# EFECTELE LUNGIMII FINITE A CUVINTELOR ASUPRA FILTRELOR DISTRIBUITE

**conf.dr.ing. Ovidiu Radu**

*Universitatea Politehnica Bucureşti*

**Rezumat:** Un filtru recursiv, de viteză ridicată, se poate obţine prin transformarea unui filtru original într-un filtru de ordin mai mare, utilizând o tehnică de calcul distribuită, cu predicţie. Implementarea acestor filtre, prin cuvinte de lungime finită, poate duce la o anulare incorectă a perechilor poli-zerouri. In legătură cu acest caz, se prezintă rezultatele analizei erorilor de rotunjire şi de cuantizare a coeficienţilor filtrelor
Se arată că, pentru a menţine aceeaşi eroare, la ieşirea filtrului distribuit este necesar ca lungimea cuvântului să fie mărită la $log_2 log_2 2Mb$ (unde $M$ este ordinul filtrului distribuit, iar b este lungimea cuvântului). Pentru M cuprins între 2 şi 8, lungimea cuvântului creşte cu 1 sau 2 biţi.

**Cuvinte cheie:** filtre recursive distribuite, filtre predictive, eroare de rotunjire, eroare de cuantizare, funcţie de transfer.

## 1. Introducere

Obţinerea unor filtre recursive, cu viteză ridicată, este un deziderat important. Bucla de reacţie a unui filtru recursiv este elementul care limitează frecvenţa de eşantionare.

Una din abordări constă în utilizarea tehnicilor de predicţie. Prin aceasta, se transformă un filtru recursiv standard, într-o structură cu performanţe superioare, dar care să fie echivalentă filtrului original (în ceea ce priveşte relaţia intrare-ieşire, adică funcţia de transfer). Rezultă un filtru de ordin superior, care emulează filtrul original prin anularea perechii pol-zero. Pentru ilustrarea acestei tehnici, se considera un filtru recursiv de ordinul întâi:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{1}$$

Bucla acestui filtru are un singur operator de întârziere, iar frecvenţa de eşantionare este limitată de timpul necesar operaţiilor de înmulţire cu o constantă (a) şi de adunare.

Frecvenţa poate fi mărită cu un factor $M$ dacă se rescrie funcţia de transfer astfel:

$$H(z) = \frac{\prod_{i=0}^{M-1} a^i z^{-i}}{1 - a^M z^{-M}} \tag{2}$$

Acest filtru are $M$ bucle cu câte un operator de întârziere şi poate funcţiona cu o viteză de $M$ ori mai mare decât filtrul (1). Această creştere de viteză se obţine prin redistribuirea operatorului de întârziere în M etaje de adunare–multiplicare.

Filtrul (2) calculează ieşirea $x(n)$, utilizând ieşirea trecută $x(n-1)$ ca în figura 1; aceasta reprezintă o predicţie. Rezultă că un filtru de ordinul întâi poate fi emulat de către un filtru de ordinul $M$. Filtrul nerecursiv de ordinul $M$-1 poate fi, de asemenea, descompus astfel:

$$H(z) = \frac{\prod_{i=0}^{\log_2 M-1} (1 + a^{2i} z^{-2i})}{1 - a^M z^{-M}}, \tag{3}$$

Descompunerea reduce gradul de complexitate de la $M$ la $log_2 M$ (unde $M$ este numărul de bucle distribuite).

Pentru filtre de ordin superior, se exprimă $x(n)$ în funcţie de stările anterioare distribuite. $x(n)$, $x(n-2M)$ ,...,$x(n-NM)$, unde $N$ este ordinul filtrului original. Filtrul astfel obţinut este stabil, dacă şi filtrul original este stabil.

La implementarea filtrelor cu virgulă fixă, imprecizia anulării perechii pol-zero duce la erori. Aceste erori pot fi minimizate prin creşterea lungimii cuvântului. Se impune o limită a acestei creşteri pentru ca performanţele filtrului original şi ale celui emulat, să fie comparabile.

