APLICAȚIE A METODEI PUNCTULUI INTERIOR LA PROBLEMELE DE REGLARE CU PREDICȚIE

Popoviciu Ioan
Academia Navală "Mircea cel Bătrân", Constanța

Rezumat: Algoritmul MRPI, prezentat în articol, este o generalizare a metodei punctului interior, care determină soluția unei probleme de programare pătratică. În modelele de reglare cu predicție, cu criteriu de performanță pătratic, se rezolvă, în mod repetat, probleme care se reduc la probleme de programare pătratică. Articolul urmărește modul în care o problemă de reglare cu predicție cu criteriu de performanță pătratic poate fi adusă la o problemă de programare pătratică, a cărei soluție să fie obținută cu un algoritm de tip MRPI.

Cuvinte cheie: :reglare cu predicție, punct interior, programare pătratică.

1. Algoritmul MRPI

Fie o matrice pătratică, semipozitiv definită, $M \in R^{n \times n}$ și un vector $q \in R^n$. Se consideră următoarea problemă, pe care o vom numi **metoda realizabilă a punctului interior (MRPI)**:

să se determine vectorii z, x și s astfel încât

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}. \quad (1)$$

$$x \geq 0, s \geq 0, \ x^T s = 0. \quad (2)$$

Matricile M_{11} și M_{22} sunt submatrici pătratice ale matricei M de dimensiuni n_1, respectiv n_2, iar vectorul q este partiționat corespunzător. Condiția (1) se numește *condiția de realizabilitate*, iar $x^T s = 0$ se numește *condiția de complementaritate*.

Metoda realizabilă a punctului interior pornește cu un punct inițial (z^0, x^0, s^0), unde $x^0 > 0, \ s^0 > 0$, dar posibil nerealizabil (nu verifică (1)). Toate iterațiile (z^k, x^k, s^k) vor păstra proprietatea $x^k > 0, \ s^k > 0$, dar *intervalul de complementaritate* definit de:

$$\mu_k = (x^k)^T s^k / n_2 \quad (3)$$

și nerealizabilitatea vor fi reduse treptat la zero când $k \to \infty$. Fiecare iterație a algoritmului MRPI este o iterație modificată a algoritmului Newton pentru sistemul de ecuații definit de condițiile de realizabilitate (1) și de condițiile de complementaritate $x_i s_i = 0, i = 1,2,\ldots,n_2$.

Dacă definim:

$$F(z,x,s) = \begin{bmatrix} M_{11}z + M_{12}x + q_1 \\ M_{21}z + M_{22}x - s + q_2 \\ XSe \end{bmatrix},$$

unde $X = \operatorname{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_2})$, $S = \operatorname{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_{n_2})$, $e = (1,1,\ldots,1)^T$, sistemul (1) poate fi scris sub forma:

$$F(z,x,s) = 0, \quad (4)$$

iar algoritmul MRPI are următoarea structură.

Algoritm MRPI

Valoare inițială: (z^0, x^0, s^0), **cu** $x^0 > 0, s^0 > 0$.

for $k = 0,1,2,\ldots$

- pentru un σ_k ales în intervalul $(0,1)$ se rezolvă sistemul liniar:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & -I \\ 0 & S^k & X^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta x \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1^k \\ -r_2^k \\ -X^k S^k e + \sigma_k \mu_k e \end{bmatrix}, \tag{5}$$

unde:

$r_1^k = M_{11} z^k + M_{12} x^k + q_1$,

$r_2^k = M_{21} z^k + M_{22} x^k - s^k + q_2$,

$e = (1,1,\ldots,1)^T$,

şi se obţine : $(\Delta z^k, \Delta x^k, \Delta s^k)$.

