rvert^2 - \lvert x_{p+N/2}\rvert^2$	0
W(2p+1,k)	N x 2N	0	$\begin{cases} 2\left(\lvert X_{k/2}\rvert^2 + \lvert X_{k/2+N/2}\rvert^2\right) & k\ par \\ 0 & k\ impar \end{cases}$
W(2p+1,2q)	N/2 x N	0	$\lvert X_q\rvert^2 - \lvert X_{q+N/2}\rvert^2$
W(2p+1,2q+1)	N x N	0	0
W(n,2q)	N x N	$\begin{cases} 2\left(\lvert x_{n/2}\rvert^2 + \lvert x_{n/2+N/2}\rvert^2\right) & n\ par \\ 0 & n\ impar \end{cases}$	$2\lvert X_q\rvert^2$
W(n,2q+1)	2N x N	$\begin{cases} 2\left(\lvert x_{n/2}\rvert^2 + \lvert x_{n/2+N/2}\rvert^2\right) & n\ par \\ 0 & n\ impar \end{cases}$	0

Tabelul 1 - Proprietățile energetice ale TWVD generale,și a diverselor sale TWVDS

Aceste remarci ne conduc la posibilitatea de a distinge TWVDS discutate mai sus, de alte tipuri de TWVDS numite aperiodice, care vor fi prezentate în continuare.

Fiind dat un semnal discret x(n) de N eșantioane (N este presupus egal cu o putere a lui 2), un mod foarte simplu de a calcula TWVD în practică este urmatorul:

a) se inversează x(n') pentru a obține x(-n');
b) se decalează în acela[i timp, în sensuri inverse, semnalul [i versiunea sa inversată ([i conjugată) pentru a ob]ine x(n+n') si x^*(n-n'), unde n reprezintă indicele de decalaj;
c) se multiplică x(n+n') cu x^*(n-n');
d) se completează produsul (centrat în origine) cu zerouri;
e) se ia TFD a produsului completat cu zerouri, utilizând un algoritm FFT.;
f) se repetă opera]iile b) – e) pentru n=0 până la n=N-1.

unde se arată principiul de calcul general pentru TWVDS aperiodice. Aici se presupune că, în afara intervalului [0, N-1], semnalul este nul peste tot sau, cu alte cuvinte, când se calculează o TWVDS aperiodică, se completează implicit semnalul cu un număr infinit de zerouri. Este evident în acest caz că TWVDS astfel obținută nu mai posedă proprietatea de periodicitate în direcția timpului. Pentru aceasta, o astfel de transformată TWV discretă se numește TWVDS aperiodică, deoarece ea nu mai este periodică în planul timp-frecvență. Cu titlu de exemplu, pentru un semnal discret în N puncte, TWVD aperiodică, corespunzătoare versiunii simplificate W(2p,k), este definită de:

$$W(2p,k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M/2-1} x'_{p+m} x'^{*}_{p-m} \exp\left(-j\frac{4\pi km}{M}\right) \qquad (1)$$

unde x' este un semnal discret, cu M puncte, definit de relația:

$$x_n' = \begin{cases} x_n & pentru\ n = 0,\dots,M/2-1 \\ 0 & pentru\ n = M/2,\dots,M-1 \end{cases}$$

cu M=2N.

Astfel, definirea noului semnal prin completarea semnalului original cu zerouri revine, de fapt, în a realiza etapa d) din algoritmul mai sus prezentat. Astfel, calculul TWVDS W(2p,k) aperiodice poate fi simplu realizat de maniera următoare: inversare, decalare şi conjugare mai întâi a semnalului x', multiplicare apoi cu versiunea sa originală xNdirect centrată pe origine si având lungimea N, şi se ia în sfârşit TFD (cu dimensiunea de N puncte) a produsului astfel obţinut.

Din punct de vedere teoretic, calculul TWVDS aperiodică revine la evaluarea unei TWV discrete, fără a ţine cont explicit de efectul discretizării frecvenţiale a semnalului asupra TWV.

