REȚELE ORTOGONALE

Cristian Lupu

Centrul pentru Noi Arhitecturi Electronice al Academiei Române

Rezumat: Prezentăm într-un mod sistematic, de la simplu la complex, pricipalele rețele ortogonale. Se pornește de la sistemul de numerație în bază multiplă și se continuă cu reprezentările algebrice și grafice ale lanțului, hipergrilei, hipercubului binar, hipergrilei generalizate, torului, hipertorului, hipertorului generalizat, rețelei complet conectate, hipercubului și hipercubului generalizat. În încheierea articolului, se propune o clasificare a rețelelor directe și o definiție generalizată a rețelelor ortogonale.

Cuvinte cheie: hipergrilă, hipergrilă generalizată, hipertor, N generalizat, hipercub, hipercub generalizat, structuri generalizate

1. Sistemul de numerație în bază multiplă

O topologie de rețea directă este *ortogonală,* dacă și numai dacă nodurile sale pot fi aranjate într-un spațiu ortogonal n-dimensional și orice legătură poate fi aranjată într-un mod în care produce o deplasare într-o singură dimensiune.

Pentru reprezentarea algebrică a topologiilor de rețele ortogonale, prezentate în acest articol, se foloseste *sistemul de numerație în baza multiplă*, SNBM. Cu ajutorul acestui sistem, cele N noduri (N în zecimal) ale unei rețele directe se numără pornind de la reprezentarea în SNBM a lui N. Conform acestui sistem, orice număr N poate fi reprezentat ca un produs de numere întregi:

$$N = m_r \times m_{r-1} \times \dots \times m_i \times \dots \times m_1 \tag{1.1}$$

unde $m_i > 1$, $1 \le i \le r$. Evident considerăm $N > 1$ ceea ce impune $m_i > 1$.

Pe baza acestei reprezentări, fiecărui nod al rețelei directe i se poate asocia o adresă X, $0 \le X \le N-1$, formată din r digiți:

$$X = (x_r\, x_{r-1} \dots x_i \dots x_1), \tag{1.2}$$

unde $0 \le x_i \le m_i - 1$.

Fiecare digit x_i al unei adrese X are asociată o pondere w_i astfel încât să fie respectate regulile:

$$X_{10} = \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot w_i \tag{1.3}$$

$$w_i = \prod_{j=1}^{i-1} m_j = m_{i-1} m_{i-2} \dots m_1, \text{ pentru toți } i,\ 1 \le i \le r,\ w_1 = 1.$$

Cu ajutorul SNBM, vom prezenta, într-un mod unitar, de la simplu la complex, cele mai utilizate topologii de rețele ortogonale.

2. Lanțul sau *Pipeline*-ul

Lanțul (L) sau *pipeline*-ul este o rețea directă, în care nodurile sunt legate printr-un lanț (figura 1). Lanțul are o singură dimensiune, este *unidimensional*. Definiția algebrică a unei rețele în lanț se face pe baza reprezentării adreselor nodurilor în SNBM observând că $N_L = m$:

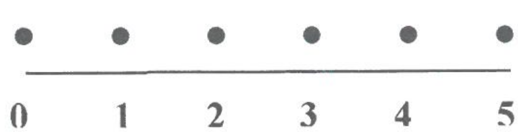


Figura 1. Un lanț cu 6 noduri

Definiție. *Un lanț* este o rețea de interconectare unidimensională, în care fiecare nod reprezentat printr-o adresă în SNBM, $X = (x)$, $0 \le x \le m-1$, este conectat cu nodurile având adresele:

$X' = (x'),$

unde:

$x' = x \pm 1$ pentru $x \neq 0$ şi $x \neq (m - 1)$

$x' = x + 1$ pentru $x = 0$

$x' = x - 1$ pentru $x = m - 1$

Observăm că lanţul se dezvoltă pe o singură dimensiune (logică), $N_L = m$, numărul de dimensiuni r fiind 1. Ca atare, este necesar doar un singur digit pentru adresare, scris în baza m şi a cărui pondere este $w=1$. Astfel, lanţul din figura 1 cu 6 noduri are adresele scrise în baza 6 cu un singur digit: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

3. Hipergrila

Hipergrila (HG) este un lanţ de aceeaşi mărime, generalizat în mai multe dimensiuni. Reprezentarea algebrică sintetică este printr-o putere a lui m, $N_{HG} = m^r$. Definiţia algebrică a unei HG se face pe baza reprezentării adreselor nodurilor în SNBM:

Definiţie. O hipergrilă este o reţea de interconectare în care fiecare nod reprezentat printr-o adresă în SNBM, $X = (x_r\, x_{r-1} \dots x_{i+1}\, x_i\, x_{i-1} \dots x_1)$, $0 \le x_i \le m-1$, $1 \le i \le r$, este conectat cu nodurile având adresele:

$X' = (x_r\, x_{r-1} \dots x_{i+1}\, x'_i\, x_{i-1} \dots x_1)$

pentru $1 \le i \le r$. x'_i este dat de:

$x'_i = x_i \pm 1$ pentru $x_i \neq 0$ şi $x_i \neq (m - 1)$

$x'_i = x_i + 1$ pentru $x_i = 0$

$x'_i = x_i - 1$ pentru $x_i = m - 1$

Dăm în figura 2 o hipergrilă $N_{HG}=4^2$. N se descompune în doi factori, $m_2 \times m_1 = 4 \times 4$. Adresele hipergrilei din figura 2 se scriu $X = (x_2\, x_1)$, $0 \le x_2, x_1 \le 3$. De exemplu, adresa (1 2) este legată cu 4 noduri: pe verticală cu nodurile (0 2) şi (2 2), iar, pe orizontală, cu nodurile (1 1) şi (1 3). Adresele în zecimal sunt conforme cu relaţiile (1.3): $X_{10} = x_2 \times w_2 + x_1 \times w_1 = x_2 \times 4 + x_1 \times 1$. De exemplu, adresa (1 2) se scrie în zecimal 6. Ultima adresă în zecimal este 15.

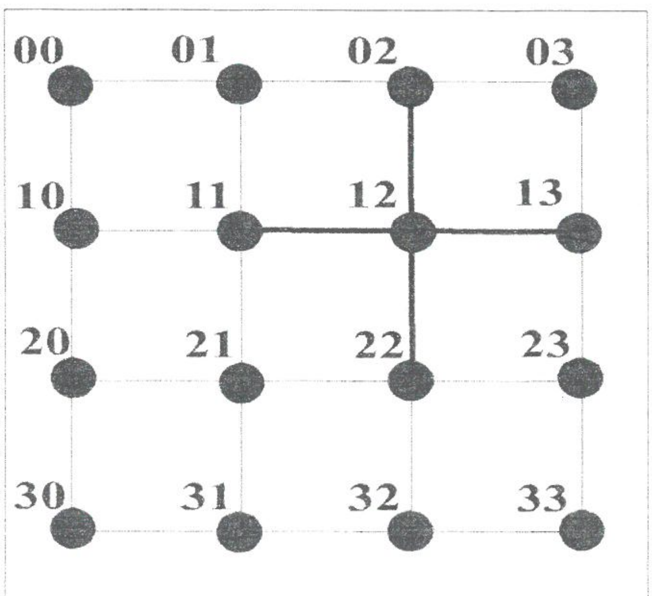


Figura 2. O hipergrilă bidimensională cu N=4x4 noduri

4. Hipercubul binar

Obținem un hipercub binar (HCB) reprezentând pe N ca o putere a lui 2: $N_{HCB} = 2^r$, $m_i = 2$, $1 \leq i \leq r$. Un HCB va avea în fiecare din cele r dimensiuni câte două noduri. Dăm în figura 3 o reprezentare grafică a unui HCB cu $N_{HCB} = 2^4$ noduri. Mai menționăm utilizarea destul de frecventă în literatura a termenului *n-cub binar* pentru desemnarea unui HCB cu $N_{HCB} = 2^n$ noduri. Noi vom utiliza notația folosită de L. N. Bhuyan și D. P. Agrawal desemnând prin r numărul de dimensiuni și prin m_i sau m numărul nodurilor din dimensiunea i.