- se calculează:

$$(z^{k+1}, x^{k+1}, s^{k+1}) = (z^k, x^k, s^k) + \alpha_k (\Delta z^k, \Delta x^k, \Delta s^k), \tag{6}$$

unde $\alpha_k \in (0,1]$ este ales astfel încât $(x^{k+1}, s^{k+1}) > 0$.

repeat

Iteraţia (5) diferă de o iteraţie Newton pură, pentru sistemul (4), numai prin termenul $\sigma_k \mu_k e$ din membrul drept. Acest termen are un rol stabilizator, asigurând că algoritmul converge către soluţia sistemului (1)-(2). Apar în algoritm doi parametri, σ_k şi α_k, care se aleg la fiecare iteraţie. σ_k se alege în intervalul $[\sigma, 0.8]$, unde $\sigma = 10^{-3}$. Parametrul α_k se alege astfel încât să fie satisfăcute următoarele condiţii:

a). expresiile $\|r_1^k\| / \mu_k$ şi $\|r_2^k\| / \mu_k$ trebuie să descrească monoton cu k.

b). $x_i s_i, i = 1,2,\ldots,n_2$ trebuie să rămână apropiate de zero.

c). μ_k să descrească suficient la fiecare iteraţie.

Dacă σ_k şi α_k satisfac aceste condiţii, atunci convergenţa algoritmului este asigurată [5].

În implementările practice α_k se alege mai simplu după criterii euristice. Mai întâi se alege $\alpha_k^{\max}$ ca valoare maximă a mulţimii:

$$\{\alpha \in (0,1] \mid (z^k, x^k, s^k) + \alpha(\Delta z^k, \Delta x^k, \Delta s^k) > 0\}, \tag{7}$$

apoi se alege

$$\alpha_k = \min(1, 0.995 * \alpha_k^{\max}). \tag{8}$$

Operaţia majoră, care trebuie executată la fiecare pas al algoritmului MRPI, este rezolvarea sistemului liniar (5). Matricea acestui sistem are diferite structuri, date de prezenţa blocurilor zero şi componentelor diagonale I, S^k şi X^k. În plus, în cele mai multe cazuri practice, matricea sistemului este rară, ceea ce impune o factorizare bandă prealabilă a matricei sistemului.

Sistemul (5) poate fi adus la o formă mai compactă, prin eliminarea componentei Δs. Deoarece elemente ale lui X^k sunt pozitive, se poate rearanja ultima linie din (5) obținându-se:

$$\Delta s = (X^k)^{-1}(-X^k S^k e + \sigma_k \mu_k e - S^k \Delta x^k) = -S^k + (X^k)^{-1}(\sigma_k \mu_k e - S^k \Delta x^k).$$

Înlocuind în primele două linii din (5) se obține sistemul:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} + (X^k)^{-1} S^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1^k \\ -r_2^k - s_k + \sigma_k \mu_k (X^k)^{-1} e \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

2. Aplicații ale algoritmului MRPI

Problemele de programare liniară şi problemele de programare pătratică convexă pot fi exprimate în forma (1), (2) şi rezolvate cu algoritmul MRPI. De asemenea, în modelele de reglare cu predicție cu criteriu de performanță pătratic, se rezolvă, în mod repetat, probleme care pot fi reduse la probleme de programare pătratică.

2.1 Problema de reglare cu predicție

Modelul general de reglare cu predicție este un program convex infinit dimensional:

$$\min_{u,x} J(u,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + \Delta u_k^T S \Delta u_k\right), \qquad (10)$$

$$x_0 = \hat{x}_j, \quad x_{k+1} = A x_k + B u_k, \qquad (11a)$$

$$D u_k \le d, \quad G \Delta u_k \le g, \quad H x_k \le h, \qquad (11b)$$

unde $x_k \in R^n$, $u_k \in R^m$ şi $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$. Vectorul $\hat{x}_j$ reprezintă estimarea curentă a stării x la momentul de timp j (evoluția predictivă), x_k este mărimea de ieşire la momentul k, iar u_k reprezintă intrarea (comanda) la acelaşi moment k. Presupunem că matricea Q este simetrică şi semipozitiv definită, iar matricile R şi S sunt simetrice şi pozitiv definite.

Teorema ([8]) Dacă există un punct care satisface restricțiile (11), atunci problema de reglare cu predicție pe orizont infinit este stabilă dacă (A,B) este stabilizabilă şi $(A,Q^{1/2})$ este detectabilă.

