MODELE MATEMATICE PENTRU ANALIZA ŞI EVALUAREA RISCULUI DE MEDIU

drd. mat.Rădulescu Constanţa Zoie

Institutul Naţional de Cercetare Dezvoltare în Informatică - ICI Bucureşti
radulescu@u3.ici.ro

Rezumat: Modelarea sistemelor de mediu este o problemă foarte dificilă datorită complexităţii sistemelor şi a interacţiunilor pe care acestea le au cu diverse alte sisteme, interacţiune uneori greu de precizat.
În articol, se prezintă două modele matematice privind mediul. Primul model este un model probabilist de determinare a riscului de poluare cu ajutorul unei funcţii de repartiţie, pentru un vector aleator, ce reprezintă concentraţiile factorilor poluanţi în atmosferă. Următorul model este un model de optimizare multicriterială, de alocare a resurselor financiare pentru reducerea poluării. Pentru al doilea model, se specifică modul de rezolvare prin reducerea la o problemă de optimizare cu o singură funcţie obiectiv.

Cuvinte cheie: mediu, poluare, măsură risc, evaluare risc, analiză risc, optimizare multicriterială.

1. Introducere

Protecţia mediului înconjurător împotriva poluării, constituie un domeniu prioritar pentru Uniunea Europeană, dar şi pentru ţările care doresc aderarea şi fac eforturi pentru armonizarea legislaţiei specifice.

Politica comunitară privind mediul înconjurător se bazează pe integrarea politicii de mediu în cadrul politicilor sectoriale ale Uniunii Europene, acordându-se o atenţie specială măsurilor de prevenire a poluării.

În lume, există numeroase preocupări privind poluarea aerului, apei, solului etc., generate de trecerea peste anumite limite a concentraţiei diferiţilor poluanţi.

Pentru reducerea poluării au fost realizate modele matematice de complexităţi diferite. Cele mai multe dintre ele sunt axate pe poluarea aerului, solului, apei, aer-apă, aer-sol, sol-apă.

Tipurile principale de modele sunt bazate pe ecuaţii diferenţiale deterministe şi stocastice (ecuaţii diferenţiale ordinare, ecuaţii cu derivate parţiale), ecuaţii algebrice statice, reţele Petri, programare matematică, programare stocastică, teoria controlului optimal, lanţuri Markov, procese Markov, simulare Monte Carlo, modele bazate pe reguli etc.

Managementul riscului de mediu este un termen relativ nou în literatura de specialitate. El se referă atât la măsurile de diminuare a riscurilor, cât şi la măsurile luate pentru diminuarea efectelor acestora. Este foarte important de a identifica riscul şi de al estima pentru a putea fi analizat. Procesul de analiză a riscului încearcă să identifice toate rezultatele posibile, care pot să rezulte în urma unei acţiuni. Estimarea riscului se face cu ajutorul metodelor analitice sau cu ajutorul simulării. Astfel, se estimează probabilitatea fiecărei catastrofe precum şi magnitudinea (dimensiunea) asociată. Procesul de analiză a riscului foloseşte informaţia de natură tehnică, legată de estimaţii, precum şi alte informaţii suplimentare, disponibile pentru a evalua diferite variante de acţiuni posibile.

În secţiunea a doua a articolului, se prezintă câteva măsuri pentru calculul valorii riscului.

În a treia secţiune, se prezintă un model probabilist de determinare a riscului de poluare cu ajutorul unei funcţii de repartiţie, pentru un vector aleator ce reprezintă concentraţiile factorilor poluanţi în atmosferă.

În secţiunea a patra, se prezintă un model original, de optimizare multicriterială, de alocare a resurselor financiare pentru reducerea poluării atmosferei. Pentru acest model, se specifică modul de rezolvare, prin reducere la o problemă de optimizare, cu o singură funcţie obiectiv.