O astfel de consideraţie are drept consecinţă faptul că relaţia între TWVD aperiodică şi TWV continuă este dată de :

$$W(n,k) = \frac{1}{4N\Delta t}\sum_{k'}(-1)^{nk'} W_f\left(\frac{n\Delta t}{2}, \frac{k-k'N}{2N\Delta t}\right) \quad (2)$$

în loc de relaţia:

$$W(n,k) = \frac{1}{4N\Delta t}\sum_{n'}\sum_{k'}(-1)^{nk'+kn'+Nn'k'} W_f\left(\frac{(n-n'N)\Delta t}{2}, \frac{k-k'N}{2N\Delta t}\right) \quad (3)$$

Relaţia de mai sus arată că reducerea TWVD aperiodice nu se poate produce decât în direcţia frecvenţei. Cu alte cuvinte, pentru obţinerea unei TWVD aperiodice, fără a ţine seama de termenii de acoperire, este suficient să se satisfacă numai una din condiţiile de mai jos [4]:

$$\exists n_0 :\ x_{n+n_0} = 0 \quad pentru\ \ n = N/2,\dots, N-1 \quad (4)$$

şi,

$$\exists k_0 :\ X_{k+k_0} = 0 \quad pentru\ k = N/2,\dots,N-1 \quad (5)$$

Este bine cunoscut că noţiunea de TFD implică faptul că semnalul şi spectrul său, sunt serii de eşantioane periodice, având acelaşi număr N de eşantioane.

Aceasta este o condiţie de pornire în obţinerea unei TWVD generale, ca şi a TWVDS periodice, şi ea nu a fost efectiv urmărită în procedeul de calcul al TWVDS aperiodice. Principiul de calcul al TWVDS periodice este schematizat în figura 2. De subliniat că semnalul este limitat aici la N eşantioane şi la numai N zerouri de completare, iar dimensiunea sa este egală cu cea a TFD.

Deşi o TWVDS aperiodică poate fi definită cu acelaşi subansamblu de indici de timp şi frecvenţă ca TWVDS periodică corespunzatoare, ea nu prezintă exact aceleaşi proprietaţi. De fapt, majoritatea proprietaţilor deduse în cazul TWVDS periodice sunt acum mai mult sau mai puţin alterate.

Cu titlu de exemplu, pentru TWVDS W(2p,k) aperiodică definită mai sus, care posedă de asemenea proprietăţile energetice şi reversibilitate, densitatea spectrului de energie obţinut plecând de la această versiune aperiodică nu mai este nulă pentru indicii de frecvenţă impari, iar eşantioanele temporale reconstituite, care au indicii egali sau superiori lui N/2, au valori nule.

Aceasta este diferenţa faţă de cazul TWVDS, W(2p,k), periodice.

În practică, pentru obţinerea unei TWVDS corecte, periodice sau aperiodice este obligatorie evitarea fenomenului de acoperire. În cazul TWVDS aperiodice, fenomenul de acoperire, care se produce numai în direcţia frecvenţei, poate fi

