EXTRAGEREA STRUCTURII DIN COLECŢII DE DATE FUZZY: CONCEPTE METRICE ŞI CONSECINŢE ALGORITMICE

dr. ing. Vasile Georgescu

Universitatea Craiova

e-mail: vgeo@central.ucv.ro

Rezumat: Abstragerea sensului din masa amorfă a datelor de observaţie presupune elaborarea unor tehnici avansate, prin care să fie scoase la lumină *structurile cognitive latente*. Asemenea metode, de natură esenţial inductivă, ilustrează faptul că statistica şi analiza datelor multidimensionale reprezintă principalul contributor la dezvoltarea unor domenii importante ale inteligenţei artificiale, precum *achiziţia automată a cunoştinţelor1*. Scopul lucrării este să arate că explorarea universului semantic al datelor de observaţie şi evidenţierea structurilor cognitive, induse de acestea, pot fi complet şi unitar tranşate, în cadrul *teoriei măsurii*. Atenţia este focalizată asupra *datelor codificate prin termeni fuzzy*. Se definesc formal descriptorii şi se introduc conceptele metrice, care înzestrează în mod adecvat spaţiul variabilelor fuzzy-evaluate, precum şi spaţiul indivizilor descrişi de astfel de variabile. Sunt explorate, de asemenea, consecinţele algoritmice ale generalizărilor teoretice propuse, ce fac pe deplin posibilă extinderea analizei datelor multidimensionale (analiza componentelor principale, clasificarea automată, elaborarea modelelor grafice de asociere etc.) în context fuzzy.

Cuvinte cheie: structuri de date fuzzy, concepte metrice, structuri cognitive latente, teoria măsurii.

1. Introducere

În esenţă, datele de observaţie reprezintă mărci semantice, aplicate unor entităţi din realitate. În cazul variabilelor codificate numeric, semnificaţiile sunt induse de structura metrică a universului de discurs, respectiv de procedeul de scalare utilizat. Cât priveşte *variabilele codificate lingvistic*, acestea pot beneficia de un formalism de reprezentare, bazat pe *teoria mulţimilor fuzzy*, dar necesită introducerea unor *concepte metrice* specifice. Incertitudinii induse de natura de eveniment a observaţiilor i se adaugă acum şi imprecizia proprie reprezentării lingvistice a materialului factual. În ceea ce priveşte natura formală a acestei reprezentări, are loc o deplasare de accent, de la norme şi metrici proprii spaţiilor numerice, la cele care înzestrează spaţiile de funcţii (dat fiind că descriptorul primar al unei mulţimi fuzzy este funcţia de apartenenţă). Argumente similare au determinat plasarea întregii construcţii teoretice, în cadrul natural oferit de spaţiul Hilbert al funcţiilor de pătrat integrabil, unde este validă teorema proiecţiei şi, prin urmare, putem apela la teoria priectorilor ortogonali în rezolvarea problemelor de normă minimă. În plus, generalizarea analizei dispersionale la cazul entităţilor fuzzy beneficiază aici de premise formale adecvate.

Mai întâi, vom supune analizei structura metrică a celor două spaţii în raport cu care se defineşte o colecţie de date fuzzy: *spaţiul variabilelor fuzzy-evaluate*, respectiv *spaţiul indivizilor descrişi de variabile fuzzy*. Modul în care putem abstrage structuri cognitive, plecând de la aceste structuri metrice, este destul de transparent. Astfel, celor n indivizi incluşi în eşantion le corespunde un spaţiu de reprezentare în care disimilarităţile reciproce dintre ei sunt induse de mărcile semantice distinctive, asociate celor p realizări ale variabilelor fuzzy-evaluate. Întrucât este depozitarul întregii informaţii despre indivizi, acesta poate fi interpretat ca *spaţiu de semnificaţii* (*spaţiu semantic*). Măsurile de disimilaritate introduse pe el (metrici, ultrametrici etc.) desemnează, în fapt, tipuri particulare de *distanţe semantice* între indivizi sau grupe de indivizi. Pe de altă parte, spaţiului n-dimensional, corespunzând reprezentării vectoriale a realizărilor fiecărei variabile fuzzy-evaluate pentru toţi indivizii din eşantion, i se pot asocia anumite măsuri unghiulare, având semnificaţia unor indici de corelaţie, fapt ce conduce la interpretarea sa ca *spaţiu al corelaţiilor*.

Generalizarea structurilor metrice la cazul entităţilor fuzzy trebuie să ţină cont de faptul că metodele ce permit identificarea structurilor cognitive latente, în cadrul analizei datelor multidimensionale, sunt esenţial de natură proiectivă. Informaţia semantică, deţinută în cazul reprezentării norului de indivizi pe un spaţiu de dimensiune mare, poate fi rezumată (şi, eventual, "vizualizată") prin proiecţia pe un spaţiu de dimensiune redusă, determinat din condiţia ca deformarea norului în proiecţie (deci, implicit, pierderea de informaţie ce are loc cu acest prilej) să fie minimă. O măsură a acestei pierderi de informaţie este modificarea inerţiei entităţilor reprezentate în spaţiul iniţial şi în spaţiul de proiecţie. Agregarea indivizilor, după criteriul inerţiei minime intra-clase şi a inerţiei maxime interclase, prin metode de clasificare automată, conduce la realizarea de ierarhii semnificative, fiind pusă astfel în lumină o altă sursă se informaţie latentă. Prin urmare, deşi în decursul timpului s-au propus numeroase măsuri de asemănare sau indici de disimilaritate între mulţimi fuzzy, ele rămân inoperante câtă vreme nu asigură compatibilitatea dintre generalizarea conceptelor metrice în spaţiul entităţilor fuzzy şi teoria proiectorilor ortogonali. Astfel, suntem încă o dată constrânşi să recurgem la norme generate de un produs

---

1 Sintagma anglo-saxonă "Data mining and knowledge discovery" exprimă mult mai plastic această arie de cercetări.

scalar, deci, la spaţii Hilbert. Desigur, există şi alte raţiuni ce justifică soluţia constructivă, adoptată în această lucrare. Toate acestea vor face obiectul prezentării care urmează.

