

DETERMINAREA UNEI HĂRȚI DE MANEVRABILITATE PENTRU O AERONAVĂ DE LUPTĂ

dr. ing. Octavian Grigore

dr. ing. Ovidiu Grigore

Universitatea Politehnică București

Rezumat: În articol se tratează aspectul determinării unei hărți de manevrabilitate prin proiectarea unui regulator robust pentru un sistem liniar, cu o dinamică rapidă și cu perturbații. Pentru aceasta, se proiectează un algoritm de calcul al marginilor perturbațiilor pentru care sistemul rămâne în continuare stabil (controlabil). De asemenea, algoritmul poate fi utilizat pentru aflarea efortului asupra comenzii, în cazul unei clase de perturbații date. În încheierea articolului, algoritmul se aplică pentru determinarea comenzii unei aeronave de luptă.

Cuvinte cheie: domeniu de robustețe, indice de stabilitate, efort nominal.

1. Introducere

Problema analizei și a sintezei unui regulator robust pentru un sistem liniar cu perturbații a fost intens abordată în articolele de specialitate în ultimii 20 de ani. Cel mai important factor care le influențează este "tipul perturbației". Din acest punct de vedere, perturbațiile pot apărea sub diferite forme: liniare, neliniare, invariabile și variabile în timp, structurale și nestructurale. Perturbațiile structurale sunt acelea pentru care marginile sunt cunoscute, în timp ce, la cele nestructurale, se cunoaște doar modulul marginilor.

În articol, vom considera influența doar a perturbațiilor structurale asupra sistemului nominal.

Din această perspectivă, trebuie să amintim despre lucrările unor cercetători care au prezentat proceduri de proiectare a unui regulator robust pentru perturbații tolerabile. Horisberger și Belanger [4] prezintă un algoritm pentru determinarea ieșirii unui regulator în cazul perturbațiilor maxime posibile, astfel încât sistemul reglat să rămână stabil, dar nu se specifică concret marginile acestor perturbații. Chang și Peng [2], Patel și Toda [10], Patel, Toda și Sridhar [11] determină marginile normate a matricei perturbate. De asemenea, pentru "perturbațiile structurale" Petersen și Hollot [12], Petersen [13], [14], Leitman [8], Hollot și Barmish [5], au dat tehnicile pentru determinarea unui regulator robust folosind teoria Liapunov, dar nu au specificat și marja perturbațiilor. Yedavalli a dezvoltat în [6], [7] marginile perturbațiilor, dând un algoritm care sintetizează tehnicile apărute anterior, de proiectare a unui regulator robust.

În articolul de față, se îmbunătățește acest algoritm prin determinarea unor clase de stabilitate robustă, respectiv, pentru un "câștig" al regulatorului se poate determina mărimea maximă permisă a perturbației, sau pentru perturbații cunoscute se poate afla acest "câștig" astfel încât sistemul reglat să rămână robust.

2. Proiectarea regulatorului robust folosind analiza marginilor perturbațiilor

Fie sistemul liniar și staționar:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{1}$$

unde: x este vectorul de stare de $n \times 1$, u vectorul de comandă de $m \times 1$ și y vectorul de ieșire de $k \times 1$. Se presupune că sistemul (A, B, C) este complet controlabil și observabil.

Fie legea de comandă:

$$u = Gx,\tag{2}$$

iar ΔA și ΔB matricile perturbațiilor alcătuite din modulul maxim al perturbațiilor admisibile.

$$\begin{aligned}\Delta A &= m_a U_{ea} \\ \Delta B &= m_b U_{eb}\end{aligned}\tag{3}$$

cu: m_a maximum tuturor elementelor din matricea perturbație ΔA , m_b maximum tuturor elementelor din matricea perturbație ΔB , iar $U_{eij} = m_{ij} / m$ pentru orice element $m_{ij} \neq 0$ și $m = \max_{i,j} m_{ij}$. Cu aceste notații, perturbația totală, care afectează sistemul (1) cu legea de control (2) devine:

$$\Delta = \Delta A + \Delta B = m_a U_{ea} + m_b U_{eb} G\tag{4}$$

Presupunând cunoscut raportul $m_b/m_a = \bar{m}$, atunci sistemul (1) este asimptotic stabil dacă [6]:

$$m_a < \frac{1}{\sigma_{\max} [R(U_{ea} + \bar{m}U_{eb}G)]_s} = \varepsilon \quad (5)$$

și $m_b = \bar{m} \varepsilon$, iar R este soluția ecuației Riccati:

$$R(A + BG) + (A + BG)^T R + 2I_n = 0 \quad (6)$$

cu $(A + BG)$ o matrice asimptotic stabilă.