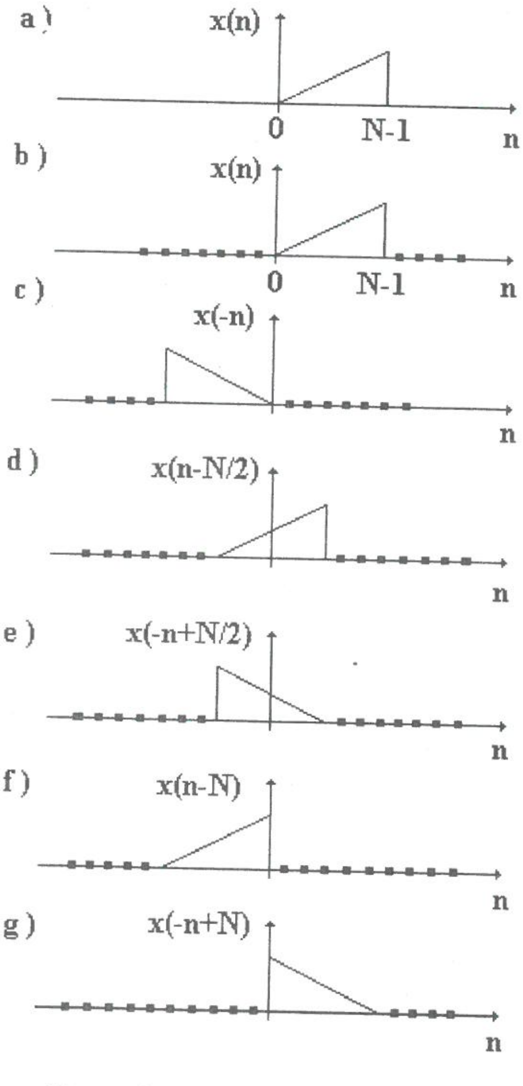

Figura 1. Principiul de calcul al transformatei Wigner-Ville discretă simplificată aperiodică (TWVDSA)

ușor evitat, fie supraeșantionând semnalul continuu, fie utilizând semnalul analitic asociat semnalului real sau o interpolare a semnalului numeric de pornire.

Din contra, în cazul TWVDS periodice, acoperirea se poate produce la fel de bine în direcția timp, cât și în direcția frecvență, problema fiind mai complicată. Ca urmare, dacă semnalul nu este analitic, sau nu a fost supraeșantionat cu un factor cel puțin egal cu 2, TWVDS periodică va suferi o acoperire frecvențială.

Prin dualitate, dacă semnalul analitic sau supraeșantionat nu este nul pe un interval care acoperă cel pu¡in o jumătate din perioada de repetiție, el va conține termeni de acoperire temporală.

Deci, pentru obținerea unei TWVDS periodice, care să nu conțină termeni de acoperire, ambele ipoteze (4) și (5) trebuie să fie satisfăcute. Deși teoretic incompatibile, cele două condiții pot fi aproximate în practică prin următoarele metode:

- partea utilă a semnalului pe N/2 puncte este analitică sau supraeșantionată printr-un factor cel pu¡in egal cu 2;
- semnalul analitic sau supraeșantionat este completat cu zerouri în așa fel încât semnalul completat și periodizat prezintă zerouri într-un interval ce acoperă cel puțin jumătate din perioada de repetiție.

Deși TWVDS aperiodice și periodice nu au aceleași caracteristici, ele dau rezultate echivalente din punct de vedere al traducerii structurii timp-frecvență a semnalului.

Pe plan teoretic, TWVDS periodică este preferabilă, deoarece ea corespunde bine noțiunilor curent întâlnite în tratarea numerică a semnalului și respectă mai toate proprietățile teoretice descrise în secțiunea 1.

Manipularea în practică pare însă mai complicată (dificultatea de a satisface simultan condițiile (4) și (5)). Pe plan practic, TWVD aperiodică apare mai interesantă, pentru că pe de o parte, ea permite să se evite problemele de acoperire temporala (sau cu alte cuvinte nu are de ce fi necesară satisfacerea condi¡iei (5)) și, pe de altă parte, interpretările sale vizuale sunt mai ușoare, așa cum sunt ilustrate exemplele din secțiunea următoare.

Trebuie menționat însă că interpretarea anumitor proprietăți teoretice ale sale rămâne dificilă, ca spre exemplu contribu¡ia nenulă a jumătate din punctele eșantioanelor la energia semnalului în reprezentarea W(2p,k) aperiodică.

De remarcat totuși că, în practică se utilizează cel mai adesea TWVDS aperiodice. Această situație paradoxală (pentru că, în principiu, ar trebui să se caute adoptarea TWVDS periodice, care satisfac maximul de proprietăți teoretice ale TWV discrete) este legată, cel mai adesea, de comoditatea de calcul a TWVDS aperiodice, cum se poate constata din figurile 1 si 2.