2. Structuri metrice în spaţiul variabilelor fuzzy-evaluate

Să considerăm o colecţie de date multidimensionale, constând din n observaţii (indivizi), caracterizaţi de p variabile fuzzy-evaluate. Fiecare variabilă $\left(X^j\right)_{j=\overline{1,p}}$ va fi definită prin cele n realizări fuzzy ale sale, date sub forma tăieturilor de nivel α:

$$\left(M_i^j\right)_\alpha = [\underline{m}_i^j(\alpha), \overline{m}_i^j(\alpha)]_{\alpha\in[0,1]} \qquad (1)$$

unde $\underline{m}_i^j(\alpha)$ sunt funcţii nedescrescătoare, iar $\overline{m}_i^j(\alpha)$ sunt funcţii necrescătoare.

2.1. Media (punctuală) a unui eveniment fuzzy, versus media (fuzzy) a unei variabile fuzzy

Orice realizare M a unei variabile fuzzy-evaluate X poate fi percepută ca un eveniment. În esenţă, ea reprezintă o observaţie, dar, în fapt, încorporează un conglomerat de posibilităţi, datorită impreciziei inerente specificării lingvistice. De aceea, pentru a transforma această observaţie într-o valoare precisă, se face apel în mod curent la o procedură de "defuzzificare". *Media unui eveniment fuzzy* este măsura cea mai frecvent utilizată în acest scop. Fie (Ω, A, P) un câmp de probabilitate. Dacă se consideră pe acest câmp o distribuţie de probabilităţi uniformă, atunci evenimentul fuzzy M poate fi localizat punctual, prin media sa (centrul de greutate al mulţimii fuzzy corespunzătoare) pe referenţialul asociat variabilei X:

$$\text{media}(M) = \frac{\int_{S(M)\subset\Re} x\cdot\mu_M(x)\,dx}{\int_{S(M)\subset\Re}\mu_M(x)\,dx} \qquad (2)$$

unde S(M)=suport(M).

O astfel de măsură nu interesează în mod direct cercetarea pe care am iniţiat-o, deoarece aceasta se focalizează explicit pe definirea momentelor fuzzy ale variabilelor fuzzy-evaluate; totuşi, din calculul său pot fi desprinse anumite sugestii. Fie M o mulţime fuzzy de tip trapezoidal:

$M_\alpha = [\underline{m}(\alpha), \overline{m}(\alpha)]_{\alpha\in[0,1]}$
$= [\underline{m} - f + f\cdot\alpha, \overline{m} + d - d\cdot\alpha]_{\alpha\in[0,1]}$) (figura 1). În acest caz, operatorul de localizare (defuzzificare) de mai sus se poate rescrie sub forma mediei ponderate a trei valori medii parţiale:

$$media(M) = \frac{\overline{x}^L\cdot w^L + \overline{x}^C\cdot w^C + \overline{x}^R\cdot w^R}{w^L + w^C + w^R} \qquad (3)$$

unde:

$$w^L = \int_{\underline{m}-f}^{\underline{m}}\mu^L(x)\,dx;$$

$$w^C = \int_{\underline{m}}^{\overline{m}}\mu^C(x)\,dx;\quad w^R = \int_{\overline{m}}^{\overline{m}+d}\mu^R(x)\,dx$$

Cu transformările:

$$\mu^L(x) = \alpha\in[0,1];\quad x = \underline{m}(\alpha)\in[\underline{m}-f, \underline{m}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu^L(x)}{\int_{\underline{m}-f}^{\underline{m}}\mu^L(x)\,dx} = \frac{\alpha}{\int_0^1\alpha\,d\alpha} = \frac{\alpha}{1/2} = 2\cdot\alpha$$

abscisa $\overline{x}^L$ a centrului de greutate al triunghiului din stânga figurii (având baza $[\underline{m}-f, \underline{m}]$) se obţine sub forma unei integrale Lebesgue, definită în raport cu măsura λ:

$$\overline{x}^L = \frac{\int_{\underline{m}-f}^{\underline{m}} x\cdot\mu^L(x)\,dx}{\int_{\underline{m}-f}^{\underline{m}}\mu^L(x)\,dx} = \int_0^1\underline{m}(\alpha)\cdot 2\alpha\,d\alpha =$$

$$= \int_0^1\underline{m}(\alpha)\cdot w(\alpha)\,d\alpha = \int_{[0,1]}\underline{m}(\alpha)\cdot\lambda(d\alpha)$$

unde $\lambda([0,1]) = \int_0^1 w(\alpha)\,d\alpha = \int_0^1 2\alpha\,d\alpha = 1$,

iar $w(\alpha) = 2\alpha$ poate fi interpretată ca o funcţie pondere.

Pentru $\underline{m}(\alpha) = \underline{m} - f + \alpha f$, obţinem:

$$\overline{x}^L = \int_0^1(\underline{m} - f + \alpha f)\cdot 2\alpha\,d\alpha = \underline{m} - f + \frac{2}{3}f = \underline{m}\left(\frac{2}{3}\right)$$

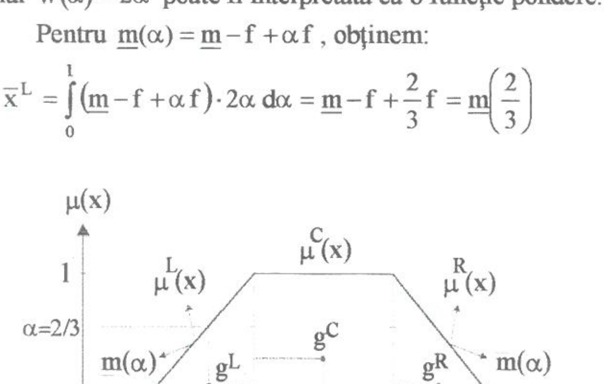

Figura 1. $\overline{x}^L = \int_0^1\underline{m}(\alpha)\cdot 2\alpha\,d\alpha = \underline{m}(2/3)$; $\overline{x}^C = \frac{\underline{m}+\overline{m}}{2}$;

$$\overline{x}^{R} = \int_{0}^{1} \overline{m}(\alpha)\cdot 2\alpha\, d\alpha = \overline{m}(2/3)$$

Vom reține modul de calcul al lui $\overline{x}^{L}$ sub forma unei integrale Lebesgue, ca o sugestie pentru dezvoltări ulterioare.