Înlocuind pe Δu_k cu $u_k - u_{k-1}$ şi folosind substituțiile:

$$\hat{x}_j \leftarrow \begin{bmatrix} \hat{x}_j \\ u_{j-1} \end{bmatrix}, \quad x_k \leftarrow \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}, \quad A \leftarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad B \leftarrow \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix},$$

$$Q \leftarrow \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -S \end{bmatrix}, \quad R \leftarrow R + S,$$

$$D \leftarrow \begin{bmatrix} D \\ G \end{bmatrix}, \quad G \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, \quad d \leftarrow \begin{bmatrix} d \\ g \end{bmatrix}, \quad H \leftarrow \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix},$$

relațiile (10) - (11) devin

$$\min_{u,x} J(u,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + 2 x_k^T M u_k\right), \qquad (12)$$

$$x_0 = \hat{x}_j, \quad x_{k+1} = A x_k + B u_k, \qquad (13a)$$

$$D u_k - G x_k \le d, \quad H x_k \le h. \qquad (13b)$$

În continuare, vom arăta că problema infinit dimensională (12) poate fi înlocuită cu o problemă echivalentă finit dimensională (pas necesar pentru calculul practic al soluţiei), iar restricţiile $Hx_k \leq h$, care sunt restricţii stricte, pot fi înlocuite prin adăugarea unor termeni la criteriul de performanţă, care să penalizeze violarea acestor condiţii.

2.1.1 Principiul orizontului îndepărtat în problema de reglare cu predicţie

Pasul important în reducerea problemei (12)–(13) la o problemă finit dimensională este utilizarea unei legi feedback pentru determinarea comenzii u_k după un anumit orizont de timp:

$$u_k = Kx_k, \quad (\forall)k \geq N. \tag{14}$$

Cu aceste restricţii, stările $x_k, k > N$ şi intrările $u_k, k \geq N$ sunt complet determinate de x_N, starea la sfârşitul orizontului de predicţie.

Două metode pot fi utilizate pentru determinarea legii (14). Prima dată de Muske şi Rawlings [5], face K=0 în relaţia (14). Rezultă

$$\frac{1}{2}\sum_{k=N}^{\infty}\left(x_k^T Qx_k + u_k^T Ru_k + 2x_k^T M u_k\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=N}^{\infty} x_k^T Q x_k. \tag{15}$$

Dacă A este stabilă, suma este egală cu $\frac{1}{2}x_N^T \overline{Q}\, x_N$ unde $\overline{Q}$ este soluţia ecuaţiei matriceale Liapunov:

$$\overline{Q} - A^T \overline{Q} A = Q. \tag{16}$$

Dacă A nu este stabilă, suma (15) poate fi infinită şi se impune o restricţie stabilizatoare. Descompunerea Schur a matricii A poate fi folosită pentru a partiţiona matricea A într-un subspaţiu stabil şi unul instabil. Dacă această descompunere Schur este de forma:

$$A = UTU^T = \begin{bmatrix} U_s & U_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s^T \\ U_u^T \end{bmatrix},$$

unde valorile proprii ale lui T_{11} aparţin cercului unitate, în timp ce valorile proprii ale lui T_{22} se găsesc pe cercul unitate sau în afara lui, atunci coloanele ortogonale ale lui U generează subspaţiul stabil U_s, respectiv subspaţiul instabil U_u al lui A [4]. Se adaugă restricţia finală:

$$Fx_N = 0, \text{unde } F = U_u^T, \tag{17}$$

pentru a se asigura că modul instabil nu va apare la momentul N (deoarece $u_k = 0$, pentru $(\forall)k \geq N$ modul instabil va rămâne zero pentru toate etapele $k \geq N$). Evoluţia modului instabil pe orizont infinit poate fi determinată prin rezolvarea ecuaţiei Liapunov $\overline{Q} - A_s^T \cdot \overline{Q} \cdot A_s = Q$,

unde $A_s = U_s \cdot T_{11} \cdot U_s^T$ şi înlocuind suma infinită cu $\frac{1}{2} \cdot x_N^T \cdot \overline{Q} \cdot x_N$.