Dacă ε din (5) este cunoscut, atunci se poate defini un *indice de stabilitate robustă* β_{SR} , ca o măsură a stabilității robuste [6]:

$$\beta_{SR} = \varepsilon \quad (7)$$

Din (4), (5) și (6) se observă că expresiile lui Δ , ε și β_{SR} depind de matricea regulatorului G . Pentru a găsi o legătură între β_{SR} și G , avem nevoie de o mărime scalară cantitativă pentru G . Fie ea:

$$J_{cn} < \|G\|_s = \sigma_{\max}(G) \quad (8)$$

unde cu J_{cn} s-a notat mărimea “efortului nominal de control”, iar cu G matricea regulatorului liniar, calculată prin algoritmul pătratic:

$$G = -\frac{1}{r_c} P_0^{-1} B^T R \quad (9)$$

cu R satisfăcând ecuația Riccati:

$$RA + A^T R - RB \frac{P_0^{-1}}{r_c} B^T R + \bar{Q} = 0 \quad (10)$$

Variația indicelui de stabilitate robustă β_{SR} cu efortul nominal de control J_{cn} este dependentă de matricea perturbație, dar și de comportamentul soluției ecuației Riccati. Dacă obiectivul urmărit este doar stabilizarea robustă, algoritmul constă în determinarea unei matrici de reglaj, care maximizează stabilitatea. Deci, în pasul următor, trebuie determinate curbele β_{SR} funcție de J_{cn} pentru diferite valori ale matricii de reglaj G . Din aceste curbe, se alege matricea de reglaj G , pentru care β_{SR} este maxim.

3. Regulator robust pentru o aeronavă de luptă

Modelul liniar, al unei aeronave de luptă (obținut în urma aplicării ipotezei perturbațiilor mici), se poate împărți în două subsisteme cărora le corespund două moduri principale de mișcare: modul longitudinal și modul lateral [1], [3], [9]. Fie modul longitudinal de mișcare al aeronavei reprezentat de:

$$\dot{X} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u, \quad x(0) = x_0. \quad (11)$$

Componentele vectorului de stare $x \rightarrow \mathbb{R}^4$ și ale celui de control $u \rightarrow \mathbb{R}^2$ sunt:

- x_1 este viteza de ruluu (rad/s);
- x_2 este viteza de rotație (rad/s);
- x_3 este unghiul de rotație (rad);
- x_4 este unghiul de ruluu (rad);
- u_1 este bracaajul de eleron;
- x_1 este bracaajul de direcție.

Modul longitudinal al aeronavei de luptă F16, pentru o gamă de viteze de la 300 m/s la 500 m/s și o gamă de înălțimi între 0 m și 1500 m, este:

$$A = \begin{bmatrix} -0,298 & -0,948 & 0,056 & 0,061 \\ 1 & 0,31 & -0,25 & 0,009 \\ -3,93 & -0,629 & -5,37 & 0 \\ 0,26 & 1,99 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,006 & 0 \\ -2,96 & -0,009 \\ 11,72 & -13,01 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Datorită modificării vitezei aerului și a altitudinii, schimbări semnificative au loc în elementele a_{21} , a_{31} și b_{32} ale matricii A și B . Fie marginile acestor elemente:

$$0,0098 \leq |a_{21}| \leq 0,275;$$

$$0,17 \leq |a_{31}| \leq 2,05;$$

$$0,37 \leq |b_{32}| \leq 3,21.$$

Astfel, cunoaștem matricile ΔA și ΔB . Vom considera șapte cazuri, cuprinse în gama de perturbații admise:

$$|a_{21}| = |a_{21}| + 0,0442$$

$$|a_{31}| = |a_{31}| + 0,313;$$

$$|b_{32}| = |b_{32}| + 0,473$$

(12)