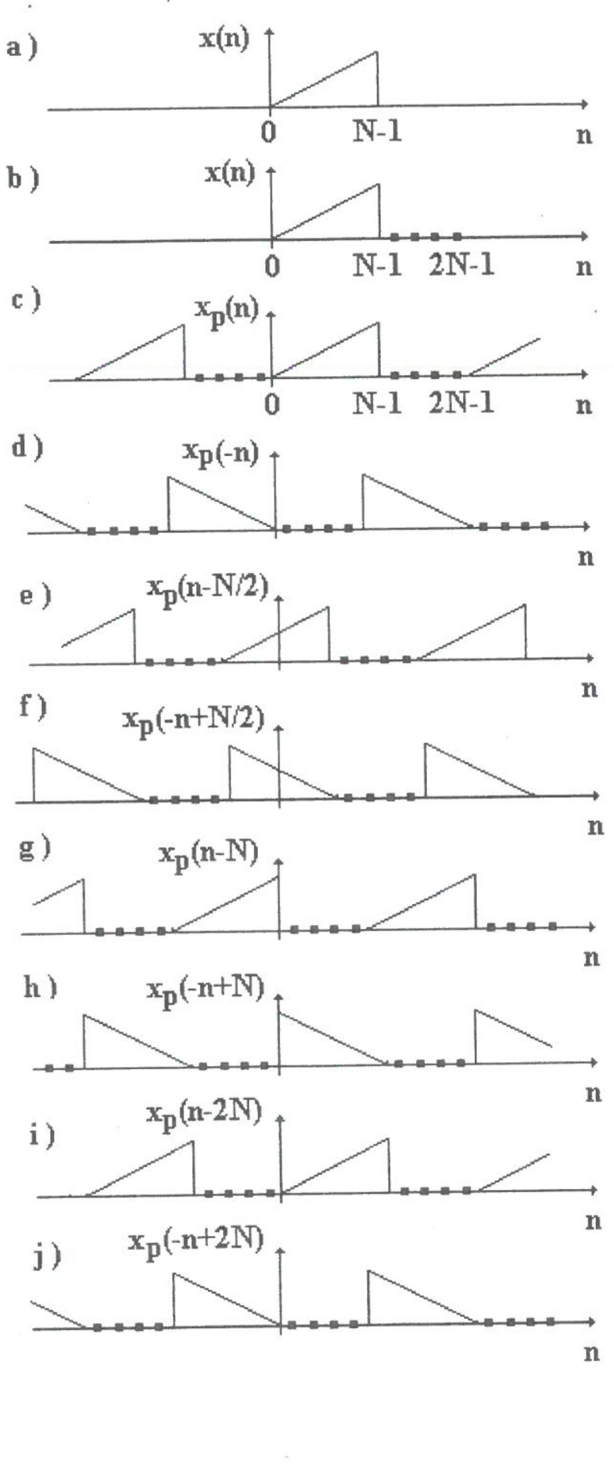

Figura 2. Principiul de calcul al transformatei Wigner-Ville discretă simplificată periodică (TWVDSP)

4. Studii de caz

Pâna aici, au fost analizate aspectele teoretice ale TWV discrete simplificate. În această secţiune, se vor da câteva exemple de analiză a unor semnale simulate, pentru a ilustra şi compara caracteristicile esenţiale ale TWVDS.

TWVDS, periodice şi aperiodice, constituie un ansamblu de TWV discrete, aplicabile în practică. Alegerea lor poate fi făcută funcţie de necesităţile practice. Spre exemplu, în cazul în care se doreşte reprezentarea TWV cu formatul de vizualizare NxN/2, se poate adopta TWVDS aperiodică W(2p,2q), care are dimensiunea NxN/2. Dacă se doreşte să se aibă o imagine de dimensiunea N/2xN/2, se poate utiliza TWVDS periodică W(2p,2q).