În partea a doua a articolului, se consideră un filtru recursiv de ordinul întâi, pentru care se studiază efectele rotunjirii şi ale cuantizării coeficienţilor.

În partea a treia a articolului, se prezintă erorile datorate rotunjirii şi cuantizării coeficienţilor, pentru un filtru distribuit de ordinul doi.

## 2. Rotunjirea şi cuantizarea la filtrele predictive de ordinul întâi

În această parte a articolului, se studiază erorile de cuantizare şi de rotunjire la filtrele predictive de ordinul întâi şi, în consecinţă, creşterea lungimii cuvântului la filtrul distribuit, necesar pentru a menţine aceleaşi efecte ale lungimii finite a cuvântului, ca la filtrul original.

### 2.1. Erorile de rotunjire ale filtrelor predictive

Se consideră filtrul original, de ordinul întâi, din figura 1. Eroarea de rotunjire la acest filtru este modelată prin eroarea aditivă *e(n)*. Se presupune că *e(n)* este uniform distribuită şi independentă de nivelul semnalului, ca şi de alte erori. Se presupune că *e(n)* are valoarea medie zero şi dispersia $Q$. Se va utiliza notaţia $QE_r$ pentru dispersia erorii şi $E_r$ pentru eroare. Eroarea de rotunjire este conform [2] şi [3],

$$E_r = \frac{1}{1-a^2} \tag{4}$$

Figura 2 prezintă filtrul predictiv pentru $M=2$. În această schemă, $e_1(n)$ reprezintă eroarea de rotunjire pentru filtrul FIR (nerecursiv), iar $e_2(n)$ - eroarea de rotunjire prntru filtrul IIR (recursiv). Eroarea de rotunjire pentru întreaga structură este suma celor două erori parţiale,

$$E_r = E_1 + E_2 = \frac{2}{1-a^4}, \tag{5}$$

Figura 3a prezintă modelul erorii de rotunjire pentru un filtru predictiv nedescompus, pentru $M$=4. În acest filtru, fiecare sursă de eroare are aceeaşi funcţie de transfer. Eroarea totală de rotunjire este dată de

$$E_r = \frac{M}{1-a^{2M}} \tag{6}$$

unde $M$ este numărul buclelor etajelor distribuite.