În a doua metodă pentru determinarea legii feedback $u_k = Kx_k$ [1], [6] intrarea după momentul de eşantionare N este parametrizată cu sporul (câştigul) liniar pătratic K obţinut din rezolvarea ecuaţiei de stare Riccati. Această matrice împreună cu legea feedback (14) este soluţia problemei fără restricţii, adică problema în care restricţiile (13b) nu apar. Utilizând (14), suma (12) poate fi scrisă ca:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=N}^{\infty}\left(x_k^T Qx_k + u_k^T Ru_k + 2x_k^T Mu_k\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=N}^{\infty}\left(x_k^T Qx_k + x_k^T K^T RKx_k + 2x_k MKx_k\right).$$

Suma infinită poate fi înlocuită cu un singur termen $\frac{1}{2} \cdot x_N^T \cdot \overline{Q} \cdot x_N$, unde $\overline{Q}$ este soluţia ecuaţiei discrete Riccati:

$$\overline{Q} = Q + A^T\overline{Q}A - \left(A^T\overline{Q}B + M\right)\left(R + B^T\overline{Q}B\right)^{-1}\left(B^T\overline{Q}A + M^T\right). \qquad (18)$$

În ambele metode, legea feedback (14) poate fi aplicată numai dacă restricțiile (13) sunt satisfăcute la toate momentele de timp k, inclusiv $k \geq N$. Deci, legea (14) devine validă numai după determinarea unei stări x_N astfel încât soluția generată de (14) și (13a) la momentele $k \geq N$ să satisfacă și relația (13b) pentru $k \geq N$. Pentru aceasta, definim mulțimea χ a stărilor care satisface această proprietate astfel:

$$\chi = \left\{x \middle| H(A - BK)^l x \leq h, (DK - G)(A - BK)^l x \leq d, (\forall) l \geq 0\right\},$$

unde K este soluția optimă a problemei liniare fără restricții obținută din ecuația:

$$K = -\left(R + B^T\overline{Q}B\right)^{-1}\left(B^T\overline{Q}A + M^T\right). \qquad (19)$$

Dacă se alege N astfel încât $x_N \in \chi$, atunci următoarea problemă finit dimensională este echivalentă cu problema (12), (13):

$$\min_{u,x} J(u,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + 2x_k^T M u_k\right) + \frac{1}{2}x_N^T\overline{Q}x_N \qquad (20)$$

$$x_0 = \hat{x}_j, \quad x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad (21a)$$

$$u_k = Kx_k, \quad k \geq N, \qquad (21b)$$

$$Du_k - Gx_k \leq d, \quad Hx_k \leq h, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1, \qquad (21c)$$

unde $\overline{Q}$ este soluția ecuației Riccati (18).

Mulțimea χ este dificil de caracterizat explicit, deoarece ea este definită de un număr infinit de condiții. Dacă componentele vectorilor h și d sunt strict pozitivi și modelul fără restricții este stabil, se poate arăta că $0 \in \chi$ [8]. În aceste ipoteze, există un indice N_∞ astfel încât

$$x_k \notin \chi, \quad k < N_\infty, \quad x_k \in \chi, \quad k \geq N_\infty. \qquad (22)$$

Deoarece N_∞ este dificil de determinat în practică, se poate rezolva problema (20), (21) pentru o valoare fixă a lui N și apoi se determină stările și intrările care la momentul $k \geq N$ continuă să satisfacă restricțiile. Dacă nu, se crește N și se repetă procesul. Există o serie de metode [1], [4], [7] care garantează că restricțiile sunt satisfăcute pe un orizont finit, după un număr finit de momente $k \geq N$. În prezența restricțiilor (11b), se poate întâmpla ca regulatorul să nu stabilizeze toate stările posibile, chiar dacă ipoteza de stabilitate este satisfăcută. Când stabilizarea nu este posibilă problema (12), (13), este o problemă care nu are soluție, restricțiile problemei nefiind satisfăcute.

În formularea [5], aplicarea restricțiilor finale (17) conduc, adesea, la o problemă fără soluție. Posibilitatea de obținere a soluției constă în creșterea lungimii orizontului N, dar când starea inițială nu este stabilizabilă, mulțimea soluțiilor poate continua să fie vidă pentru orice N. Existența unui N care să conducă la o soluție poate fi determinată prin rezolvarea următorului program liniar [5]:

$$\min_{u,x,r} e^T r \qquad (23)$$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1 \qquad (24)$$

$$Du_k - Gx_k \leq d, \quad Hx_k \leq h, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$r - Fx_N \geq 0, \quad r + Fx_N > 0,$$

unde $e = (1,1,\ldots,1)^T$.