Rezultatele prezentate în acest articol au fost obţinute în cadrul temei de cercetare "Analiza şi evaluarea riscului de mediu privind apariţia de catastrofe naturale", din cadrul Obiectivului subsidiar 2: Tehnologii informatice şi de comunicaţii pentru analiza riscului apariţiei unor calamităţi naturale şi informarea publică asupra acestora, Obiectivul VI: *Sisteme complexe pentru managementul mediului şi pentru difuzarea publică a informaţiilor privind mediul* , program ORIZONT 2000, finanţat de către Ministerul Educaţiei şi Cercetării. Mai multe informaţii privind tema de cercetare "Analiza şi evaluarea riscului de mediu privind apariţia de catastrofe naturale" se găsesc în [10-12].

2. Măsuri pentru calculul valorii riscului

Teoria probabilităţilor oferă mai multe instrumente adecvate pentru modelarea fenomenelor de risc.

Orice activitate comportă un element de incertitudine. Din punct de vedere matematic, vom modela incertitudinea cu ajutorul variabilelor aleatoare sau, mai general, cu ajutorul proceselor stocastice. Riscul care apare într-o activitate poate fi descris cu ajutorul unor măsuri adecvate. Una dintre măsurile cele mai des utilizate este dispersia variabilei aleatoare, care descrie incertitudinea din activitatea respectivă. O altă măsură a riscului este dată de funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare. Mai precis, dacă X este variabila aleatoare, care descrie riscul (pierderea), asociată unei decizii, F_X este funcţia de repartiţie, asociată variabilei X, şi f_X este densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare X, atunci cu ajutorul expresiei mediei:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F_X(x),$$

măsurile riscului sunt date de:

$$\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \, \mathrm{d}F_X(x)$$

şi:

$$\sigma = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \, \mathrm{d}F_X(x) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Se consideră măsură a riscului şi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x-\mu| \, \mathrm{d}F_X(x) \text{ (momentul central de ordinul 1),}$$

Stone [15], [16] a arătat că toate măsurile riscului prezentate mai sus sunt cazuri speciale ale unor familii de măsuri ale riscului. Prima măsura a riscului, din cadrul familiei Stone, de măsuri ale riscului, având trei parametri, este definită astfel:

$$R_{S1}(X) = \int_{-\infty}^{q(F_X)} |x - p(F_X)|^k \, \mathrm{d}F_X(x) \quad (k \geq 0), \tag{1}$$

unde $p(F_X)$ defineşte un nivel de referinţă al profitului (succesului) cu ajutorul căruia sunt măsurate abaterile. Numărul pozitiv k este o măsură a impactului relativ al abaterilor mari şi mici. Parametrul $q(F_X)$ este un parametru de nivel, care specifică abaterile ce vor fi incluse în măsura riscului. A doua măsură a riscului din cadrul familie Stone, cu trei parametri, este definită ca rădăcina de ordinul k din $R_{S1}(X)$:

$$R_{S2}(X) = \left[\int_{-\infty}^{q(F_X)} |x - p(F_X)|^k \, \mathrm{d}F_X(x) \right]^{\frac{1}{k}} \quad (k > 0). \tag{2}$$

Se observă că, prin alegeri corespunzătoare ale parametrilor $p(F_X)$, $q(F_X)$ şi k, măsurile riscului, prezentate mai sus, sunt cazuri speciale ale celor din familia de măsuri ale riscului prezentate a lui Stone.

De exemplu, dacă în (1) punem $k = 2$ şi $p(F_X) = q(F_X) = \mu$, obţinem semidispersia ca o măsură a riscului.

Un caz şi mai interesant al familiei lui Stone, de măsuri ale riscului, este măsura riscului generalizată:

$$R_{F1}(X) = \int_{-\infty}^{t} (t-x)^\alpha \, \mathrm{d}F_X(x) \quad (\alpha > 0),$$

propusă de Fishburn [2] , unde t este un nivel-scop superior, care este fixat. Această măsură rezultă din (1) dacă alegem $p(F_X) = q(F_X) = t$. Parametrul α al măsurii riscului lui Fishburn R_{F1} poate fi interpretat ca şi parametrul k din măsurile familiei Stone (1) astfel: este un parametru de risc, care caracterizează atitudinea decidentului în faţa riscului. Valorile $\alpha > 1$ descriu un risc senzitiv, iar valorile $\alpha \in (0, 1)$ descriu un risc insenzitiv.