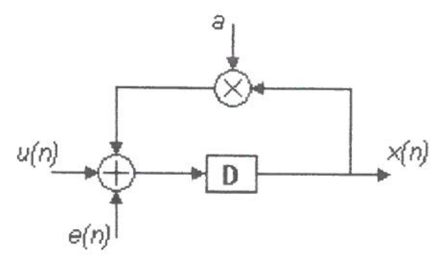


**Figura 1. Eroarea de rotunjire a unui filtru recursiv de ordiunul întâi**

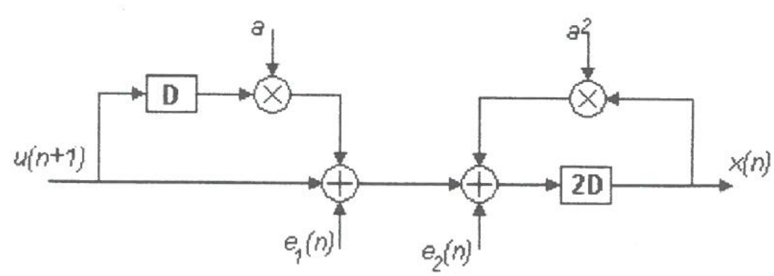


**Figura 2. Eroare de rotunjire a unui filtru distribuit predictiv cu două etaje**

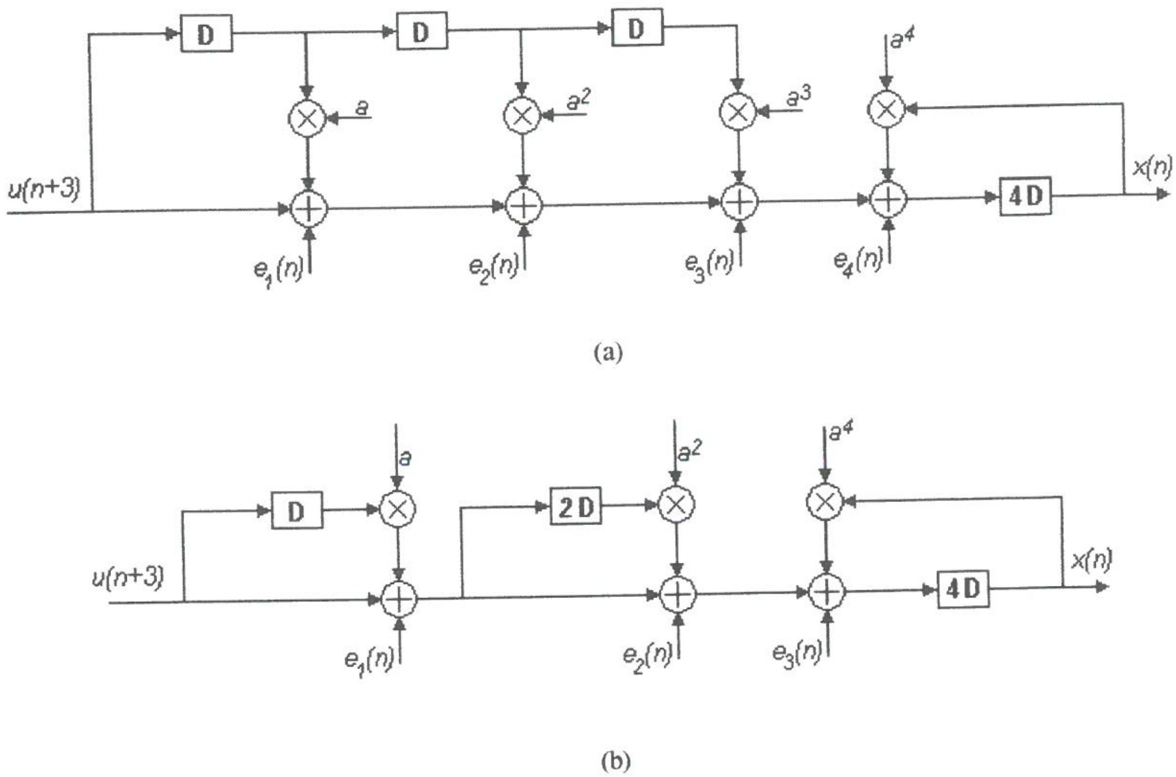


**Figura 3. Eroarea de rotunjire a unui filtru distribuit predictiv cu patru etaje: (a) fără descompunere (b) cu descompunere**

Figura 3b prezintă o structură predictivă descompusă pentru $M$=4. Eroarea totală de rotunjire este:

$$E_r = \frac{1}{1-a^4} + \frac{2}{1-a^8} \tag{7}$$

În general, eroarea totală de rotunjire a unui filtru descompus este dată de:

$$E_r = \sum_{i=1}^{\log_2 M} \frac{1}{1-a^{2i+1}} + \frac{1}{1-a^{2M}}, \tag{8}$$

Din expresiile de mai sus, rezultă că eroarea de rotunjire:

a) crește cu $M$ pentru filtrele descompuse și nedescompuse;

b) în cazul filtrelor predictive, este întotdeauna mai mare pentru cele nedescompuse;

c) (pentru $M$ dat);

d) este mai mare pentru filtrele cu polii situați în apropierea cercului unitar.

## 2.2 Erorile de cuantizare ale coeficienților

Aceste erori sunt legate direct de cele ale spectrului unui filtru. Asemenea erori pot fi foarte importante, deoarece cuantizarea coeficienților pot cauza anulări incorecte ale perechilor poli-zerouri.

Modelarea erorilor de cuantizare se face pentru fiecare caz [2], [3].

Pentru filtrul recursiv din figura 1, efectul cuantizării coeficienților este modelat prin filtrul din figura 4.