Cât privește *media fuzzy a variabilei fuzzy-evaluate* X^j, aceasta poate fi calculată cu ajutorul relației:

$$G^j(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[\underline{m}_i^j(\alpha), \overline{m}_i^j(\alpha)\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \underline{m}_i^j(\alpha), \sum_{i=1}^{n} p_i \overline{m}_i^j(\alpha)\right] = \left[\underline{G}^j(\alpha), \overline{G}^j(\alpha)\right] \tag{4}$$

unde p_i este ponderea relativă a fiecărui individ în eșantion ($p_i > 0$; $\sum p_i = 1$).

Din $\underline{m}_i^j(\alpha) \le \overline{m}_i^j(\alpha)$, cu $\underline{m}_i^j(\alpha)$ funcții nedescrescătoare și $\overline{m}_i^j(\alpha)$ funcții necrescătoare, deducem $\underline{G}^j(\alpha) \le \overline{G}^j(\alpha)$, cu $\underline{G}^j(\alpha)$ funcții nedescrescătoare și $\overline{G}^j(\alpha)$ funcții necrescătoare.

2.2. Matricea de covarianță fuzzy

În continuare, vom face, în plus, ipoteza că $\underline{m}_i^j(\alpha)$ și $\overline{m}_i^j(\alpha)$ sunt funcții măsurabile de pătrat integrabil Lebesgue (în raport cu măsura λ, definită mai sus), putându-le astfel interpreta ca elemente ale *spațiului Hilbert* L_2 [0,1]. În consecință, putem beneficia de existența produsului scalar:

$$< f(\alpha), g(\alpha) > = \int_{[0,1]} f(\alpha)\cdot g(\alpha)\ \lambda(d(\alpha)) = \int_{0}^{1} f(\alpha)\cdot g(\alpha)\ 2\alpha\, d\alpha$$

care induce norma $\|f(\alpha)\| = (< f(\alpha), f(\alpha) >)^{1/2}$ pe acest spațiu.

Principala presupunere pe care ne bazăm construcția matricei de covarianță V a celor p variabile fuzzy-evaluate este că aceasta trebuie să fie egală cu matricea $0_{p\times p}$, în cazul în care toate variabilele au realizări fuzzy constante. Să notăm prin $\underline{Y}^j$, respectiv $\overline{Y}^j$, componentele stângă și dreaptă ale variabilei fuzzy-evaluate centrate de rang j: $\overline{Y}_i^j(\alpha) = \overline{M}_i^j(\alpha) - \overline{G}^j(\alpha)$; $\underline{Y}_i^j(\alpha) = \underline{M}_i^j(\alpha) - \underline{G}^j(\alpha)$; $\forall i = \overline{1,n}$

Cele $n\times p$ funcții $\underline{Y}_i^j(\alpha)$ pot fi colectate într-o matrice $\underline{Y}(\alpha)$, iar cele $n\times p$ funcții $\overline{Y}_i^j(\alpha)$ într-o matrice $\overline{Y}(\alpha)$. În final, putem reuni aceste două matrice într-una ($2n\times p$)-dimensională, adică:

$$Y(\alpha) = \begin{pmatrix} \underline{Y}(\alpha) \\ \overline{Y}(\alpha) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Fie acum $D = \mathrm{diag}(p_i)$ matricea de ponderi, cu $\mathrm{tr}(D) = 1$ și să introducem matricea bloc-diagonală de dimensiune $2n\times 2n$:

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} D/2 & 0 \\ 0 & D/2 \end{pmatrix}, \quad \text{cu } \mathrm{tr}(\tilde{D}) = 1 \tag{6}$$

Matricea de covarianță fuzzy de dimensiune $p\times p$, associată celor p variabile fuzzy-evaluate, se definește atunci prin:

$$V(\alpha) = \begin{pmatrix} \underline{Y}(\alpha) \\ \overline{Y}(\alpha) \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} D/2 & 0 \\ 0 & D/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{Y}(\alpha) \\ \overline{Y}(\alpha) \end{pmatrix} = \frac{\underline{Y}'(\alpha)\cdot D\cdot \underline{Y}(\alpha) + \overline{Y}'(\alpha)\cdot D\cdot \overline{Y}(\alpha)}{2} = \frac{\underline{V}(\alpha) + \overline{V}(\alpha)}{2} \tag{7}$$

Evident, această matrice este **invariantă la o translație** a unora sau tuturor variabilelor fuzzy-evaluate.

O evaluare numerică a matricei de covarianță fuzzy poate fi efectuată pentru orice nivel fixat al lui α din intervalul [0, 1].

Pe de altă parte, ne putem pune problema găsirii celei mai reprezentative expresii numerice pentru $V(\alpha)$, caz în care este natural să apelăm la o *procedură de "defuzzificare"* bazată pe *metoda centrului de greutate*:

$$V = \int_0^1 \begin{pmatrix} \underline{Y}(\alpha) \\ \overline{Y}(\alpha) \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} D/2 & 0 \\ 0 & D/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{Y}(\alpha) \\ \overline{Y}(\alpha) \end{pmatrix} \cdot 2\alpha\, d\alpha = \frac{\int_0^1 \underline{Y}'(\alpha)\cdot D\cdot \underline{Y}(\alpha)\cdot 2\alpha\, d\alpha + \int_0^1 \overline{Y}'(\alpha)\cdot D\cdot \overline{Y}(\alpha)\cdot 2\alpha\, d\alpha}{2} = \frac{\underline{V} + \overline{V}}{2} \tag{8}$$

2.3. Matricea de corelație fuzzy

Vom defini acum matricea datelor fuzzy standardizate:

$$Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \underline{Z}(\alpha) \\ \overline{Z}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}(\alpha)\cdot \underline{D}_{1/s}(\alpha) \\ \overline{Y}(\alpha)\cdot \overline{D}_{1/s}(\alpha) \end{pmatrix} \tag{9}$$

unde:

$\underline{D}_{1/s}(\alpha) = \mathrm{diag}(1/\underline{s}_j(\alpha))$; $\underline{s}_j(\alpha) = \sqrt{\underline{v}_{jj}(\alpha)}$

$\overline{D}_{1/s}(\alpha) = \mathrm{diag}(1/\overline{s}_j(\alpha))$; $\overline{s}_j(\alpha) = \sqrt{\overline{v}_{jj}(\alpha)}$