O soluție pozitivă a acestui program liniar arată că o soluție nu există și lungimea orizontului N trebuie crescută. Dacă o soluție nu este determinată până la o anumită limită superioară a lui N, atunci starea curentă nu poate fi stabilizată pentru regulatorul specificat.

2.1.2 Realizabilitate şi restricţii "soft" în modelul de reglare cu predicţie

În modelul de reglare cu predicţie, unele restricţii sunt impuse de limitări fizice, iar altele sunt mai puţin importante şi pot reprezenta limitele între care să funcţioneze o instalaţie tehnică. În anumite situaţii ale modelelor de reglare cu predicţie, nici o mulţime a comenzilor şi stărilor nu poate satisface toate aceste restricţii. Atunci, în loc să avem un algoritm care să declare nerealizabilitatea problemei, se preferă o soluţie care să satisfacă anumite restricţii stricte (numite restricţii "hard"), în timp ce alte restricţii (numite restricţii "soft") sunt înlocuite cu termeni din criteriul de performanţă, care să penalizeze violarea acestor restricţii.

Presupunând, de exemplu, că toate restricţiile $Hx_k \le h$ din (21c) sunt restricţii "soft", se obţine următoarea modificare a criteriului de performanţă:

$$\min_{x,u,\varepsilon} J(u,x,\varepsilon) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + 2x_k^T M u_k + \varepsilon_k^T Z \varepsilon_k\right) + z^T \varepsilon_k + \frac{1}{2} x_N^T \overline{Q} x_N, \tag{25}$$

unde restricţiile de violare ε_k, care înlocuiesc restricţiile "soft" $Hx_k \le h$, sunt definite de

$$Hx_k - \varepsilon_k \le h, \quad \varepsilon_k \ge 0. \tag{26}$$

Problema modificată are avantajul de a furniza o soluţie, atunci când problema originală (20), (21) nu face acest lucru.

Atunci, problema generală a modelului de reglare cu predicţie cu orizont finit, restricţii finale şi restricţii "soft" are următoarea formă:

$$\min_{u,x,\varepsilon} J(u,x,\varepsilon) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + 2x_k^T M u_k + \varepsilon_k^T Z \varepsilon_k\right) + z^T \varepsilon_k + \frac{1}{2} x_N^T \overline{Q}_N x_N. \tag{27}$$

$$x_0 = \hat{x}_j \ (\text{fixat}), \tag{28a}$$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0,1,\ldots,N-1, \tag{28b}$$

$$Du_k - Gx_k \le d, \quad k = 0,1,\ldots,N-1, \tag{28c}$$

$$Hx_k - \varepsilon_k \le h, \quad k = 1,2,\ldots,N, \tag{28d}$$

$$\varepsilon_k \ge 0, \quad k = 1,2,\ldots,N, \tag{28e}$$

$$Fx_N = 0. \tag{28f}$$

2.2 Reducerea problemei de reglare cu predicţie la o problemă de programare pătratică

Se consideră următoarea problemă de reglare cu predicţie cu criteriu de performanţă pătratic, în care comanda este obţinută rezolvând în mod repetat (la etape succesive), o problemă de tipul:

$$\min_{x_j,u_j} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2}\left(x_j^T Q x_j + u_j^T R u_j\right) + q^T x_j + r^T u_j + \frac{1}{2} x_N^T \widetilde{Q} x_N + \widetilde{q} x_N,$$

$$x_{j+1} = Ax_j + Bu_j, \quad j = 0,\ldots,N-1, \tag{29}$$

x_0 fixat,

$$Gu_j + Jx_j \le g, \quad j = 0,\ldots,N-1,$$

unde Q şi R sunt matrici semipozitiv definite, $u_j \in R^m$, $x_j \in R^n$, $g \in R^{m_c}$.