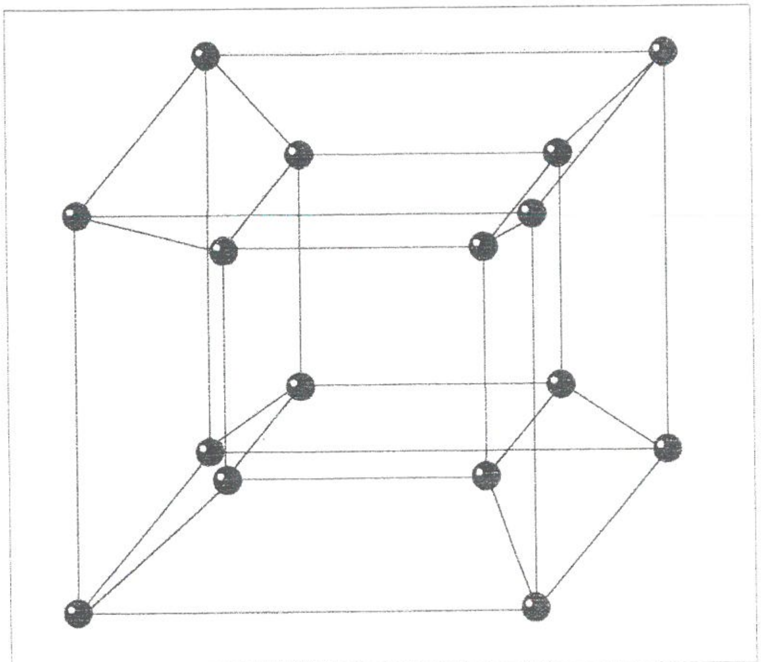


Figura3 Un hipercub binar cu N=16 noduri

5. Hipergrila generalizată

Hipergrila generalizată (HGG) este un lanț de mărimi diferite, în mai multe dimensiuni. Reprezentarea algebrică sintetică este făcută printr-un produs de mai mulți factori: $N_{HGG} = m_r \times m_{r-1} \ldots \times m_i \times \ldots \times m_1$. Fiecare factor m_i reprezintă câte noduri sunt în dimensiunea i. Definiția algebrică a unei HGG se face pe baza reprezentării adreselor nodurilor în SNBM:

Definiție. O hipergrilă generalizată este o rețea de interconectare, în care fiecare nod reprezentat printr-o adresă în SNBM, $X = (x_r\, x_{r-1} \ldots x_{i+1}\, x_i\, x_{i-1} \ldots x_1)$, $0 \leq x_i \leq m_i - 1$, $1 \leq i \leq r$, este conectat cu nodurile având adresele:

$$X' = (x_r\, x_{r-1} \ldots x_{i+1}\, x'_i\, x_{i-1} \ldots x_1)$$

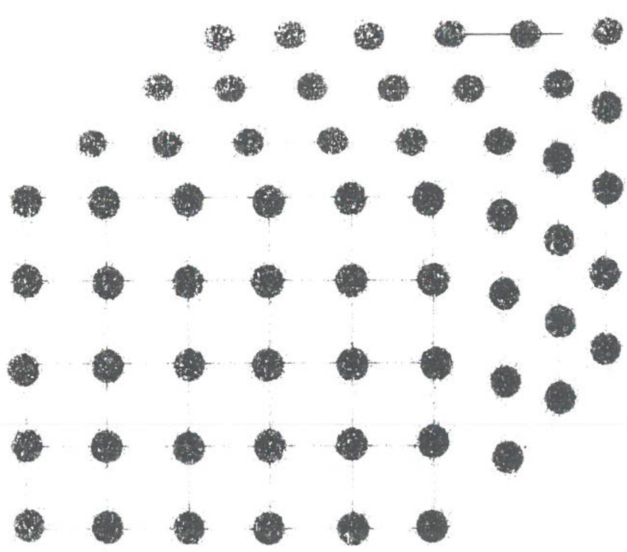
pentru $1 \leq i \leq r$. x'_i este dat de:

$x'_i = x_i \pm 1$ pentru $x_i \neq 0$ și $x_i \neq (m_i - 1)$

$x'_i = x_i + 1$ pentru $x_i = 0$

$x'_i = x_i - 1$ pentru $x_i = m_i - 1$

Dăm în figura 4 partea vizibilă a unei hipergrile generalizate cu $N_{HGG} = 4 \times 5 \times 6$ noduri. N se descompune în trei factori $m_3 \times m_2 \times m_1 = 4 \times 5 \times 6$. Adresele nodurilor în SNBM sunt $X = (x_3\, x_2\, x_1)$, $0 \leq x_3 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 4$, $0 \leq x_1 \leq 5$. Adresele în zecimal sunt date de $X_{10} = x_3 \times w_3 + x_2 \times w_2 + x_1 \times w_1$. Ponderile sunt $w_1 = 1$, $w_2 = m_1 = 6$ și $w_3 = m_1 \times m_2 = 30$. $X = (3\ 4\ 5)$ reprezintă în baza 10 ultima adresă $X_{10} = 3 \times 30 + 4 \times 6 + 5 \times 1 = 119$.