Pentru determinarea regulatorului care stabilizează sistemul se folosește ecuația Riccati (10) unde:

$$P_0 = I_2;$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0,06 & 0,035 \\ 0 & 0,01 & 0,0095 & 0 \\ 0 & 0,0095 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,06 \end{bmatrix};$$

$$0 \leq r_c \leq 1; r_c = r_c + 0,1.$$

Pentru a putea trasa curbele indicelui de stabilitate β_{SR} , calculat cu relația (5), funcție de efortul nominal de control J_{cn} , calculat cu (8,9) considerăm următoarele 11 cazuri:

Cazul	Unde acționează perturbația	$ a_{21} $	$ a_{31} $	$ b_{32} $	$m_a = \max(a_{ij})$	$m_b = b_{32} $	$\bar{m} = \frac{m_b}{m_a}$	În Fig.
1	A	0,095	0,95	0	0,95	0	0	1
2	A	0,175	1,84	0	1,84	0	0	1
3	B	0	0	1,57	0	1,57	10	2
4	B	0	0	2,15	0	2,15	10	2
5	A și B	0,0098	0,17	0,37	0,17	0,37	2,17	3
6	A și B	0,054	0,483	0,843	0,483	0,843	1,75	3
7	A și B	0,0982	0,796	1,316	0,796	1,316	1,65	3
8	A și B	0,1424	1,109	1,789	1,109	1,789	1,61	3
9	A și B	0,1866	1,422	2,262	1,422	2,262	1,59	3
10	A și B	0,2308	1,735	2,735	1,735	2,735	1,57	3
11	A și B	0,275	2,05	3,21	2,05	3,21	1,56	3

Din figurile 1 – 3 se poate trage concluzia:

- i. când gama parametrilor perturbației crește, gama efortului controlului descrește;
- ii. pentru un set de parametri perturbatori, efortul J_{cn} și, respectiv, matricea de reglaj G , corespunzătoare maximului indicelui β_{SR} , sunt unice;
- iii. pentru toate cazurile prezentate, maximul lui β_{SR} se atinge la același efort J_{cn} ;

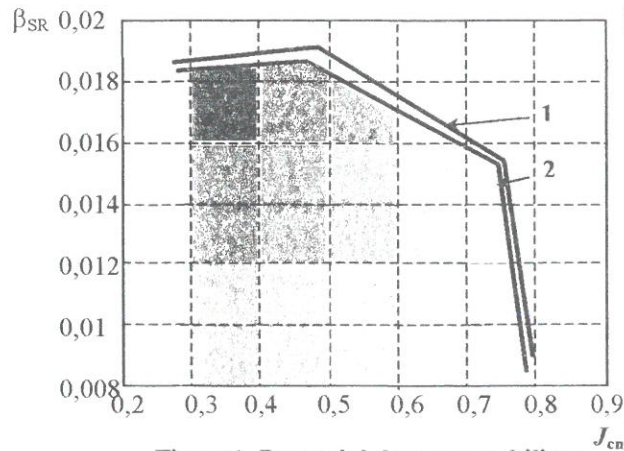


Figura 1. Domeniul de manevrabilitate pentru $(\Delta A \neq 0, \Delta B = 0)$

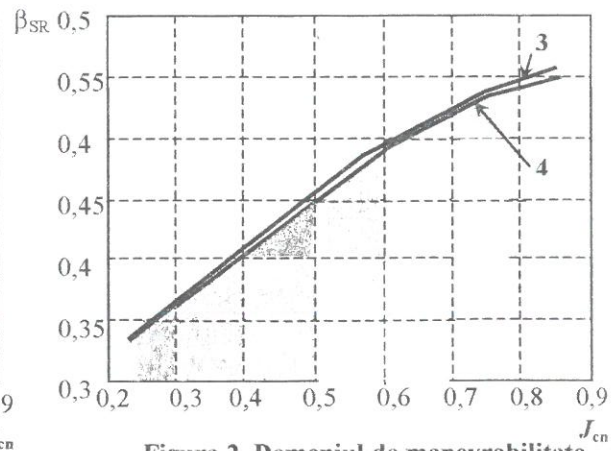
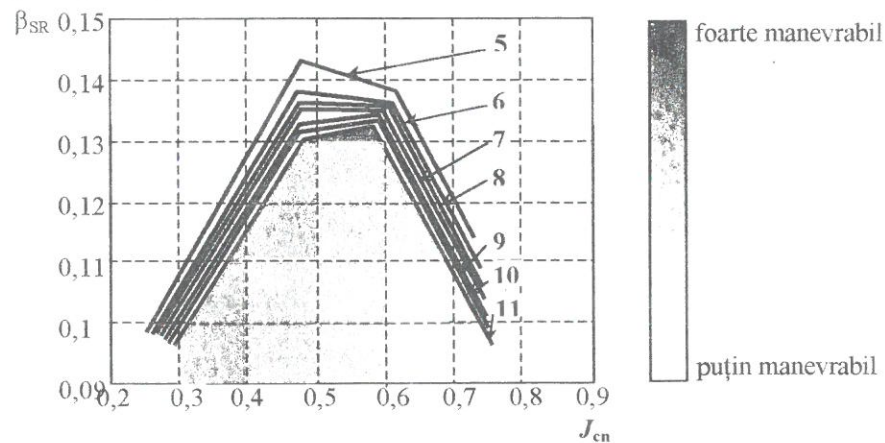