Dacă se fac substituţiile:

$$Q \leftarrow \begin{bmatrix} R & & & & & & \\ & Q & & & & & \\ & & R & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & Q & & \\ & & & & & R & \\ & & & & & & \tilde{Q} \end{bmatrix}, \quad G \leftarrow \begin{bmatrix} G & J & & & & & \\ & & G & J & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & G & J \end{bmatrix},$$

$$H \leftarrow \begin{bmatrix} B & -I & & & & & \\ & A & B & -I & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & A & B & -I \end{bmatrix},$$

$$z \leftarrow \begin{bmatrix} u_0 \\ x_1 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}, \quad c \leftarrow \begin{bmatrix} r \\ q \\ r \\ \vdots \\ r \\ \tilde{q} \end{bmatrix}, \quad g \leftarrow \begin{bmatrix} g \\ g \\ \vdots \\ g \end{bmatrix}, \quad h \leftarrow \begin{bmatrix} -Ax_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

problema (29) se reduce la următoarea problemă de programare pătratică:

$$\begin{aligned} &\min_z \frac{1}{2} z^T Q z + c^T z, \\ &Hz = h, \\ &Gz \le g, \end{aligned} \tag{30}$$

unde Q este o matrice simetrică semipozitiv definită.

Condițiile de optimalitate Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pentru problema (30) sunt:

$$\begin{aligned} &Qz + H^T \zeta + G^T \lambda = -c, \\ &Hz = h, \\ &Gz + t = g, \\ &t^T \lambda = 0, \\ &t \ge 0, \lambda \ge 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Următoarele substituții aduc acest sistem la o formă de tipul relației (1) din algoritmul MRPI:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} Q & H^T \\ -H & 0 \end{bmatrix}, M_{12} = \begin{bmatrix} G^T \\ 0 \end{bmatrix}, M_{21} = \begin{bmatrix} -G & 0 \end{bmatrix}, M_{22} = O,$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} c \\ h \end{bmatrix}, q_2 = g, \ z = \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix}, x = \lambda, s = t.$$

3. Studiu de caz. Ciclul termic

În anumite aplicaţii industriale, se doreşte coacerea substratului unui material şi apoi călirea acestui substrat. Coacerea implică încălzirea substratului la o temperatură specificată şi păstrarea acestei temperaturi o anumită perioadă de timp.

Călirea substratului se referă la procesul de răcire şi de păstrare a substratului la noua temperatură de răcire. Această combinaţie coacere /călire se numeşte **ciclu termic** şi este utilizat, de exemplu, în microlitografie sau în realizarea semiconductorilor.

Conceptul de transfer de căldură la/de la substratul de material este prezentat în figura 1.

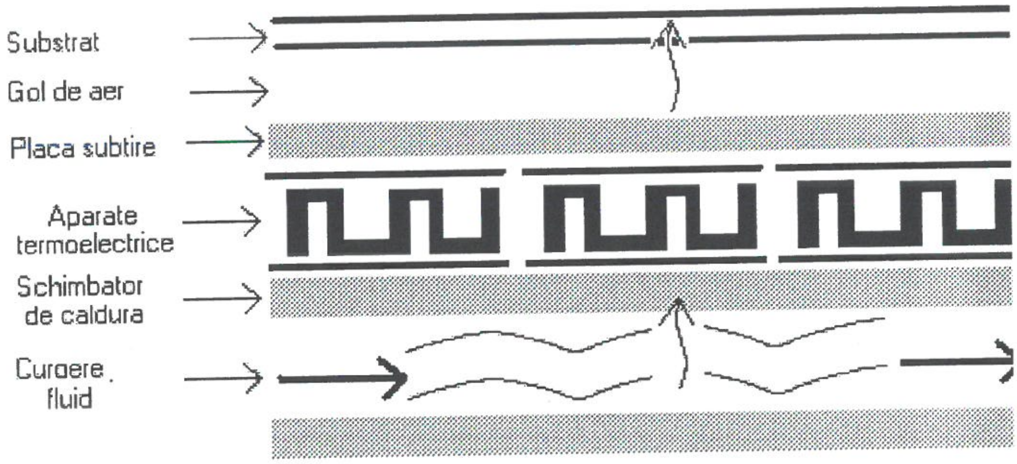

Figura 1.

Ciclul termic conţine un fluid şi un schimbător de căldură, care furnizează mărimea încălzirii/racirii. O placă termică subţire conduce căldura la/de la substratul de material. Între placă şi fluid, este plasat un set de aparate termoelectrice, care întreţin controlul temperaturii plăcii, deci, şi a substratului de material. Placa termică este o placă de aramă de grosime 1/16 inch pe care se sprijină, prin intermediul unor pini, substratul de material de grosime 0.25 inch, realizându-se, astfel, un gol de aer. Placa de aramă este un pătrat de 8 inch, iar substratul de material este un pătrat de 6 inch. Aparatele termoelectrice încălzesc fluidul la temperatura apropiată de cea dorită pentru substratul de material. Ele sunt legate în serie şi puterea curentului lor electric reprezintă comanda de intrare u. Temperatura măsurată a substratului de material reprezintă ieşirea y. Deci, instalaţia este un sistem SISO.