6. Torul, bucla sau inelul

Bucla, inelul sau torul (T) este o rețea de interconectare în care cele N noduri sunt interconectate printr-o buclă, figura 5. Torul are reprezentarea sintetică: $N_T = m$. El are, spre deosebire de *bidimensionalitatea* grafică, o singură dimensiune logică, este *unidimensional* din punct de vedere *logic* ca și lanțul. Definiția algebrică a unui tor se face pe baza reprezentării adreselor nodurilor în SNBM:

Definiție. O *tor* este o rețea de interconectare unidimensională din punct de vedere logic în care fiecare nod reprezentat printr-o adresă cu un digit în SNBM, $X = (x)$, $0 \leq x \leq m-1$, este conectat cu nodurile având adresele:

$X' = (x')$,

unde:

$x' = /x \pm 1/_{modulo\ m}$

Observăm că torurile ca și lanțurile se dezvoltă pe o singură dimensiune logică, numărul de dimensiuni r fiind 1. Ca atare, este necesar doar un singur digit pentru adresare, scris în baza m și a cărui pondere este $w=1$. Astfel torul din figura 5 cu 5 noduri are adresele scrise în baza 5 cu un singur digit: 0, 1, 2, 3, 4. Torul din figura 5b va fi întrebuințat la definirea grafică a hipertorului și a hipertorului generalizat.

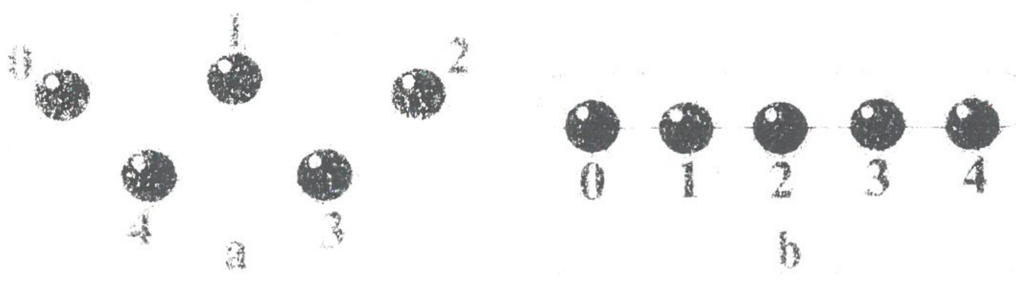


Figura 5. O buclă generalizată cu N=5 noduri

7. Hipertorul

Hipertorul (HT) este un tor de aceeaşi mărime, generalizat în mai multe dimensiuni. Reprezentarea algebrică sintetică este, ca şi hipergrila, printr-o putere a lui m, $N_{HT} = m^r$. Definiţia algebrică a unui HT se face pe baza reprezentării adreselor nodurilor în SNBM:

Definiţie. Un hipertor este o reţea de interconectare în care fiecare nod reprezentat printr-o adresă în SNBM, $X = (x_r\, x_{r-1} \ldots x_{i+1}\, x_i\, x_{i-1} \ldots x_1)$, $0 \le x_i \le m-1$, $1 \le i \le r$, este conectat cu nodurile având adresele:

$X' = (x_r\, x_{r-1} \ldots x_{i+1}\, x'_i\, x_{i-1} \ldots x_1)$

pentru $1 \le i \le r$. x'_i este dat de:

$x'_i = /x_i \pm 1/_{modulo\ \mathrm{m}}$

Dăm în figura 6 un hipertor $N_{HT}=4^2$. N se descompune în doi factori, $m_2 \times m_1 = 4 \times 4$, ca şi hipergrila $N_{HG}=4^2$. Adresele în bază multiplă şi adresele în zecimal ale hipertorului din figura 6 sunt aceleaşi cu ale hipergrilei. Legăturile sunt aceleaşi în mijlocul hipertorului ca şi în mijlocul hipergrilei cu $N=4^2$: de exemplu, adresa (1 2) este legată cu 4 noduri (figura 2): pe verticală cu nodurile (0 2) şi (2 2) iar pe orizontală cu nodurile (1 1) şi (1 3). Conexiunile sunt "îmbunătăţite" numai la margini: de exemplu, nodul (3 3) este conectat în plus cu nodurile (0 3) şi (3 0).