Matricea de corelaţie fuzzy poate fi uşor dedusă din $Z(\alpha)$ şi $\tilde{D}$:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \underline{Z}(\alpha) \\ \overline{Z}(\alpha) \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} D/2 & 0 \\ 0 & D/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{Z}(\alpha) \\ \overline{Z}(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\underline{Z}'(\alpha)\cdot D\cdot \underline{Z}(\alpha) + \overline{Z}'(\alpha)\cdot D\cdot \overline{Z}(\alpha)}{2}$$

$$= \frac{\underline{D}_{1/s}(\alpha)\cdot \underline{V}(\alpha)\cdot \underline{D}_{1/s}(\alpha) + \overline{D}_{1/s}(\alpha)\cdot \overline{V}(\alpha)\cdot \overline{D}_{1/s}(\alpha)}{2}$$

$$= \frac{\underline{R}(\alpha) + \overline{R}(\alpha)}{2} \qquad (10)$$

O evaluare numerică a lui $R(\alpha)$ se poate obţine aplicând procedura de "defuzzificare", bazată pe metoda centrului de greutate:

$$R = \int_0^1 \begin{pmatrix} \underline{Z}(\alpha) \\ \overline{Z}(\alpha) \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} D/2 & 0 \\ 0 & D/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{Z}(\alpha) \\ \overline{Z}(\alpha) \end{pmatrix} 2\alpha\, d\alpha$$

$$= \frac{\int_0^1 \underline{Z}'(\alpha)\cdot D\cdot \underline{Z}(\alpha)\cdot 2\alpha\, d\alpha + \int_0^1 \overline{Z}'(\alpha)\cdot D\cdot \overline{Z}(\alpha)\cdot 2\alpha\, d\alpha}{2}$$

$$= \frac{\underline{R} + \overline{R}}{2} \qquad (11)$$

3. Structuri metrice în spaţiul indivizilor descrişi de variabile fuzzy-evaluate

Construcţia introdusă în paragrafele precedente sugerează, deja, că statistica entităţilor fuzzy se întemeiază pe furnizarea unei definiţii formale, adecvată noţiunii de distanţă între două mulţimi fuzzy. Este uşor de sesizat că măsurile prin care am modelat variabilitatea în spaţiul variabilelor fuzzy-evaluate (precum dispersia, respectiv covarianţa) au fost, în mod natural, derivate dintr-un asemenea concept metric.

3.1. Distanţa pătratică dintre două mulţimi fuzzy

Fie X^j o variabilă fuzzy-evaluată, definită pe componenta *j* a unui referenţial p-dimensional X şi fie M_i^j, respectiv M_ℓ^j, două realizări desemnând mulţimi fuzzy.

Ipoteza fundamentală pe care ne-am bazat construcţia este că disimilaritatea dintre două mulţimi fuzzy $(M_i^j)_\alpha = [\underline{m}_i^j(\alpha), \overline{m}_i^j(\alpha)]_{\alpha\in[0,1]}$ respectiv $(M_\ell^j)_\alpha = [\underline{m}_\ell^j(\alpha), \overline{m}_\ell^j(\alpha)]_{\alpha\in[0,1]}$ se datorează absenţei congruenţei între funcţiile limită-stângă $\underline{m}_i^j(\alpha)$ şi $\underline{m}_\ell^j(\alpha)$, respectiv funcţiile limită-dreaptă $\overline{m}_i^j(\alpha)$ şi $\overline{m}_\ell^j(\alpha)$. Reductibilitatea cazului fuzzy la cel strict (al variabilelor reale) este asumată implicit.

Pentru orice α din intervalul [0, 1] se poate calcula o distanţă pătratică între tăieturile de nivel α, corespunzătoare celor două mulţimi fuzzy:

$$d^2\left(M_i^j(\alpha), M_\ell^j(\alpha)\right) = \frac{\left(\underline{m}_i^j(\alpha) - \underline{m}_\ell^j(\alpha)\right)^2 + \left(\overline{m}_i^j(\alpha) - \overline{m}_\ell^j(\alpha)\right)^2}{2}$$

Prezintă îndeosebi interes cazurile:

$\alpha = 0$ - când mulţimile fuzzy se extind la întregul suport (ce coincide cu tăietura de nivel 0);

$\alpha = 1$ - când mulţimile fuzzy se restrâng la nucleu (tăietura de nivel 1).

Putem introduce acum **distanţa pătratică dintre două mulţimi fuzzy** M_i^j şi M_ℓ^j, ca *medie ponderată a distanţelor corespunzătoare tăieturilor de nivel* α. Ea va fi în mod natural definită, utilizând norma indusă de produsul scalar, ce înzestrează spaţiul Hilbert $L_2[0,1]$:

$$\begin{aligned} d^2\left(M_i^j, M_\ell^j\right) &= \frac{1}{2}\left[\int_{[0,1]} \left(\underline{m}_i^j(\alpha) - \underline{m}_\ell^j(\alpha)\right)^2 \lambda(d\alpha) + \int_{[0,1]} \left(\overline{m}_i^j(\alpha) - \overline{m}_\ell^j(\alpha)\right)^2 \lambda(d\alpha)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left(\underline{m}_i^j(\alpha) - \underline{m}_\ell^j(\alpha)\right)^2 2\alpha\, d\alpha + \int_0^1 \left(\overline{m}_i^j(\alpha) - \overline{m}_\ell^j(\alpha)\right)^2 2\alpha\, d\alpha\right] \end{aligned} \qquad (12)$$

unde integrala Lebesgue a fost considerată în raport cu măsura λ deja menţionată.