Descrierea modelului

Funcţia de transfer al modelului este dată de ([2]):

$$H(s) = \frac{0.0011}{s^4 + 0.3466s^3 + 0.1155s^2 + 0.0083s + 0.0001},$$

cu polii: -0.0158, -0.0718 şi $-0.1295 \pm 0.2736i$.

Pentru funcţia de transfer H(s) rezultă următoarea realizare standard:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.0001 & -0.0083 & -0.1155 & -0.3466 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0.0011 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

corespunzătoare sistemului:

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = c^T x$$

cu criteriul de performanță

$$J = \frac{1}{2}u^2,$$

care reprezintă efortul regulatorului.

Pentru determinarea modelului discret se calculează matricile Φ şi Γ cu perioada de eşantionare T=2s.

$$\Phi = e^{AT} \approx I + AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.0001 & -0.0083 & -0.1155 & -0.3466 \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -0.0002 & -0.0166 & -0.1310 & 0.3068 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{Ap} b dp = \int_0^2 \begin{bmatrix} p & 2p & 0 & 0 \\ 0 & p & 2p & 0 \\ 0 & 0 & p & 2p \\ -0.0002p & -0.0166p & -0.1310p & 0.3068p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dp$$

$$= \int_0^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2p \\ 0.3068p \end{bmatrix} dp = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0.6136 \end{bmatrix}$$

Cu Φ şi Γ determinați, modelul discret al problemei devine:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -0.0002 & -0.0166 & -0.1310 & 0.3068 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0.6136 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0.0011 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k),$$

cu criteriul de performanță :

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k).$$

Asupra comenzii se impun restricțiile:

$$\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) \le 0.007.$$

Deoarece matricea de controlabilitate $(\Gamma \quad \Phi\Gamma)$ este nesingulară, se poate trece la exprimarea problemei echivalente de programare pătratică. Se definesc matricile şi vectorii:

$$z_1 = \begin{bmatrix} u_0 \\ x_1 \\ u_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ u_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}, \quad z_2 = \begin{bmatrix} y_0 \\ x_0 \\ y_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ x_{N-1} \end{bmatrix}, \quad h_1 = \begin{bmatrix} -\Phi x_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} \Gamma & -I & & & & & \\ & \Phi & \Gamma & -I & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \Phi & \Gamma & -I \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} I & -c & & & & \\ & & I & -c & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & I & -c \end{bmatrix},$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix},.$$

$$\widetilde{Q} = \begin{bmatrix} I & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & I & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & I & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \widetilde{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{G} = \begin{bmatrix} I & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & I & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & I & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \widetilde{G} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0.007 * N \\ 0.007 * N \\ 0.007 * N \\ \vdots \\ 0.007 * N \\ 0.007 * N \\ 0.007 * N \end{bmatrix}.$$

Cu aceste substituţii, problema discretă este echivalentă cu următoarea problemă de programare pătratică:

$$\min_z \frac{1}{2} z^T Q z$$

$$Hz = h$$

$$Gz \le g .$$

Condițiile de optimalitate Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pentru această problemă sunt:

$$Qz + H^T\zeta + G^T\lambda = 0,$$
$$Hz = h,$$
$$Gz + t = g,$$
$$t \ge 0, \lambda \ge 0, \quad t^T\lambda = 0,$$

iar următoarele substituții:

$$M_{11} \leftarrow \begin{bmatrix} Q & H^T \\ -H & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{12} \leftarrow \begin{bmatrix} G^T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_{21} \leftarrow \begin{bmatrix} -G & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{22} \leftarrow 0,$$

$$q_1 \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}, \quad q_2 \leftarrow g, \quad z \leftarrow \begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad x \leftarrow \lambda, \quad s \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix},$$

aduc sistemul condițiilor KKT la un sistem de forma

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix},$$
$$x \ge 0, s \ge 0, \; x^T s = 0,$$

definit în algoritmul MRPI.