O altă măsură cunoscută a riscului este entropia Shannon: $-\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \ln(f_X(x)) \, \mathrm{d}x$.

O discuţie detaliată asupra măsurilor pentru risc se poate găsi în [1-9].

3. Modelarea probabilistă a fenomenului poluării aerului

Modelarea matematică, a fenomenului poluării aerului, se poate face cu ajutorul teoriei proceselor stocastice. Astfel, pe perioade mai lungi de timp, gradul de poluare poate fi descris cu ajutorul unui proces stocastic multidimensional: $X = (X_t)_{t \geq 0}$.

Pentru $t \geq 0$ fixat componentelor vectorului aleator: $X_t = (X_{1,t}; X_{2,t} \dots X_{m,t})$ reprezintă concentraţiile factorilor poluanţi în atmosferă.

Funcţia de repartiţie a procesului stocastic multidimensional X,

$$F(t,x) = F_{X_t}(x) = P(X_{1,t} < x_1, X_{2,t} < x_2, \dots, X_{m,t} < x_m) =$$
$$= P(\{\omega \in \Omega : X_{1,t}(\omega) < x_1, X_{2,t}(\omega) < x_2, \dots, X_{m,t}(\omega) < x_m\})$$
$$t \in \mathbf{R}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$$

este esenţială pentru descrierea riscurilor pe care le prezintă poluarea.

În practică, se poate apela la construcţia funcţiei de repartiţie empirice a procesului stocastic studiat. Acestă construcţie se face pe baza datelor istorice, privind concentraţia în atmosferă a factorilor poluanţi.

Cu ajutorul funcţiei de repartiţie empirice, se poate estima **riscul** posibil ca nivelul concentraţiilor în atmosferă a factorilor poluanţi să depăşească diverse limite. Ne interesează, în mod deosebit, nivelurile de alarmă şi cele maxim admise.

4. Model de optimizare pentru alocarea resurselor financiare în scopul reducerii poluării atmosferei

În cele ce urmează, vom prezenta un model de programare matematică, pentru alocarea optimă a resurselor financiare, disponibile în scopul reducerii poluării.

Considerăm o zonă în care mai multe surse de poluare a aerului au emisii de m factori poluanţi: $F_1, F_2, \dots, F_m$.

Se pune problema adoptării unor decizii de alocare optimă a unor resurse financiare, astfel încât nivelul poluării să fie redus sub anumite niveluri date (de regulă, aceste niveluri sunt cele cu valorile maxim admise de poluare) şi să fie minimizată depăşirea unui alt set de niveluri (de regulă, niveluri de alarmă ale poluării).

Se obţin atât modele liniare, cât şi modele neliniare, de optimizare multicriterială.

Să presupunem că, în zona considerată, sunt m surse de poluare: $S_1, S_2, \dots, S_m$ şi că, pentru reducerea poluării la fiecare sursă de poluare, este disponibilă o singură metodă.

Fie $M_1, M_2, \dots, M_n$ metodele de reducere a poluării.

Să presupunem că aplicarea metodei M_j la sursa S_j costă c_j şi reduce din emisia factorului poluant F_i o cantitate a_{ij}.

Decizia de alocare optimă se referă la găsirea unui portofoliu de metode, adică a unei submulţimi de metode din mulţimea $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, al cărui cost de aplicare să nu depăşească suma dată M şi care să reducă nivelul de poluare.

Problema mai sus enunţată va fi formulată mult mai precis în cele ce urmează.

Vom introduce variabilele de decizie $x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,2,\dots,n$

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{daca nu este aplicata metoda } M_i \\ 1 & \text{daca este aplicata metoda } M_i \end{cases}$$

Portofoliul de metode pe care îl căutăm va fi definit de vectorul

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$.