În figura, 3 se prezintă TWVDS periodică (versiunea W(2p,k)) a unui semnal cu două componente modulate liniar în frecvenţă, calculată cu procedura ilustrată în figura 2.

În figura 3a, semnalul real a fost eşantionat în 256 de puncte la frecvenţa Shannon (1000 Hz). Semnalul analitic asociat la 256 de puncte nu a fost completat cu zerouri, TWVDS W(2p,k)

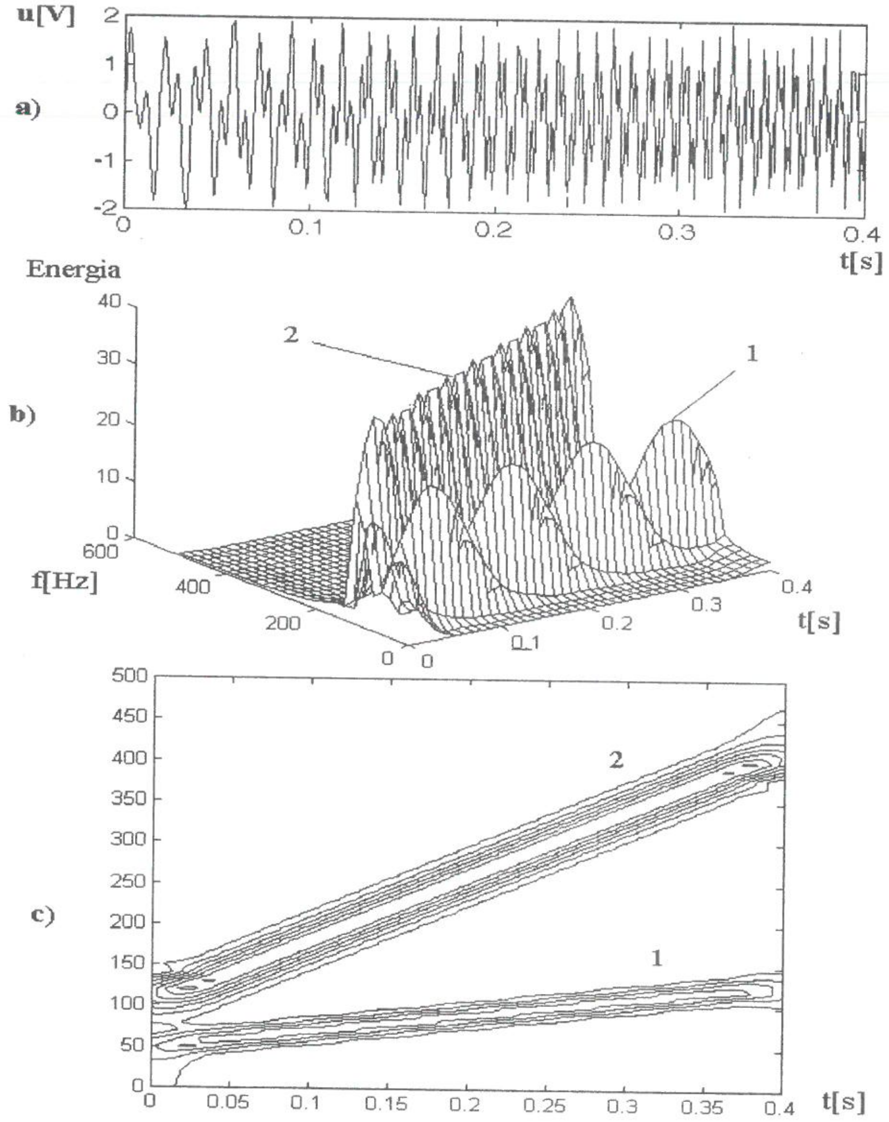

Figura 3. Transformata Wigner-Ville a semnalului temporal:

$$u = x_1 + x_2;\; x_1 = \sin\left[2\pi 50(t + 2t^2)\right];\; x_2 = \sin\left[2\pi 100(t + 4t^2)\right]$$

a) Semnalul temporal, b) Transformata Wigner-Ville, c) Frecvenţa instantanee:

$$f_{i1} = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\varphi_1(t) = 50(1+4t);\; f_{i2} = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\varphi_2(t) = 100(1+8t)$$

conţinând termeni de acoperire temporală, care se traduc prin prezenţa unor segmente oscilante care se formează în jurul crestei principale informaţionale.