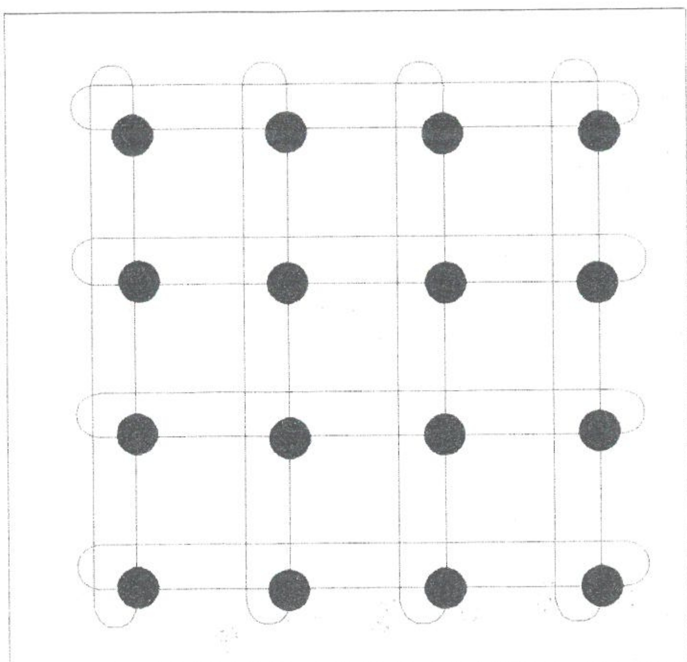


Figura 6. Un hipertor cu N=4x4 noduri

8. Hipertorul generalizat

Hipertorul generalizat (HTG) este un tor de mărimi diferite, în mai multe dimensiuni. Reprezentarea algebrică sintetică este făcută, ca şi în cazul HGG, printr-un produs de mai mulţi factori: $N_{HTG} = m_r \times m_{r-1} \ldots \times m_i \times \ldots \times m_1$. Fiecare factor reprezintă câte noduri sunt într-o dimensiune. Definiţia algebrică a unei HTG se face pe baza reprezentării adreselor nodurilor în SNBM:

Definiţie. Un hipertor generalizat este o reţea de interconectare, în care fiecare nod reprezentat printr-o adresă în SNBM, $X = (x_r\, x_{r-1} \ldots x_{i+1}\, x_i\, x_{i-1} \ldots x_1)$, $0 \le x_i \le m_i - 1$, $1 \le i \le r$, este conectat cu nodurile având adresele:

$X' = (x_r\, x_{r-1} \ldots x_{i+1}\, x'_i\, x_{i-1} \ldots x_1)$

pentru $1 \le i \le r$. x'_i este dat de:

$x'_i = /x_i \pm 1/_{modulo\ m}$

Dăm în figura 7 un hipertor generalizat cu $N_{HTG}=4\times5\times6$ noduri, numai partea vizibilă. N se descompune în trei factori $m_3\times m_2\times m_1= 4\times5\times6$. Adresele nodurilor în SNBM şi în zecimal sunt aceleaşi cu ale HGG.

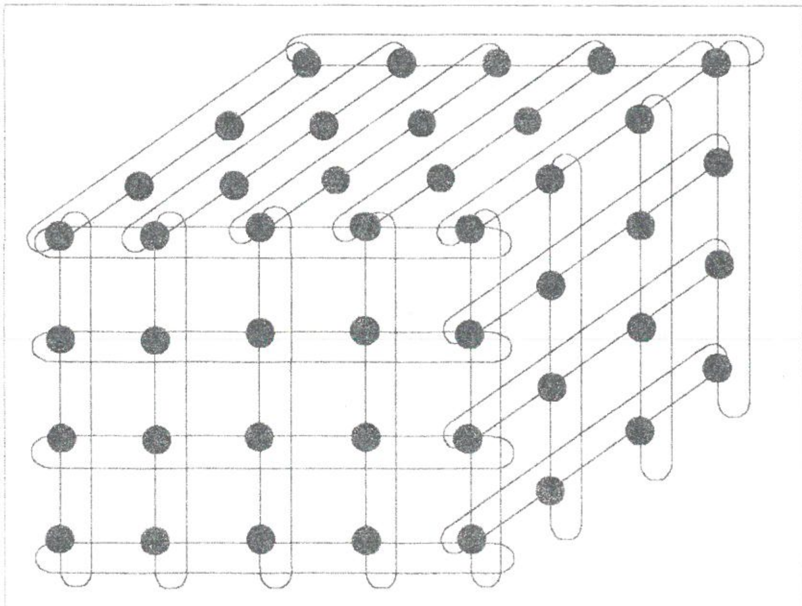


Figura 7. Un hipertor generalizat cu N=4x5x6

9. Reţeaua complet conectată

Reţeaua complet conectată, RCC, este o reţea de interconectare în care cele N noduri sunt interconectate toate cu toate, figura 8. RCC are ca şi torul sau lanţul reprezentarea sintetică: $N_{RCC}=m$. Ea are o singură dimensiune logică, este *unidimensională* din punct de vedere *logic*, spre deosebire de *bidimensionalitatea* grafică a reţelei. Definiţia algebrică a unei reţele RCC se face pe baza reprezentării adreselor nodurilor în SNBM:

Definiţie. RCC este o reţea de interconectare unidimensională din punct de vedere logic, în care fiecare nod reprezentat printr-o adresă cu un singur digit în SNBM, $X = (x)$, $0 \le x \le m-1$, este conectat cu nodurile având adresele:

$X' = (x'),$

unde:

$0 \le x' \le m - 1,\ x' \neq x$

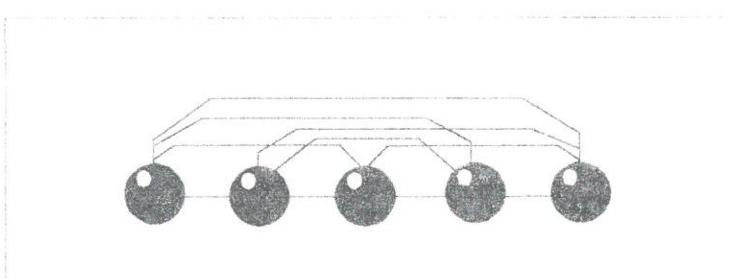


Figura 8. O reţea complet conectată cu N=5

10. Hipercubul

Hipercubul (HC) este o rețea RCC de aceeași mărime generalizată în mai multe dimensiuni. Ca și hipergrila sau hipertorul, reprezentarea algebrică sintetică este făcută printr-o putere a lui m, $N_{HC} = m^r$. Definiția algebrică a unui HC se face pe baza reprezentării adreselor nodurilor în SNBM:

Definiție. Un hipercub este o rețea de interconectare în care fiecare nod reprezentat printr-o adresă în SNBM, $X = (x_r\, x_{r-1} \ldots x_{i+1}\, x_i\, x_{i-1} \ldots x_1)$, $0 \le x_i \le m-1$, $1 \le i \le r$, este conectat cu nodurile având adresele:

$X' = (x_r\, x_{r-1} \ldots x_{i+1}\, x'_i\, x_{i-1} \ldots x_1)$

pentru $1 \le i \le r$. x'_i este dat de:

$0 \le x'_i \le m_i - 1$, $x'_i \ne x_i$

Dăm în figura 9 un hipercub $N_{HC}=4^2$. N se descompune în doi factori, $m_2 \times m_1 = 4 \times 4$, ca și hipergrila $N_{HG}=4^2$, figura 2 sau hipertorul $N_{HT}=4^2$, figura 6. Adresele în bază multiplă și adresele în zecimal ale hipercubului din figura 9 sunt aceleași cu ale hipergrilei și hipertorului, figurile 2 și 6. Legăturile sunt la un hipercub toate cu toate. De exemplu, adresa (1 2) este legată cu 6 noduri: pe verticală cu nodurile (0 2), (2 2) și (3 2) iar pe orizontală cu nodurile (1 0), (1 1) și (1 3).

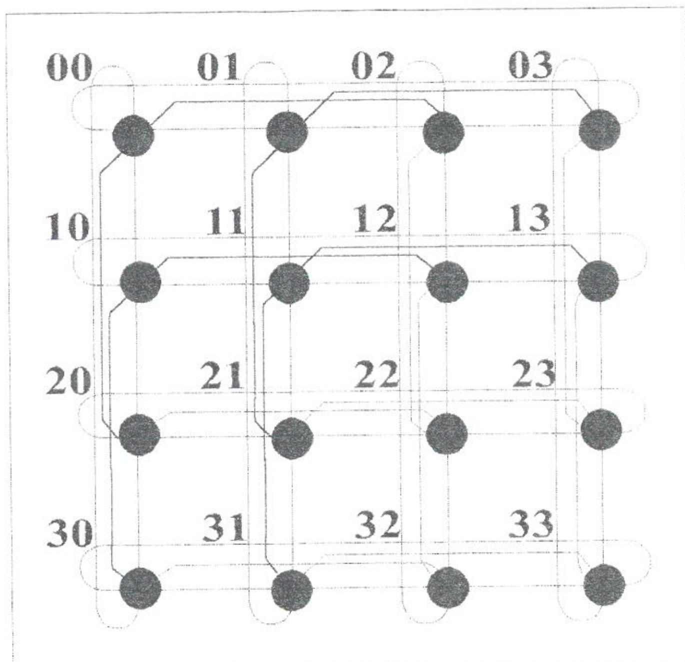


Figura 9. Un hipercub cu N=4x4 noduri

11. Hipercubul generalizat

Hipercubul generalizat (HCG) este o rețea RCC de mărimi diferite în mai multe dimensiuni. Reprezentarea algebrică sintetică este făcută, ca și în cazul HGG și HTG, printr-un produs de mai mulți factori: $N_{HCG} = m_r \times m_{r-1} \ldots \times m_i \times \ldots \times m_1$. Fiecare factor reprezintă câte noduri sunt într-o dimensiune. Definiția algebrică a unei HCG se face pe baza reprezentării adreselor nodurilor în SNBM:

Definiție. Un hipercub generalizat este o rețea de interconectare, în care fiecare nod reprezentat printr-o adresă în SNBM, $X = (x_r\, x_{r-1} \ldots x_{i+1}\, x_i\, x_{i-1} \ldots x_1)$, $0 \le x_i \le m_i - 1$, $1 \le i \le r$, este conectat cu nodurile având adresele:

$X' = (x_r\, x_{r-1} \ldots x_{i+1}\, x'_i\, x_{i-1} \ldots x_1)$

pentru $1 \le i \le r$. x'_i este dat de:

$0 \leq x'_i \leq m_i - 1,\ x_i \neq x'_i$

Dăm în figura 10, un hipercub generalizat cu $N_{HCG}=4\times5$ noduri. N se descompune în doi factori $m_2\times m_1= 4\times5$ şi adresele nodurilor în SNBM şi în zecimal sunt scrise în acelaşi fel cu ale celorlalte structuri pe care le-am discutat.

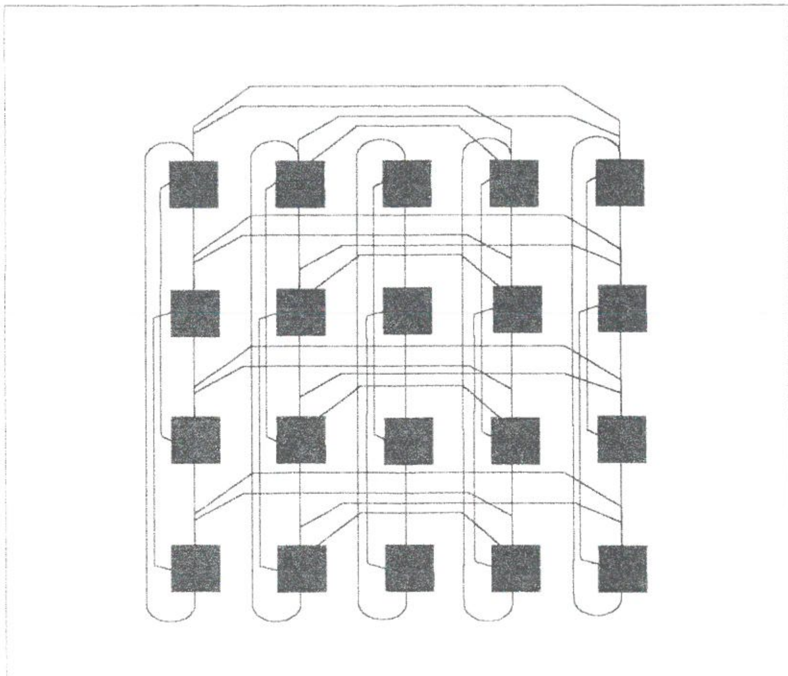


Figura 10. Un hipercub generaliyat cu N=4x5 noduri

12. O încercare de clasificare a reţelelor de interconectare directe

Prezentarea generală din acest articol a principalelor hiperstructuri a avut ca obiectiv formarea unei imagini globale intuitive asupra structurii acestor reţele, asupra legăturilor între diferitele clase de hiperstructuri, precum şi evidenţierea celor mai importante direcţii de clasificare a topologiilor de bază.

Primele două direcţii de structurare sunt *numărul dimensiunilor* (*dimensionalitatea*) şi *numărul nodurilor din fiecare dimensiune* (*gabaritul*). Am utilizat prefixul "hiper" pentru a desemna o generalizare pe direcţia dimensionalităţii şi termenul "generalizat" pentru a preciza că gabaritele pot fi variabile cu dimensiunea (în fiecare dimensiune poate exista un număr diferit de noduri). În figura 11, prezentăm spaţiul reţelelor de interconectare directe. Pe verticală, am pus în evidenţă direcţia de structurare prin modificarea dimensionalităţii, iar, pe orizontală, am pus axa gabaritului maxim. O a treia direcţie de structurare variază *structura elementară de interconectare*.