Conceptul metric, definit mai sus, satisface toate axiomele unei distanţe:

1. $d\left(M_i^j, M_\ell^j\right) \geq 0$
2. $d\left(M_i^j, M_\ell^j\right) = d\left(M_\ell^j, M_i^j\right)$
3. $d\left(M_i^j, M_\ell^j\right) = 0 \Rightarrow M_i^j = M_\ell^j$
4. $d\left(M_i^j, M_\ell^j\right) \leq d\left(M_i^j, M_k^j\right) + d\left(M_k^j, M_\ell^j\right)$

3.2. Distanța pătratică dintre doi indivizilor descriși de variabile fuzzy-evaluate. Inerția norului de indivizi

Să considerăm acum o colecție de date ce descriu n indivizi prin p variabile fuzzy-evaluate. Notăm cu:

$$X(\alpha)=\begin{pmatrix}\underline{X}(\alpha)\\ \overline{X}(\alpha)\end{pmatrix}, \text{ respectiv } Z(\alpha)=\begin{pmatrix}\underline{Z}(\alpha)\\ \overline{Z}(\alpha)\end{pmatrix}$$

matricele (2n×p)-dimensionale, formate fiecare din două blocuri matriceale suprapuse, reprezentând tăieturile de nivel α, ale datelor nestandardizate, respectiv standardizate. Desemnăm, totodată, doi indivizi, reprezentați pe spațiul produs $X=X^1\times\cdots\times X^p$ al variabilelor fuzzy-evaluate de liniile corespunzătoare ale blocurilor matriceale definite mai sus:

- individul $i(\alpha)$ prin:

$$\begin{pmatrix}\underline{X}_i(\alpha)\\ \overline{X}_i(\alpha)\end{pmatrix}, \text{ respectiv } \begin{pmatrix}\underline{Z}_i(\alpha)\\ \overline{Z}_i(\alpha)\end{pmatrix}$$

- individul $\ell(\alpha)$ prin:

$$\begin{pmatrix}\underline{X}_\ell(\alpha)\\ \overline{X}_\ell(\alpha)\end{pmatrix}, \text{ respectiv } \begin{pmatrix}\underline{Z}_\ell(\alpha)\\ \overline{Z}_\ell(\alpha)\end{pmatrix}$$

Distanța pătratică dintre cei doi indivizi $i(\alpha)$ și $\ell(\alpha)$ descriși prin tăieturi de nivel α este:

- pentru date nestandardizate:

$$\delta^2\left(i(\alpha),\ell(\alpha)\right)=\frac{\left\|\underline{X}_i(\alpha)-\underline{X}_\ell(\alpha)\right\|^2+\left\|\overline{X}_i(\alpha)-\overline{X}_\ell(\alpha)\right\|^2}{2} \tag{13a}$$

- pentru date standardizate:

$$\delta^2\left(i(\alpha),\ell(\alpha)\right)=\frac{\left\|\underline{Z}_i(\alpha)-\underline{Z}_\ell(\alpha)\right\|^2+\left\|\overline{Z}_i(\alpha)-\overline{Z}_\ell(\alpha)\right\|^2}{2} \tag{13b}$$

Din motive de reprezentativitate, **distanța pătratică dintre indivizii i și ℓ descriși de variabile fuzzy-evaluate,** se va calcula, în final, sub forma unei medii ponderate a distanțelor definite mai sus, în raport cu nivelurile arbitrare ale lui α. Avem:

$$\delta^2(i,\ell)=\int_0^1\delta^2\left(i(\alpha),\ell(\alpha)\right)2\alpha\,d\alpha \tag{14}$$

Inerția în raport cu centrul de greutate $G(\alpha)$ a norului compus din cei n indivizi (descriși prin tăieturi de nivel α și desemnați generic prin $i(\alpha)$) se definește astfel:

- pentru date nestandardizate:

$$I_G(\alpha)=\sum_{i=1}^n p_i\,\delta^2\left(i(\alpha),G(\alpha)\right)=\sum_{i=1}^n p_i\frac{\left\|\underline{Y}_i(\alpha)\right\|^2+\left\|\overline{Y}_i(\alpha)\right\|^2}{2}$$

$$=\sum_{j=1}^p\frac{\sum_{i=1}^n p_i\left[\underline{Y}_i^j(\alpha)\right]^2+\sum_{i=1}^n p_i\left[\overline{Y}_i^j(\alpha)\right]^2}{2}$$

$$=\sum_{j=1}^p\frac{\mathrm{var}\left(\underline{X}^j(\alpha)\right)+\mathrm{var}\left(\overline{X}^j(\alpha)\right)}{2}=\mathrm{tr}\left(\frac{\underline{V}(\alpha)+\overline{V}(\alpha)}{2}\right)=\mathrm{tr}\left(V(\alpha)\right)$$

- pentru date standardizate:

$$I_G(\alpha)=\sum_{i=1}^n p_i\frac{\left\|\underline{Z}_i(\alpha)\right\|^2+\left\|\overline{Z}_i(\alpha)\right\|^2}{2}$$

$$=\sum_{j=1}^p\frac{\sum_{i=1}^n p_i\left[\underline{Z}_i^j(\alpha)\right]^2+\sum_{i=1}^n p_i\left[\overline{Z}_i^j(\alpha)\right]^2}{2}$$

$$=\sum_{j=1}^p\frac{\mathrm{cor}\left(\underline{X}^j(\alpha),\underline{X}^j(\alpha)\right)+\mathrm{cor}\left(\overline{X}^j(\alpha),\overline{X}^j(\alpha)\right)}{2}$$

$$=\mathrm{tr}\left(\frac{\underline{R}(\alpha)+\overline{R}(\alpha)}{2}\right)=\mathrm{tr}\left(R(\alpha)\right)=p$$

Inerția norului de indivizi descriși de variabile fuzzy-evaluate se poate exprima acum sub forma unei medii ponderate a inerțiilor calculate cu ajutorul tăieturilor de nivel α:

$$I_G=\int_0^1 I_G(\alpha)\,2\alpha\,d\alpha \tag{15}$$

Trebuie notat că mai multe consecințe algoritmice rezultă natural din abordarea teoretică de mai sus. Câteva dintre ele au fost sugerate, pentru prima dată, într-una din lucrările noastre anterioare (vezi [2]).

4. Extensia fuzzy a analizei componentelor principale

4.1. Principiul metodei

Principiul **analizei componentelor principale** este acela de a rezuma și de a vizualiza sub formă grafică informația adusă de un număr de p variabile ce descriu n indivizi, printr-un număr mai restrîns (q<p) de variabile noi, astfel încât pierderea de informație să fie minimă. Informația despre indivizi este complet definită prin localizarea acestora în spațiul inițial de dimensiune p. Acțiunea de a reduce reprezentarea revine atunci la cea de a proiecta "norul" de indivizi pe un subspațiu afin de dimensiune q, determinat din condiția ca deformarea distanțelor dintre indivizi, inerentă în cursul proiecției, să fie minimă. Criteriul formal echivalent este de a maximiza inerția norului proiectat, adică media ponderată a

pătratelor distanţelor dintre proiecţiile indivizilor şi centrul lor de greutate.