În figura 4, se prezintă TWVDS (aceeaşi versiune W(2p,k)) aperiodică a unui alt semnal real, eşantionat în 512 de puncte cu frecvenţa Shannon (1000 Hz), în care se observă şi termenii de interacţiune între frecvenţele pozitive şi negative, care se traduc prin prezenţa de "unde" în jurul frecvenţei zero.

$$f_i = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\varphi(t) = 250 + 200\cos(2\pi 4t)$$

În acest caz, ca şi în cazul precedent, legea de modulare a semnalului nu poate fi determinată de o maniera precisă, decât dacă se adoptă o operaţie de netezire în planul timp-frecvenţă, care este echivalentă cu o filtrare 2D.

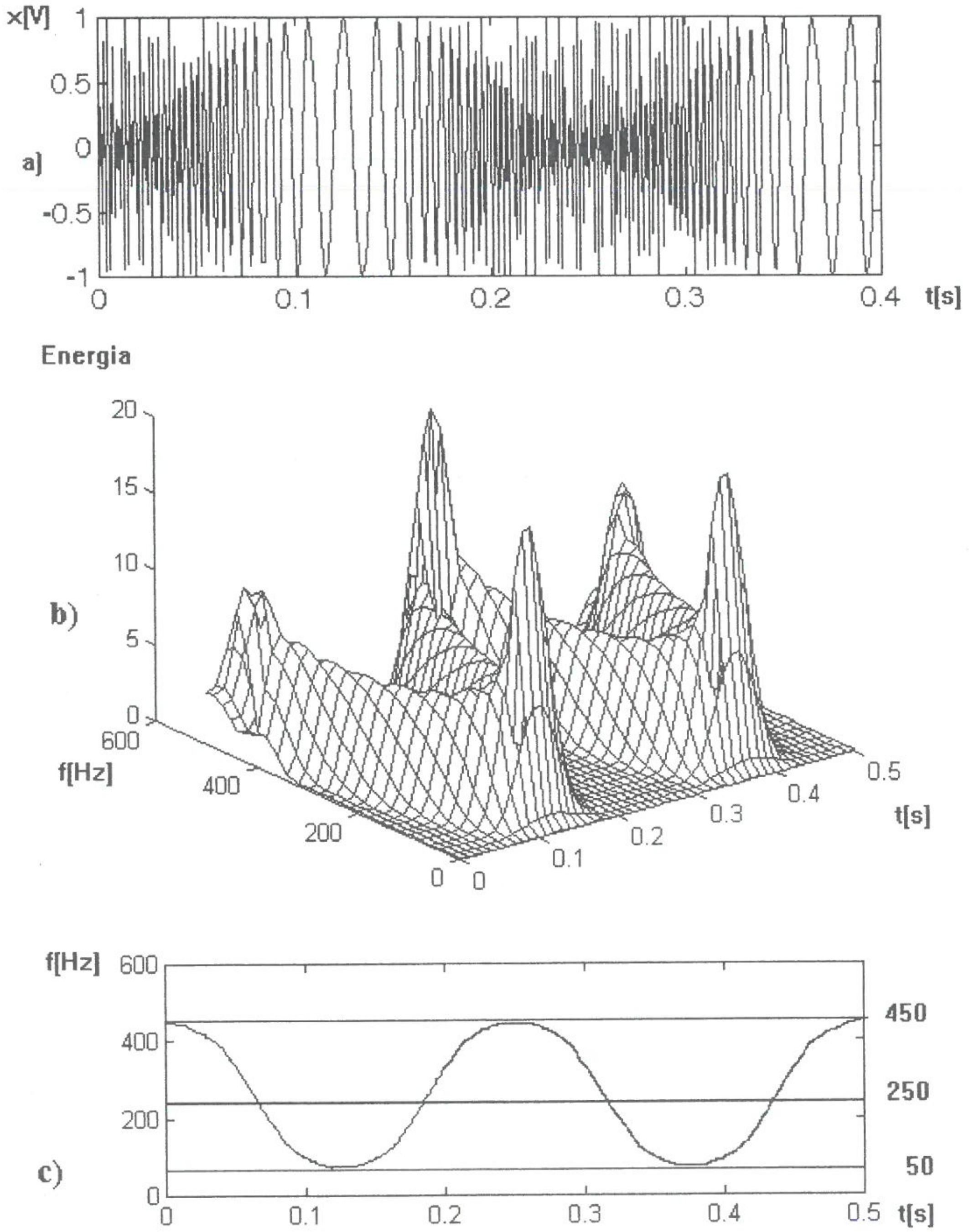

Figura 4. Transformata Wigner-Ville a semnalului temporal

$$x = \sin\left[2\pi 250\left(t + \frac{1}{10\pi}\sin(2\pi 4t)\right)\right]$$

a) Semnalul temporal, b) Transformata Wigner-Ville, c) Frecven¡a instantanee a semnalului x .

De remarcat, totuşi, că toate celelalte trei versiuni ale TWVDS au acelaşi aspect şi singurele lor creşteri sunt limitate în acelaşi domeniu timp-frecvenţă. Aceasta implică următorul fapt important: fiind dată o imagine timp fracvenţă, reprezentând TWVD a unui semnal discret, este imposibil de spus despre care versiune discretă a TWV este vorba. Cu toate acestea, TWVDS au proprietăţi diferite. Dar, în tot cazul, diversele TWVDS, oricum ar fi, periodice sau aperiodice, toate traduc corect legea de modulaţie a semnalului şi dau rezultate echivalente.

5. Concluzii