Observăm că: $b_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$ reprezintă cantitatea din factorul poluant F_i care este redusă, dacă este aplicat portofoliul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Următorul model de programare liniară multicriterială 0 - 1 se poate ataşa problemei enunţate mai sus.

$$\begin{cases} \max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j\right) \\ \max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j\right) \\ \ldots \\ \max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j\right) \\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le M \\ x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Problema de optimizare multicriterială de mai sus se poate transforma, în mai multe moduri, într-o problemă de optimizare clasică, cu o singură funcţie obiectiv.

Unul dintre cele mai utilizate procedee pentru a face această transformare este acela în care funcţia obiectiv este o combinaţie liniară a funcţiilor obiectiv, ale problemei multicriteriale.

Fie $f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i f_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij}\right) x_j$

Aici w_i, $i = 1,2,\ldots,m$ sunt nişte numere pozitive, care trebuie alese de către manageri. Dacă managerii doresc ca factorul poluant F_i să fie redus cu prioritate (adică într-o mai mare măsură) faţă de factorul poluant F_j, atunci ei vor alege $w_i < w_j$.

Problema de optimizare multicriterială este transformată în următoarea problemă:

$$\begin{cases} \max\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij}\right) x_j\right) \\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le M \\ x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

care este cunoscută în literatura de specialitate sub numele de problema rucsacului.

Pentru rezolvarea sa există algoritmi de tip greedy.

O altă abordare a problemei de optimizare multicriterială este dată metoda cunoscută sub numele de programarea scop (în engleză "goal programming").

În cadrul acestei metode, mai întâi, se rezolvă m probleme de programare liniară. Dacă notăm:

$$Q=\left\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n : \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le M\right\}$$

$$d_i=\max\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j : x\in Q\right\} \quad , \quad i=1,2,\ldots,m$$

atunci cele m probleme de programare liniară vor furniza numerele $d_1, d_2, \ldots, d_m$.

După aceasta, se va rezolva următoarea problemă de programare neliniară:

$$\begin{cases} \mathrm{Min}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \left| d_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right|^p\right) \\ \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \le M \\ x_j \in \{0,1\}, \quad j=1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Aici p>0 este un exponent de penalizare, care penalizează abaterea faţă de vectorul scop d=($d_1, d_2, \ldots, d_m$), iar $w_{i,} \quad i=1,2,\ldots,m$ sunt nişte ponderi pozitive.

Atât exponentul p, cât şi ponderile $w_1, w_2, \ldots, w_m$ sunt nişte parametri utilizator.

J. Saska [13] [14] propune, pentru rezolvarea problemei de programare liniară multicriterială, o metodă care constă în găsirea vectorului $x^* \in \{0,1\}^n$ care minimizează funcţia:

$$h(x)=\max_{1\le i\le m}\frac{\left|d_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}}$$

pe mulţimea Q. În acest fel, vectorul soluţie $x^* \in Q$ are proprietatea că, în modul, este cel mai puţin depărtat de hiperplanele determinate de cele m funcţii obiectiv. Funcţia h este convexă (deci, existenţa valorii minime este asigurată), dar neliniară, fapt care îngreunează determinarea numerică efectivă a soluţiei optime.

Concluzii

Cercetările din cadrul articolului de faţă se încadrează în eforturile desfăşurate pe plan mondial pentru preîntâmpinarea şi combaterea fenomenelor legate de riscul de mediu, fenomene care au efecte nefaste asupra activităţilor socio-economice şi asupra mediului înconjurător.

În articol, au fost prezentate câteva modele originale pentru prevenirea poluării aerului. Acestea urmează a fi integrate într-un produs software, sistem suport de decizie pentru mediu, ce va cuprinde o bibliotecă de modele de risc pentru mediu.

Sistemul suport de decizie, pentru analiza şi evaluarea riscului de mediu, va combina informaţia provenită din diverse surse astfel încât, pe baza prelucrărilor acesteia, să se poată lua decizii. Având drept modele unele scenarii privind posibile grade de risc în desfăşurarea unor calamităţi, se vor putea calcula daunele rezultate precum şi costurile aferente acestora. Acest sistem suport de decizie poate sta la baza adoptării unei politici, sugerând acţiuni care pot fi întreprinse sau determinând priorităţile unor domenii unde pot fi adoptate măsuri.