Soluția obținută, după câteva iterații, (prin aplicarea algoritmului BPMPD [9], de tip MRPI) pentru mărimile de ieșire este prezentată în figura 2. Se constată că, după 5 iterații, valoarea mărimii de ieșire se apropie de valoarea dorită.

4. Concluzii

Problemele de reglare cu predicție pot fi rezolvate cu algoritmi în care elementul principal îl constituie rezolvarea unui sistem liniar, de regulă, de dimensiuni mari și cu matricea sistemului rară. În lucrare, s-a utilizat un algoritm secvențial (BPMPD), dar rezolvarea sistemelor de dimensiuni mari și cu matricea sistemului rară se pretează foarte bine la aplicarea unor metode iterative paralele, de exemplu, metoda gradientului conjugat, metoda SOR, metoda multigrid etc.

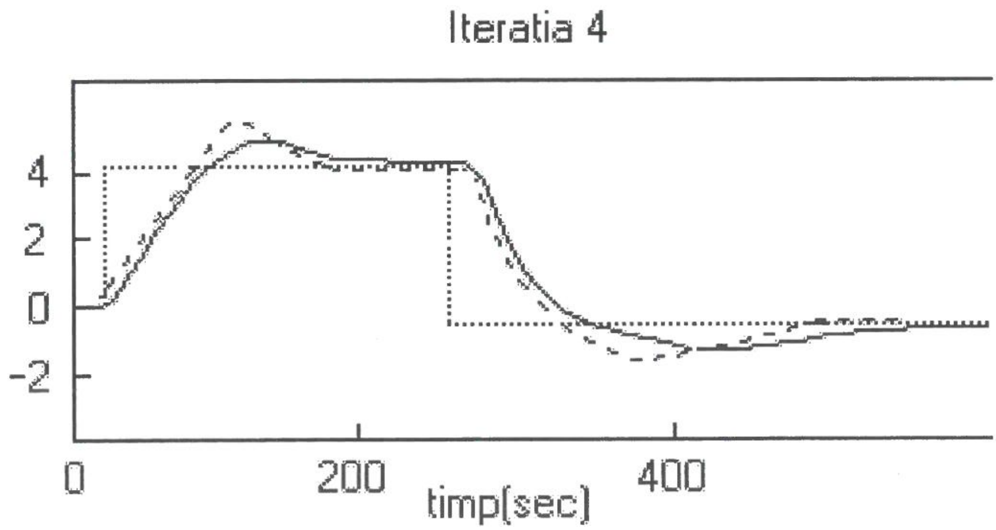

Figura 2.

Bibliografie

1. **CHMIELEWSKI, D., V. MANOUSIOUTHAKIS**: On Constrained Infinite-time Linear Quadratic Optimal control. În: System & Control Letters, 29: 1996, pp. 121-129.
2. **CONGALIDIS, J.B., J.R. RICHARDS, W.H. RAY**: Modeling and Control of a Co-polymerization Reactor. În: Proc. of the American Control Conference, Seattle, 1986, pp. 1779-1793.
3. **MANGASARIN, O.L.**: Nonlinear Programming, McGraw-Hill, New York, 1969.
4. **MEADOWS, K.,R.**: Implementable Model Predictive Control in the State Space. În: Proc. of the 1995 American Control Conference, 1995, pp. 3699-3703.
5. **MUSKE, K.R., J.B. RAWLINGS**: Model Predictiv Control with Linear Models. În: AIChE Journal, 39, 1993, pp. 262-287.
6. **SCOKAERT, P.O., J.B. RAWLINGS**: Infinite Horizon Linear Quadratic Control with Constrains. În: Proc. of the 13th IFAC World Congress, San Francisco, 1996.
7. **SCOKAERT, P.O., J.B. RAWLINGS**: Constrained Linear Quadratic Regulation. În: IEEE Transactions on Automatic Control, December, 1995.
8. **WRIGHT, S.J.**: Interior-Point Methods for Optimal Control of Discrete-Time Systems. În: Journal of Optimization Theory and Applications, 77, 1993, pp. 161-187.
9. * * *: BPMPD user's manual, Version 2.20, Computer and Automation Institute, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 2000.