Figura 2. Domeniul de manevrabilitate pentru $(\Delta A = 0, \Delta B \neq 0)$



- i. dacă parametrul perturbație afectează doar matricea de comandă B există un maxim pentru β_{SR} la același efort J_{cn} , care crește la creșterea perturbației, ceea ce înseamnă că aeronava este foarte manevrabilă.

Figura 3. Domeniul de manevrabilitate în prezența perturbațiilor $(\Delta A \neq 0, \Delta B \neq 0)$

Bibliografie

1. **BLAKELOCK, J. H.:** Automatic Control of Aircraft and Missiles 2-nd ed., John Wiley & Sons, Inc., NY, 1991.
2. **CHANG, S.S.L., T.K.C. PENG:** Adaptive Guaranteed Cost of System with Uncertain Parameters. În: I.E.E.E. Trans. On Automat. Contr., AC 17, 1972, pp.474-483.
3. **ETKIN, B., L. D. REID:** Dynamics of flight. Stability and Control 3-d ed., John Wiley & Sons, Inc., NY, 1994.
4. **HORISBERGER, H. P., P.R. BELANGER:** Regulators for Linear Time Invariant Plants with Uncertain Parameters. În: I.E.E.E. Trans. on Automat. Contr., AC 21, 1976, pp.705-708.
5. **HOLLOT, C.V., B. R. BARMISH:** Optimal Quadratic Stabilization of Uncertain Linear System. În: Proc. of the 18-th Allerton Conference on Communication, Control and Computing, 1980, pp.697-706.

6. **YEDAVALLI, R. K.:** Robust Control Design for Aerospace Applications. În: I.E.E.E. Trans. on Aerospace and Electr. Systems, 25, 1989, pp. 314-324.
7. **YEDAVALLI, R. K.:** Stability Robustness Measure Under Dependent Uncertainty. În: Proc. of the 1988 American Control Conference, Atlanta, 1988, pp. 820-823.
8. **LEITMANN, G.:** Guaranteed Asymptotic Stability for Some Linear Systems with Bounded Uncertainties, A.S.M.E. În: Journal Dynam. Syst. Measurement Control, 101, 1979, pp. 212-217.
9. **MCLEAN, D.:** Automatic Flight Control Systems, Prentice Hall International, (UK) Ltd. (1990).
10. **PATEL, R.V., M. TODA:** Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems. În: Proc. of the Joint Automatic Control Conference, TP8-A. 1980.
11. **PATEL, R.V., M. TODA, B. SRIDHAR:** Robustness of Linear Quadratic State Feedback Designs in the Presence of System Uncertainty. În: I.E.E.E. Trans. on Automat. Contr., AC 22, 1977, pp. 945-949.
12. **PETERSEN, I.R., C.V. HOLLOT:** A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems. În: Automatica, 22, 1986, pp. 397-411.
13. **PETERSEN, I.R.:** A Riccati Equation Approach to the Design of Stabilizing Controllers and Observers for a Class of Uncertain Linear Systems. În: I.E.E.E. Trans. on Automat. Contr., AC 30, 1985, pp.565-580.
14. **PETERSEN, I.R.:** Structural Stabilization of Uncertain Systems: Necessity of the Matching Condition. În: S.I.A.M. Journal Control and Optimization, 23, 1985, pp. 286 -296.