În continuare, ne vom concentra atenţia asupra *extinderii acestei metode de analiză asupra cazului în care indivizii sunt caracterizaţi de variabile fuzzy-evaluate*.

4.2. Determinarea subspaţiului optimal de proiecţie, utilizând teoria proiectorilor ortogonali

Fie P matricea de proiecţie M-ortogonală (idempotentă $P^2 = P$ şi M-simetrică $P'M = MP$) a vectorilor p-dimensionali din spaţiul iniţial pe un subspaţiu de dimensiune q. Matricea M înzestrează spaţiul indivizilor cu o metrică ce permite o scalare convenabilă a datelor. Vom considera cele două cazuri relevante (induse de alegerea lui M):

(1^o) - indivizii sunt descrişi de matricea (2n×p)-dimensională a datelor centrate, exprimate sub forma tăieturilor de nivel α :

$$Y(\alpha) = \begin{pmatrix} \underline{Y}(\alpha) \\ \overline{Y}(\alpha) \end{pmatrix}$$

Pentru o valoare fixată a lui α din intervalul [0, 1], $Y(\alpha)$ este o matrice numerică. Imaginea sa, obţinută prin proiecţia celor 2n vectori linie, de dimensiune p, cu ajutorul operatorului de proiecţie ortogonală, este matricea:

$$\hat{Y}(\alpha) = \begin{pmatrix} \underline{Y}(\alpha) \\ \overline{Y}(\alpha) \end{pmatrix} \cdot P'$$

Matricea de covarianţă a lui $\hat{Y}(\alpha)$ este dată atunci de:

$$\hat{V}(\alpha) = P \cdot \begin{pmatrix} \underline{Y}(\alpha) \\ \overline{Y}(\alpha) \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} D/2 & 0 \\ 0 & D/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{Y}(\alpha) \\ \overline{Y}(\alpha) \end{pmatrix} \cdot P' = P \cdot V(\alpha) \cdot P'$$

În cazul datelor centrate, matricea care furnizează metrica pe spaţiul indivizilor este $M = I$, deci, vom avea $P = P' = P^2$. Prin urmare, inerţia totală a norului proiectat al indivizilor, pe subspaţiul q-dimensional corespunzător, rezultă sub forma:

$$I(\alpha) = tr\left(\hat{V}(\alpha)\right) = tr\left(PV(\alpha)P'\right) =$$
$$= tr\left(PV(\alpha)P\right) = tr\left(V(\alpha)P^2\right) = tr\left(V(\alpha)P\right)$$

Pentru a evita alegerea arbitrară a lui α, putem, din nou, să utilizăm media ponderată, introdusă pe spaţiul funcţiilor măsurabile, de pătrat integrabil. Matricea de covarianţă a proiecţiilor "defuzzificate" este atunci:

$$\hat{V} = P \left\{ \int_0^1 \begin{pmatrix} \underline{Y}(\alpha) \\ \overline{Y}(\alpha) \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} D/2 & 0 \\ 0 & D/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{Y}(\alpha) \\ \overline{Y}(\alpha) \end{pmatrix} 2\alpha \, d\alpha \right\} P'$$

$$= P \frac{\underline{V} + \overline{V}}{2} P' = P V P'$$

şi deci:

$$I = tr\left(\hat{V}\right) = tr\left(P V P'\right) = tr\left(V P\right)$$

(2^o) - indivizii sunt descrişi de matricea (2n×p)-dimensională a datelor standardizate, exprimate sub forma tăieturilor de nivel α :

$$Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \underline{Z}(\alpha) \\ \overline{Z}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}(\alpha) \cdot \underline{D}_{1/s}(\alpha) \\ \overline{Y}(\alpha) \cdot \overline{D}_{1/s}(\alpha) \end{pmatrix}$$

unde:

$$\underline{D}_{1/s}(\alpha) = \mathrm{diag}(1/\underline{s}_j(\alpha)); \quad \underline{s}_j(\alpha) = \sqrt{\underline{v}_{jj}(\alpha)}$$
$$\overline{D}_{1/s}(\alpha) = \mathrm{diag}(1/\overline{s}_j(\alpha)); \quad \overline{s}_j(\alpha) = \sqrt{\overline{v}_{jj}(\alpha)}$$

Matricea proiecţiilor standardizate este:

$$\hat{Z}(\alpha) = \begin{pmatrix} \underline{Z}(\alpha) \\ \overline{Z}(\alpha) \end{pmatrix} \cdot P'$$

În acest caz matricele de covarianţă (asociate atât datelor iniţiale cât şi celor proiectate) coincid cu matricele de corelaţie. Prin urmare, avem:

$$\hat{R}(\alpha) = P \cdot \begin{pmatrix} \underline{Z}(\alpha) \\ \overline{Z}(\alpha) \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} D/2 & 0 \\ 0 & D/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{Z}(\alpha) \\ \overline{Z}(\alpha) \end{pmatrix} \cdot P' = P \cdot R(\alpha) \cdot P'$$

$$I(\alpha) = tr\left(\hat{R}(\alpha)\right) = tr\left(R(\alpha) P\right)$$

$$\hat{R} = P \left\{ \int_0^1 \begin{pmatrix} \underline{Z}(\alpha) \\ \overline{Z}(\alpha) \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} D/2 & 0 \\ 0 & D/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{Z}(\alpha) \\ \overline{Z}(\alpha) \end{pmatrix} 2\alpha \, d\alpha \right\} P'$$

$$= P \frac{\underline{R} + \overline{R}}{2} P' = P R P'$$

$$I = tr\left(\hat{R}\right) = tr\left(P R P'\right) = tr\left(R P\right)$$

În ambele cazuri prezentate mai sus, problema determinării subspaţiului optimal de proiecţie constă în a găsi matricea de proiecţie ortogonală P, de rang q, ce satisface condiţia de a maximiza inerţia totală a norului proiectat $\left(I = tr(V P)\right.$, respectiv $\left.I = tr(R P)\right)$.