Există informaţii privitoare la istoricul datelor de mediu, de pe teritoriul ţării noastre în institute şi centre specializate în probleme de mediu. Date istorice şi actuale necesare urmează a fi obţinute prin colaborări cu unităţi specializate. Cu ajutorul acestora, va fi constituită baza de date, necesară instrumentului software de analiză şi evaluare a riscului. Se are în vedere şi realizarea de simulări, care să contribuie la fundamentarea deciziilor legate de mediu.

Bibliografie

1. **BRACHINGER, H.W., M. WEBER**: Risk as a Primitive: a Survey of Measures of Perceived Risk, ORSpektrum, Spinger-Verlag, Berlin, 1997.
2. **FISHBURN, P.C.**: Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns. În: The American Economic Review 67, 1977, pp. 116-126.
3. **FISHBURN, P.C.**: Foundations of Risk Measurement II Efects of Gains on Risk. În: Journal of Mathematical Psychology 25, 1982, pp. 226-242.
4. **FISHBURN P.C.**: Foundations of Risk Measurement I Risk and Probable Loss, Management Science 30, 1984, pp. 396-406.
5. **FISHBURN, P.C., KOCHENBERGER, G.A.**: Concepts, Theory and Thehniques: Two Piece von Neumann-Morgenstern Utility Functions, Decision Sciences 10, 1979, pp. 503-518.
6. **JIA, J., DYER, J.S.**: A Standard Measure of Risk and Risk – Value Models. Working Paper No. 1, Risk – Value Study Series, Deparment of Management Science and Information Systems, The Graduate Scool of Business, University of Texas at Austin, Management Science, 1995.
7. **KAHNEMAN, D., TVERSKY, A.**: Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk. În: Econometrica 47, 1979, pp. 263-291.
8. **LAUGHHUNN, D..J., PAYNE, J.W., CRUM, R.**: Managerial Risk Preference for Below-Target Returns, Management Science 26, 1980, pp. 1238-1249.
9. **PAYNE, J.W., LAUGHHUNN, D.J., CRUM, R.**: Translation of Gambles and Aspitation Level Effects in Risky Choice Behaviour. În: Management Science 26, 1980, pp. 1039-1060.
10. **RĂDULESCU, C-Z. şi colectiv**: Raport de cercetare - Modele matematice pentru analiza şi evaluarea riscului de mediu privind apariţia de calamităţi naturale, faza 1 la tema de cercetare Analiza şi evaluarea riscului de mediu privind apariţia de catastrofe naturale, în cadrul programului Orizont 2000, Obiectiv VI, septembrie, 2000.
11. **RĂDULESCU, C-Z. şi colectiv**: Raport de cercetare - Cercetări privind managementul riscurilor de mediu la apariţia de catastrofe naturale, faza 2 la tema de cercetare Analiza şi evaluarea riscului de mediu privind apariţia de catastrofe naturale, în cadrul programului Orizont 2000, Obiectiv VI, decembrie 2000.
12. **RĂDULESCU, C-Z. şi colectiv**: Raport de cercetare - Selectare şi algoritmizare modele de risc pentru mediu, faza 1 la tema de cercetare Analiza şi evaluarea riscului de mediu privind apariţia de catastrofe naturale, în cadrul programului Orizont 2000, Obiectiv VI, martie 2001.
13. **SASKA, J.**: Linearni Multiprogramovani, Ekonomiko - Matematicky Obzor 4(3), 1968, pp. 359-373.
14. **STANCU, MINASIAN I.M.**: Programarea stocastică cu mai multe funcţii obiectiv, Editura Academiei R.S.R., 1980.
15. **STONE, B.K.**: 19 Risk, Return and Equilibrium, MIT Press, Cambridge.
16. **STONE, B.K.**: Ageneral Class of Three Parameter Risk Measures. Journal of Finance 28, 1973, pp. 675-685.