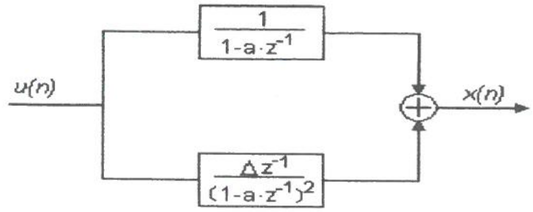


**Figura 4. Eroarea de cuantizare a coeficienţilor pentru un filtru recursiv de ordinul întâi**

Notaţia $a$ reprezintă coeficientul ideal, iar ( $a$ +Δ) reprezintă valoarea reală a coeficienţilor, consecinţă a lungimii finite a cuvînului.

Eroarea introdusă de erorile de cuantizare este proporţională cu puterea medie a semnalului ($P$), cu dispersia erorii ($Q$) şi este, deci, de forma $PQE_q$.

De notat că eroarea totală este suma erorilor rotunjire şi cuantizare. Pentru filtrul din figura 4, eroarea de cuantizare este dată de:

$$E_a = \frac{1+a^2}{(1-a^2)^3} \tag{9}$$

În figura 5, se prezintă modelarea erorii de cuantizare pentru un filtru predictiv cu $M$=2.

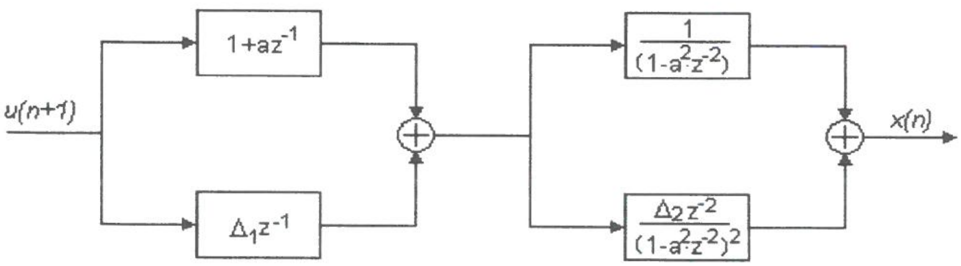


**Figura 5. Eroarea de cunatizare a coeficienţilor pentru un filtru distribuit predictiv cu două etaje**

Se presupune că $\Delta_1$ şi $\Delta_2$ sunt erorile coeficienţilor $a$, respectiv $a^2$.

Eroarea de cuantizare este dată de

$$E_q = \frac{1}{1-a^4} + \frac{(1+a^2)(1+a^4)}{(1-a^4)^3} \tag{10}$$

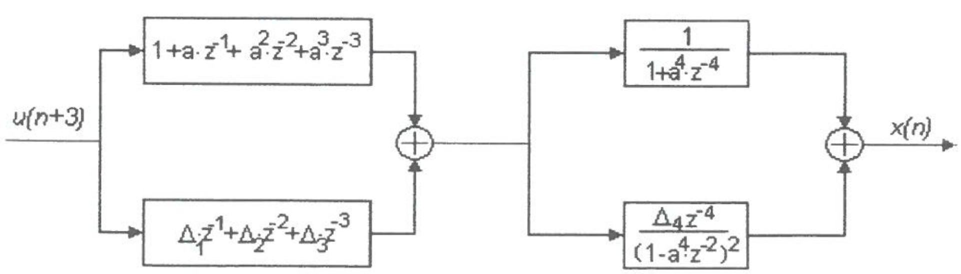


**Figura 6. Eroarea de cunatizare a coeficienţilor pentru un filtru distribuit predictiv nedescompus cu patru etaje**

Figura 6 prezintă modelarea erorii de cuantizare a unui filtru predictiv nedescompus, cu $M$=4. Eroarea de cuantizare pentru acest filtru este:

$$E_a = \frac{1}{1-a^8} + \frac{1+a^8}{(1-a^2)(1-a^8)^2} \qquad (11)$$

Pentru acelaşi filtru, descompus, figura 7, eroarea de cuantizare este:

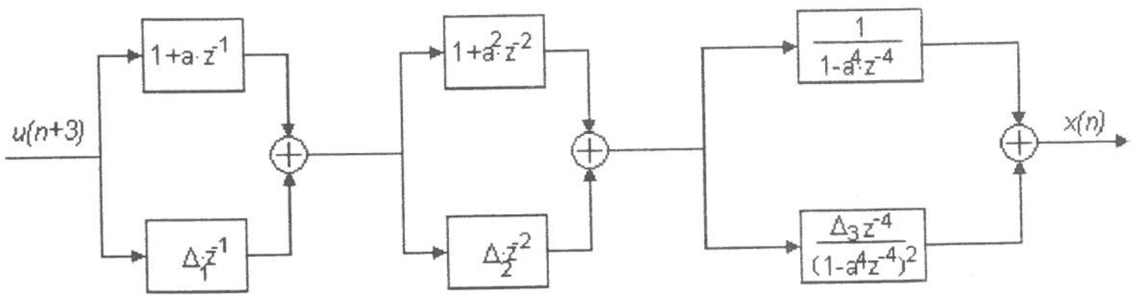


**Figura 7. Eroarea de cunatizare a coeficienţilor pentru un filtru distribuit predictiv descompus cu patru etaje**

**Tabelul 1. Erorile filtrelor distribuite de ordinul întâi**

| **Poziţia polilor** | **Descompus** | | | **Nedescompus** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Rotunjire** | **Cuantizare** | **Total** | **Rotunjire** | **Cuantizare** | **Total** |
| $r \to 0$ | $\log_2 2M$ | $\log_2 2M$ | $2\log_2 2M$ | $M$ | $M$ | $2M$ |
| $R \to 1-\varepsilon$ | $1/2\varepsilon$ | $1/4M^2\varepsilon^2$ | $1/4M^2\ \varepsilon^2$ | $1/2\varepsilon$ | $1/4M^2\varepsilon^2$ | $1/4M^2\varepsilon^2$ |

$$E_a = \frac{1}{1-a^4} + \frac{1+a^2}{1-a^8} + \frac{1+a^8}{(1-a^2)(1-a^8)^2} \qquad (12)$$

Expresiile erorilor de cuantizare, prezentate până aici, pot fi generalizate pentru $M \geq 4$.

Astfel, pentru filtre nedescompuse:

$$E_q = \frac{M-1}{1-a^{2M}} + \frac{\prod_{i=1}^{\log_2 M+1}(1+a^{2i})}{(1-a^{2M})^3} \qquad (13)$$

şi pentru filtre descompuse:

$$E_q = \frac{1}{1-a^4} + \sum_{i=2}^{\log_2 M} \frac{\prod_{k=1}^{i-1}(1+a^{2k})}{1-a^{2i+1}} + \frac{\prod_{i=1}^{\log_2 M+1}(1+a^{2i})}{(1-a^{2M})^3} \qquad (14)$$

Eroarea de cuantizare este monotonă în $M$.

Pentru poli apropiaţi de origine (adică filtre apropiate de tipul FIR), eroarea de cuantizare creşte cu $M$ (deoarece numărul secţiunilor FIR creşte cu $M$) şi este mai mare pentru filtrele nedescompuse, faţă de cele descompuse. În acest caz, cuantizarea în schemele FIR şi IIR contribuie la eroarea de cuantizare totală.

Pentru poli apropiaţi de cercul unitar, eroarea de cuantizare scade o dată cu creşterea lui $M$ şi este aceeaşi pentru filtrele descompuse şi nedescompuse. În acest caz, predomină erorile de cuantizare în secţiunea IIR, cele din secţiunea FIR fiind neglijabile.

## 2.3. Discuţie

Tabelul 1 prezintă erorile de rotunjire, cuantizare şi totale pentru poli situaţi în apropierea originii şi a cercului unitar (adică, atunci când polii sunt situaţi la distanţa (1-ε), unde ε este un număr mic, care tinde către zero).