Evident, soluţia este cea cunoscută din cazul clasic: subspaţiul optimal de proiecţie de dimensiune q este generat de cei q vectori proprii asociaţi celor mai mari q valori proprii ale matricei V (în cazul datelor centrate), adică:

$$V U = U D_\lambda ; \; U'U = I_p ; \; D_\lambda = \mathrm{diag}(\lambda_k) ; \; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$$

respectiv matricei R (în cazul datelor standardizate), adică:

$$R U = U D_\lambda ; \; U'U = I_p ; \; D_\lambda = \mathrm{diag}(\lambda_k) ; \; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$$

4.3. Proiecţia entităţilor fuzzy: Interpretare

O particularitate importantă, atunci când metoda se aplică unei colecţii de date fuzzy, constă în semnificaţia componentelor principale. Acestea se pot defini atât pentru valori arbitrare ale lui α din intervalul $[0,1]$:

$$C(\alpha)=\begin{pmatrix}\underline{C}(\alpha)\\ \overline{C}(\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{Y}(\alpha)\\ \overline{Y}(\alpha)\end{pmatrix}U$$

cât şi ca rezultat al defuzzificării, prin utilizarea mediei ponderate pe spaţiul funcţiilor măsurabile:

$$C=\begin{pmatrix}\underline{C}\\ \overline{C}\end{pmatrix}=\left(\int_0^1\begin{pmatrix}\underline{Y}(\alpha)\\ \overline{Y}(\alpha)\end{pmatrix}2\alpha\, d\alpha\right)U$$

Deoarece mai sus s-a avut în vedere cazul datelor centrate, U desemnează matricea vectorilor proprii coloană ai lui V. În plus, avem:

$$\text{Media}\begin{pmatrix}\underline{C}(\alpha)\\ \overline{C}(\alpha)\end{pmatrix}=\text{Media}\begin{pmatrix}\underline{Y}(\alpha)\\ \overline{Y}(\alpha)\end{pmatrix}U=0_{2n\times p}$$

Matricea de covarianţă a componentelor principale:

$$\text{Var}\begin{pmatrix}\underline{C}\\ \overline{C}\end{pmatrix}=\int_0^1\begin{pmatrix}\underline{C}(\alpha)\\ \overline{C}(\alpha)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}D/2 & 0\\ 0 & D/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\underline{C}(\alpha)\\ \overline{C}(\alpha)\end{pmatrix}2\alpha\, d\alpha$$

$$=U'\left\{\int_0^1\begin{pmatrix}\underline{Y}(\alpha)\\ \overline{Y}(\alpha)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}D/2 & 0\\ 0 & D/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\underline{Y}(\alpha)\\ \overline{Y}(\alpha)\end{pmatrix}2\alpha\, d\alpha\right\}\cdot U$$

$$=U'VU=U'UD_\lambda=D_\lambda$$

Prin urmare:

$$std(C^k)=\sqrt{\lambda_k}\,; \qquad cov(C^j,C^k)=0,\ \forall j\neq k$$

Observaţii:

a. În cazul datelor standardizate, matricea Y trebuie înlocuită cu Z.

b. Întrucât componentele principale sunt de medie nulă, ele pot fi standardizate prin multiplicare cu inversele abaterilor standard ($1/\sqrt{\lambda_k}$):

$$\begin{pmatrix}\underline{C}(\alpha)\\ \overline{C}(\alpha)\end{pmatrix}\cdot D_{1/\sqrt{\lambda}},$$

unde $D_{1/\sqrt{\lambda}}=\text{diag}\left(1/\sqrt{\lambda_k}\right)$

c. Matricea corelaţiilor dintre variabilele iniţiale X şi componentele principale C se defineşte astfel:

$$R(X,C)=\left\{\int_0^1\begin{pmatrix}\underline{Z}(\alpha)\\ \overline{Z}(\alpha)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}D/2 & 0\\ 0 & D/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\underline{C}(\alpha)\\ \overline{C}(\alpha)\end{pmatrix}2\alpha\, d\alpha\right\}\cdot D_{1/\sqrt{\lambda}}$$

$$=\left\{\int_0^1\begin{pmatrix}\underline{Z}(\alpha)\\ \overline{Z}(\alpha)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}D/2 & 0\\ 0 & D/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\underline{Z}(\alpha)\\ \overline{Z}(\alpha)\end{pmatrix}2\alpha\, d\alpha\right\}\cdot U\cdot D_{1/\sqrt{\lambda}}$$

$$=R\cdot U\cdot D_{1/\sqrt{\lambda}}=U\cdot D_\lambda\cdot D_{1/\sqrt{\lambda}}=U\cdot D_{\sqrt{\lambda}}$$

Aşadar:

$$r\left(C^k,X^j\right)=\sqrt{\lambda_k}\cdot u_j^k\,, \qquad k=\overline{1,p},\ j=\overline{1,p}$$

Dacă sortăm cele p valori proprii în ordine descendentă şi alegem primele q dintre ele (cu $q<p$), atunci $r(C^k,X^j)_{k=1,\dots,q}$ se pot interpreta ca fiind coordonatele variabilei X^j pe primele q axe de inerţie maximă (proiecţia variabilelor iniţiale pe subspaţiul q-dimensional de inerţie maximă).

În final, trebuie să proiectăm cei n indivizi descrişi de variabile fuzzy-evaluate pe subspaţiul q-dimensional de inerţie maximă.

Fiecărui individ îi vor corespunde două proiecţii. Astfel, pentru o valoare a lui α, fixată arbitrar în intervalul $[0,1]$, se vor obţine proiecţiile limitelor intervalelor ce definesc tăieturile de nivel α:

$$s\cdot\begin{pmatrix}\underline{Z}(\alpha)\\ \overline{Z}(\alpha)\end{pmatrix}\cdot U$$

unde s este o constantă de scalare (uzual, $s=1/\sqrt{p}$).

Observaţie: În principiu, se pot proiecta orice valori situate pe suportul mulţimilor fuzzy, ce definesc indivizii, sau se pot realiza interpolări între perechi de valori extreme.