Impunând acelaşi gabarit în fiecare dimensiune obţinem HC din HCG, HT din HTG sau HG din HGG. Micşorând, în continuare, gabaritul la două noduri obţinem, în final, un singur tip de hiperstructură: HCB. Reducerea dimensionalităţii conduce, în final, la obţinerea reţelelor unidimensionale: reţeaua complet conectată din HCG, torul din HTG şi lanţul din HGG. Evident, nimic nu ne împiedică să dezvoltăm şi alte clase de topologii, în care structura elementară de interconectare unidimensională să fie, de exemplu, arborele sau steaua. Mai mult, putem generaliza simultan în toate cele trei direcţii de structurare menţionate mai sus, căutând de pildă, reţele multidimensionale, cu gabarite diferite în fiecare dimensiune şi cu structuri unidimensionale diferite. De exemplu, o topologie pe care o vom numi *structură hyper generalizată* (SHG), obţinută prin utilizarea structurilor elementare de interconectare unidimensionale: torul în dimensiunea 1, lanţul în dimensiunea 2 şi reţeaua complet conectată în dimensiunea 3. Ceea ce deosebeşte un SHG de structurile "pure" este o variaţie diferită a *localităţii* cu dimensiunea. În SHG dată ca exemplu nodurile din dimensiunea 3 sunt mai apropiate între ele decât nodurile din dimensiunea 1. Definiţia structurilor hyper generalizate se poate face în SNBM în felul următor:

Definiție. O structură hiper generalizată este o rețea de interconectare în care fiecare nod reprezentat printr-o adresă în SNBM, $X = (x_r\, x_{r-1} \ldots x_{i+1}\, x_i\, x_{i-1} \ldots x_1)$, $0 \le x_i \le m-1$, $1 \le i \le r$, este conectat cu nodurile având adresele:

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{k_i} X^{ij}\Big) = (x_r x_{r-1} \ldots x_{i+1} x'_i\, x_{i-1} \ldots x_1). \tag{2.1}$$

Nodul X' este înlocuit printr-un *vector de reuniuni*:

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{k_i} X^{ij}\Big) = \Big(\bigcup_{j=1}^{k_r} X^{rj} \bigcup_{j=1}^{k_{r-1}} X^{(r-1)j} \ldots \bigcup_{j=1}^{k_i} X^{ij} \ldots \bigcup_{j=1}^{k_1} X^{1j}\Big)$$

Reuniunea $\Big(\bigcup_{j=1}^{k_i} X^{ij}\Big)$ specifică faptul că un nod din SHG este conectat cu un *vector de reuniuni de rețele de interconectare elementare*, în loc de una singură. Acest *vector de interconectare* are *r elemente*, $1 \le i \le r$. Astfel, *vectorul de interconectare* este definit, pe de-o parte, de numărul de dimensiuni, r, și, pe de altă parte, de cele k_i structuri elementare de interconectare, $i=1, 2, \ldots, r$, pentru care reuniunile $\bigcup_{j=1}^{k_i} X^{ij}$ sunt specificate, $j=1, 2, \ldots, k_i$. . X^{ij} sunt rețele omogene cum sunt cele descrise în paragrafele precedente, și nu trebuie să fie disjuncte pentru o dimensiune.

Concluzii

În acest articol introductiv, am prezentat unele topologii de rețele ortogonale, care ne vor sluji pentru caracterizarea/evaluarea/proiectarea structurală și funcțională a rețelelor. Vom insista, mai ales, pe *localitate*, un criteriu principal al proiectării calculatoarelor, încă insuficient definit și utilizat în evaluarea/proiectarea rețelelor de interconectare.

Bibliografie

1. **BHUYAN, L.N., D. P. AGRAWAL**: Generalized Hypercube and Hyperbus Structures for a Computer Network. În: IEEE TC, vol. C-33, no. 4, April 1984, pp. 323-333.
2. **DUATO, J., S. YALAMANCHILI, L. NI**: Interconnection Networks. An Engineering Approach. În: IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, 1997.
3. **HENNESSY, J., D. A. PATTERSON**: Computer Architecture. A Quantitative Approach, *Morgan* Kaufmann Pub. Inc, San Mateo, California, 1990.
4. **HILLIS, W.D.**: The Connection Machine, The MIT Press, Cambridge, Massachusets, London, England, 1985.
5. **HWANG, K.**: Advanced Computer Architecture: Parallelism, Scalability, Programmability, McGraw-Hill, New York, 1993
6. **LUPU, C., A. NICOLESCU**: Neighbourhood Reserve - A Measure Of Locality of the Direct Interconnection Networks. În: Proc. of the 9th Mediterranean Electrotechnical Conferance–MELECON'98, IEEE, Israel, Tel Aviv, May 1998, Vol. II, pp. 1380-1384.
7. **PRIOR, D.M.N., M. G. NORMAN, N. J. RADCLIFFE, L. J. CLARKE**: What price regularity. În: Concurrency: Practice and Experience, March 1990, vol. 2, No. 1, pp. 55-78.
8. **SEITZ, C.**: Concurrent VLSI Architectures. În: IEEE TC, Dec. 1984, Vol. C-33, No. 12, pp. 1247-1264.