Rezultatele din tabelul 1 sunt obţinute luând limite corespunzătoare expresiilor erorii în (6),(8), (13) şi (14). Pentru poli apropiaţi de cercul unitar, erorile datorate lungimii finite a cuvintelor se îmbunătăţesc cu creşterea lui $M$. Aceasta se poate aprecia intuitiv, deoarece, dacă locaţia $a$ este apropiată de 1, puterile mari ale lui $a$ sunt mult mai mici decât 1 şi coeficienţii respectivi vor avea proprietăţi de cuantizare mai bune.

Pentru poli apropiaţi de origină, efectele cuantizării sunt mai proaste, deoarece puterile mai mari ale lui $a$ sunt mult mai mici, şi nu pot fi înscrise în acelaşi număr de registre ca cel necesar pentru $a$. În consecinţă, este necesară creşterea lungimii cuvântului în sistemul emulat.

Pentru eroarea totală, conform tabelului 1, în cazul cel mai defavorabil, pentru filtre IIR distribuite, de tip nedescompus sunt necesare cuvinte de lungime $\log_2\log_2 2M$ şi $\log_2 M$ pentru cele de tip descompus.

În practică, filtrele nedescompuse nu se utilizează datorită creşterii liniare a complexităţii structurii.

Creşterea lungimii finite a cuvântului, pentru filtrele descompuse, este foarte mică. În concluzie, filtrele predictive descompuse funcţionează cu cuvinte de lungime finită acceptabilă.

## 3. Erorile de rotunjire şi de cuantizare ale filtrelor distribuite de ordinul doi

Expresiile erorilor pentru un filtru distribuit de ordinul doi se poate deduce, în mod asemănător, ca în cazul unui filtru de ordinul întâi. Rezultatele acestui demers sunt prezentate în tabelul 2.

**Tabelul 2. Erorile filtrelor distribuite de ordinul doi**

| Poziţia polilor | Descompus | | | Nedescompus | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Rotunjire | Cuantizare | Total | Rotunjire | Cuantizare | Total |
| $r \to 0$ | $2\log_2 2M$ | $2\log_2 2M$ | $4\log_2 2M$ | $2M$ | $2M$ | $4M$ |
| $r \to 1-\varepsilon$ | $\dfrac{M^2+6}{28M^3\varepsilon^3}$ | $5/16M^4\varepsilon^7$ | $5/16M^4\varepsilon^7$ | $1/2M^2\varepsilon^3$ | $5/16M^4\varepsilon^7$ | $5/16M^4\varepsilon^7$ |

Cazul cel mai defavorabil corespunde unui filtru de ordinul doi, cu poli complecşi conjugaţi, în care unghiul $\theta$ este zero, iar modulul aproape de zero, adică, polii complecşi conjugaţi se reduc la o pereche de poli reali, apropiaţi de origine. În acest caz, filtrul se poate aproxima cu unul de tip FIR, unde atât eroarea de rotunjire, cât şi cea de cuantizare contribuie la eroarea totală.

Pentru poli apropiaţi de 1, numai eroarea de cuantizare pentru secţiunea IIR contribuie la eroarea totală.

Din tabelul 2, rezultă că acele concluzii stabilite pentru expresia erorii totale, în cazul unui filtru de ordinul întâi, pot fi extinse şi pentru un filtru de ordinul doi sau mai mare.

Erorile datorate lungimii finite a cuvintelor se reduc o dată cu creşterea lui $M$ pentru polii apropiaţi de cercul unitar.

Cazul cel mai defavorabil corespunde situaţiei când toţi polii sunt reali şi apropiaţi de origine; creşterea lungimii cuvântului (pentru aceleaşi erori ca la filtrul original) este $log_2 M$ pentru filtre nedescompuse şi $log_2 log_2 2M$ pentru filtre descompuse.

## Bibliografie


1. **RADU, O., GH. SĂNDULESCU:** Filtre numerice. Aplicaţii. Editura Tehnică, Bucureşti, 1979.
2. **OPPENHEIM, A. V., R. W. SHAFER:** Digital Signal Processing, Englewood Clifs, NJ, Prentice Hall, 1975.
3. **RABINER, L. R.:** Theory and application of Digital Signal Processing, Englewood Clifs, NJ: Prentice Hall, 1975.