S-a propus aici o clasă de TWV discrete simplificate, în care proprietăţile fundamentale au fost studiate şi definite. În acest cadru, distincţia între versiunea periodică şi aperiodică a fost clar expusă, arătând astfel, pe de o parte, diversele posibilităţi pentru ob¡inerea unei TWVD şi facilitând pe de altă parte pentru utilizator alegerea între conservarea proprietăţilor teoretice (TWVDS periodice) şi intersul manipulării practice (TWVDS aperiodice).

Acest material furnizează o interpretare clară a efectului de discretizare temporală şi frecvenţială a semnalului din TWV continuă şi permite o mai bună înţelegere a comportamentului TWV discrete în planul timp-frecvenţă. Versiunile aperiodice au avantajul că evită problemele de acoperire temporală, ceea ce conduce la creşterea interesului pentru aplicaţiile curente.

BIBLIOGRAFIE

1. CLAASEN T.A.C.M., MECKLENBRAUKER W.F.G.: -The Wigner Distribution- A Tool for Time-frequency Signal Analysis, Part.III: Relations With Other Time Frequency Signal Transformations, Philips J.Rev. , 35, (6), 1980, pp.372-389.
2. ESCUDIE B., FLANDRIN P.: An Iterpretation of the Peudo-Wigner-Ville Dstribution, Signal Proc., 6, (1, 1984.), pp.7-36.
3. ESCUDIE B., GHINEA M., COURBEBAISSE G.:Rapport sur les études de la vitesse de rotation d'un moteur á vapeur bicylindre a double expansion et reservoir intermediaire. Rapport de recherche LTS 9302, ICPI Lyon, Franţa, 1993.
4. FLANDRIN P.: Representations des signaux dans le plan temps-fréquence. These D.I., INPG Grenoble, 1982.
5. FLANDRIN P.: Temps-frequence, Ed. Hermes, Paris, 1993.