EFECTELE LUNGIMII FINITE A CUVINTELOR ASUPRA FILTRELOR DISTRIBUITE

conf.dr.ing. Ovidiu Radu

Universitatea Politehnica Bucureşti

Rezumat: Un filtru recursiv, de viteză ridicată, se poate obţine prin transformarea unui filtru original într-un filtru de ordin mai mare, utilizând o tehnică de calcul distribuită, cu predicţie. Implementarea acestor filtre, prin cuvinte de lungime finită, poate duce la o anulare incorectă a perechilor poli-zerouri. In legătură cu acest caz, se prezintă rezultatele analizei erorilor de rotunjire şi de cuantizare a coeficienţilor filtrelor

Se arată că, pentru a menţine aceeaşi eroare, la ieşirea filtrului distribuit este necesar ca lungimea cuvântului să fie mărită la $log_2 log_2 2Mb$ (unde M este ordinul filtrului distribuit, iar b este lungimea cuvântului). Pentru M cuprins între 2 şi 8, lungimea cuvântului creşte cu 1 sau 2 biţi.

Cuvinte cheie: filtre recursive distribuite, filtre predictive, eroare de rotunjire, eroare de cuantizare, funcţie de transfer.

1. Introducere

Obţinerea unor filtre recursive, cu viteză ridicată, este un deziderat important. Bucla de reacţie a unui filtru recursiv este elementul care limitează frecvenţa de eşantionare.

Una din abordări constă în utilizarea tehnicilor de predicţie. Prin aceasta, se transformă un filtru recursiv standard, într-o structură cu performanţe superioare, dar care să fie echivalentă filtrului original (în ceea ce priveşte relaţia intrare-ieşire, adică funcţia de transfer). Rezultă un filtru de ordin superior, care emulează filtrul original prin anularea perechii pol-zero. Pentru ilustrarea acestei tehnici, se considera un filtru recursiv de ordinul întâi:

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \tag{1}$$

Bucla acestui filtru are un singur operator de întârziere, iar frecvenţa de eşantionare este limitată de timpul necesar operaţiilor de înmulţire cu o constantă (a) şi de adunare.

Frecvenţa poate fi mărită cu un factor M dacă se rescrie funcţia de transfer astfel:

$$H(z)=\frac{\prod_{i=0}^{M-1} a^i z^{-i}}{1-a^M z^{-M}} \tag{2}$$

Acest filtru are M bucle cu câte un operator de întârziere şi poate funcţiona cu o viteză de M ori mai mare decât filtrul (1). Această creştere de viteză se obţine prin redistribuirea operatorului de întârziere în M etaje de adunare–multiplicare.

Filtrul (2) calculează ieşirea $x(n)$, utilizând ieşirea trecută $x(n-1)$ ca în figura 1; aceasta reprezintă o predicţie. Rezultă că un filtru de ordinul întâi poate fi emulat de către un filtru de ordinul M. Filtrul nerecursiv de ordinul M-1 poate fi, de asemenea, descompus astfel:

$$H(z)=\frac{\prod_{i=0}^{\log_2 M-1}(1+a^{2i}z^{-2i})}{1-a^M z^{-M}}, \tag{3}$$

Descompunerea reduce gradul de complexitate de la M la $log_2 M$ (unde M este numărul de bucle distribuite).

Pentru filtre de ordin superior, se exprimă x(n) în funcţie de stările anterioare distribuite, $x(n)$, $x(n-2M)$,...,$x(n-NM)$, unde N este ordinul filtrului original. Filtrul astfel obţinut este stabil, dacă şi filtrul original este stabil.

La implementarea filtrelor cu virgulă fixă, imprecizia anulării perechii pol-zero duce la erori. Aceste erori pot fi minimizate prin creşterea lungimii cuvântului. Se impune o limită a acestei creşteri pentru ca performanţele filtrului original şi ale celui emulat, să fie comparabile.

În partea a doua a articolului, se consideră un filtru recursiv de ordinul întâi, pentru care se studiază efectele rotunjirii şi ale cuantizării coeficienţilor.

În partea a treia a articolului, se prezintă erorile datorate rotunjirii şi cuantizării coeficienţilor, pentru un filtru distribuit de ordinul doi.