Proiecţiile "defuzzificate" utilizând media ponderată introdusă pe spaţiul funcţiilor măsurabile sunt date de:

$$s\cdot\begin{pmatrix}\underline{Z}\\ \overline{Z}\end{pmatrix}\cdot U=s\cdot\left\{\int_0^1\begin{pmatrix}\underline{Z}(\alpha)\\ \overline{Z}(\alpha)\end{pmatrix}2\alpha\, d\alpha\right\}\cdot U$$

5. Extensia fuzzy a algoritmilor de clasificare automată

În scopul ordonării indivizilor, al producerii de grupări şi al descrierii acestora printr-un anumit număr de caractere specifice, se poate apela la o **clasificare automată**. Considerînd, spre exemplu, mulţimea celor n indivizi descrişi de p variabile, clasificarea presupune definirea unui anumit număr de clase (agregări) de indivizi care, în raport cu distanţele dintre ei, fac să varieze cel mai puţin inerţia la nivelul fiecărei clase, maximizând, totodată, inerţia interclase. Dacă strategia de clasificare este una ierarhic ascendentă, indivizii sunt împărţiţi în clase din ce în ce mai largi, obţinute prin regrupări succesive ale părţilor. Sunt produse, astfel, ierarhii indexate, care asociază fiecărei părţi un anumit nivel de agregare, utilizând o distanţă ultrametrică.

Conceptul cheie ce permite generalizarea algoritmilor de clasificare automată în context fuzzy este distanţa pătratică dintre indivizi, introdusă în paragraful 3.2. Într-adevăr, punctul de plecare în cadrul majorităţii algoritmilor de clasificare îl reprezintă matricea simetrică a distanţelor mutuale dintre indivizi. Odată această matrice calculată, rezolvarea problemei se reduce la aplicarea metodelor clasice.

6. Modele grafice ale dependenţelor condiţionate dintre variabilele fuzzy-evaluate

Modelele grafice sunt modelele statistice ale legăturilor dintre variabile, bazate, în esenţial, pe conceptul de independenţă condiţionată. Graful complet, al conexiunilor potenţiale dintre variabile, reprezintă modelul saturat. Modelul real se obţine prin desfacerea legăturilor statistic nesemnificative (acelea care verifică ipoteza de independenţă condiţionată).

Generalizarea metodologiei clasice la cazul variabilelor fuzzy-evaluate este, şi în acest caz, pe deplin posibilă. Într-adevăr, elementul cheie în stabilirea independenţei a două variabile continue, condiţionată de restul variabilelor, îl reprezintă inversa matricei de corelaţie. Cum printre generalizările propuse de această lucrare (vezi secţiunea 2) se numără şi calculul matricei de corelaţie asociată variabilelor fuzzy-evaluate, sunt create premisele conceptuale şi metodologice pentru a accede la mecanismul clasic de specificare a modelelor grafice gaussiene, concomitent cu extinderea câmpului de aplicaţii al acestora. Odată depăşită faza acestor generalizări, utilizarea unei tehnici de partiţionare ne permite să găsim estimaţia de verosimilitate maximă a inversei matricei de corelaţie şi să evaluăm devianţa conexiunilor dintre variabile; cum statistica asociată acestei măsuri urmează asimptotic o distribuţie χ^2, ea oferă baza testării independenţei condiţionate şi, implicit, a construcţiei grafului legăturilor statistic semnificative

O cale simplă de a defini un model grafic este de a sintetiza toate restricţiile de independenţă condiţionată prin partiţionarea vectorului aleator X în 3 subvectori (X^a, X^b, X^c) şi de a scrie modelul sub forma: $X^b \perp X^c \mid X^a$. Următoarea propoziţie (vezi [7]) are un interes practic deosebit:

Propoziţie: Estimaţia de verosimilitate maximă $\hat{V}$ a matricei de covarianţă V, pentru modelul grafic specificat în întregime de $X^b \perp X^c \mid X^a$ este:

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} S_{aa} & & \\ S_{ba} & S_{bb} & \\ S_{ca} & S_{ca} S_{aa}^{-1} S_{ab} & S_{cc} \end{pmatrix}$$

unde S desemnează matricea de covarianţă de selecţie a vectorului $X = (X^a, X^b, X^c)$, matrice organizată pe blocuri potrivit partiţionării lui X. Dacă X^a, X^b şi X^c sunt p-, q-, respectiv r-dimensionali, atunci măsura:

$$\operatorname{dev}(X_b \perp X_c \mid X_a) = -N \log \frac{\det(S) \cdot \det(S_{aa})}{\det(S_{a\cup b, a\cup b}) \cdot \det(S_{a\cup c, a\cup c})}$$

se numeşte *devianţă* şi urmează o distribuţie asimptotică χ^2 cu q·r grade de libertate. Dacă $q = r = 1$, această expresie a devianţei se simplifică, luând forma:

$$\operatorname{dev}(X^b \perp X^c \mid X^a) = -N \log\left(1 - \operatorname{cor}_N^2(X^b, X^c \mid X^a)\right)$$

unde $\operatorname{cor}_N(X^b, X^c \mid X^a)$ este coeficientul de corelaţie parţială de selecţie dintre X^b şi X^c, dat fiind X^a.

Detalii cu privire la conţinutul, specificul şi aplicabilitatea acestei clase de metode ale analizei statistice multidimensionale pot fi găsite în [7]).

7. Concluzie

Am arătat că analiza datelor multidimensionale în context fuzzy poate fi întemeiată prin introducerea unor concepte metrice adecvate. S-a analizat structura spaţiului variabilelor fuzzy-evaluate, cea a spaţiului indivizilor descrişi de astfel de variabile, precum şi modul în care teoria proiectorilor ortogonali operează pe aceste spaţii. S-au cercetat, de asemenea, consecinţele metodologice pe care extensiile fuzzy ale conceptelor introduse le au pentru trei mari categorii de aplicaţii: analiza componentelor principale, clasificarea automată şi generarea inductivă a modelelor grafice de asociere (dependenţă condiţionată).

Bibliografie

1. **GEORGESCU, V.**: Proiectarea sistemelor expert în logică fuzzy şi logică posibilistă, Ed. Intarf, Craiova, 1995.
2. **GEORGESCU, V.**: A Fuzzy Generalization of Principal Components Analysis and Automatic Classification. În: Proc. of the Third Congress of SIGEF, 10-13 November 1996, Buenos Aires.
3. **MORDESON, J., NAIR, P.**: Fuzzy mathematics, Physica-Verlag, Heidelberg, 1998.
4. **PEARL, J.**: Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference, Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1988.
5. **SAPORTA, G.**: Probabilités, analyse des données et statistique, Technip, Paris, 1990.
6. **WEIR, J. A.**: General Integration and Measure II, Cambridge University Press, 1974.
7. **WITTAKER, J.**: Graphical Models in Applied Multivariate Statistics, John Wiley, New York, 1990.