DETERMINAREA VALORII UNEI OPŢIUNI DE TIP EUROPEAN

Lect. Sorin MANOLE
Universitatea „Constantin Brâncoveanu" Piteşti

Rezumat: Articolul este destinat modelului Black-Scholes, utilizat pentru determinarea valorii unei opţiuni. În prima parte, se definesc procesele stocastice şi mişcările browniene, se formulează ipotezele de lucru şi se dă ecuaţia stocastică definind evoluţia unui activ financiar. În continuare, se prezintă lema lui Itô, care, aplicată funcţiei ce exprimă valoarea activului suport, permite obţinerea ecuaţiei cu derivate parţiale Black-Scholes, după eliminarea caracterului aleator. La ipotezele formulate, se adaugă altele şi apoi se obţin condiţiile la limită şi condiţiile finale, care întregesc problema de determinare a valorii unei opţiuni. Pentru programele obţinute, se enunţă teoreme care exprimă valoarea opţiunii în funcţie de preţul activului suport.

Cuvinte cheie: opţiuni europene de tip call, opţiuni europene de tip put, valoarea unei opţiuni, ecuaţie stocastică, lema lui Itô, ecuaţia Black-Scholes.

1. Introducere

În problematica economică modernă opţiunile financiare ocupă un loc aparte.

O opţiune conferă deţinătorului dreptul de a tranzacţiona o cantitate oarecare dintr-un activ, la o dată viitoare, la un preţ prestabilit, dar înlătură obligaţia. Vânzătorul unei opţiuni este obligat să tranzacţioneze o cantitate de active, în condiţiile prevăzute în contract, chiar dacă evoluţia activului nu îi este favorabilă.

O opţiune **de tip call** este o opţiune de cumpărare, iar o opţiune **de tip put** este o opţiune de vânzare.

După durata de valabilitate a opţiunii, există două tipuri de opţiuni: **de tip european** – dacă exercitarea poate fi realizată doar la scadenţă (la exerciţiu) şi **de tip american** – dacă exercitarea poate fi realizată la orice moment de timp, anterior momentului scadenţei.

În continuare, vom desemna prin t momentul curent de timp, prin T termenul de scadenţă, prin E preţul de exerciţiu (preţul la care se face tranzacţia), prin $S(t)$ (sau S) preţul activului suport şi prin $C(S,t)$, $P(S,t)$ (sau C,P) preţul unei opţiuni call, respectiv put.

2. Caracterul aleator al evoluţiei activelor financiare

2.1. Ipoteze de lucru. Formalizare matematică

Considerăm că nu cunoaştem şi nu putem prevedea nivelurile viitoare ale preţurilor activelor financiare, utilizând valorile acestora din trecut. Vom presupune, însă, că anumite caracteristici ale procesului de evoluţie a valorii activelor financiare, caracteristici ce pot fi determinate pe baza seriilor de timp cu privire la aceste valori, caracterizează şi evoluţia viitoare (ca de exemplu media, dispersia şi natura distribuţiei variabilei aleatoare „preţul titlului financiar"). O altă condiţie care va fi impusă este aceea că pieţele financiare răspund instantaneu la orice informaţie nouă, cu privire la preţul unui activ financiar.

Considerăm un spaţiu de probabilitate (Ω, F, P), unde Ω reprezintă mulţimea informaţiilor economice necesare, iar F este corpul borelian al familiei evenimentelor cărora li se pot asocia probabilităţi (asupra cărora poate acţiona funcţia P). Pe (Ω, F) se defineşte o bază stocastică $(F_t)_{t\geq 0}$ (o familie strict crescătoare de corpuri boreliene), care reprezintă descrierea matematică a tuturor informaţiilor de care observatorul procesului economic dispune la fiecare moment de timp t.

Un **proces stocastic** este o aplicaţie $X(t,\omega):[0,+\infty)\times\Omega\to \mathbf{R}$ cu proprietatea că $X(t,\cdot):\Omega\to\mathbf{R}$ este măsurabilă pentru orice $t\in[0,+\infty)$. Procesele stocastice descriu evoluţia cronologică a fenomenelor aleatoare. Procesul stocastic X este **adaptat** filtraţiei $(F_t)_{t\geq 0}$ dacă pentru orice t, variabila aleatoare $X(t,\cdot)$ este măsurabilă în raport cu corpul borelian F_t. Pentru un proces adaptat este realizabilă o descriere probabilistică.

Mişcarea browniană este un proces stocastic continuu $X:[0,T]\times\Omega\to\mathbf{R}$, care satisface următoarele condiţii:

1. $X(0)=0$, adică perturbaţia nu acţionează aleator la momentul iniţial;
2. este un proces cu creşteri independente, adică dacă $t_1<\ldots<t_n$, atunci creşterile X (t1), X(t2) – X(t1) ,…, X(tn) – X(tn-1) sunt variabile aleatoare independente. Acest lucru se traduce prin faptul că fluctuaţiile anterioare nu influenţează eventualele fluctuaţii viitoare;

3. dacă $s \leq t$, atunci variabila aleatoare $X(t) - X(s)$ are o repartiție normală, de medie 0 și dispersie $t - s$ (adică $X(t) - X(s) \in N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$).

Așa cum se poate vedea imediat, variabila aleatoare $X(t)$ are o repartiție normală și $X(t) \in N\left(0, \sqrt{t}\right)$, pentru orice $t \in [0, T]$.

2.2. Evoluția valorii unui activ financiar

În condițiile precizate mai sus, evoluția prețului unui activ financiar are caracteristicile unui proces Markov (valoarea prețului în viitor este independentă de valoarea din trecut, de îndată ce valoarea prezentată este cunoscută).

Evoluția prețului activului suport S(sau $S(t)$) este dată de următoarea ecuație diferențială stocastică:

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dX \tag{1}$$

unde:

μ - reprezintă ritmul mediu de creștere a valorii activului financiar;

σ - se numește volatilitate și reprezintă abaterea standard a valorii activului financiar;

X - este o mișcare browniană, de unde rezultă că dX este o variabilă aleatoare ce urmează o lege de repartiție normală de medie 0 și dispersie $dt\left(dX \in N\left(0, \sqrt{dt}\right)\right)$.

Cu ajutorul relației (1), se poate simula evoluția prețului activului financiar, caz în care dX va fi o selecție aleatoare dintr-o distribuție normală, de probabilitate cu caracteristicile de mai sus.

Definim filtrația $(F_t)_{t\geq 0}$ ca fiind filtrația generată de procesul mișcării browniene $(X(t))_{0\leq t\leq T}$, adică $F_t = B\{X(s) / 0 \leq s \leq t\}$. La momentul inițial cursul $S(0) = S_0$ este direct observabil, deci determinist, nu aleator.

Considerând că μ și σ sunt constante, se poate arăta că ecuația stocastică (1) admite ca soluție unică procesul stocastic $(S(t))_{0\leq t\leq T}$ dat de relația:

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma X(t)} \tag{2}$$

motiv pentru care spunem că S este distribuită log-normal.

3. Lema lui Itô. Eliminarea caracterului aleator

Lema lui Itô reprezintă rezultatul central al calculului stocastic.

Lema lui Itô

Fie:

1. $(a(t))_{t\geq 0}$ un proces adaptat și măsurabil, astfel încât $P\left(\left\{\omega / \int_0^t a^2(s)\, ds < \infty\right\}\right) = 1, \forall t \geq 0;$
2. $(b(t))_{t\geq 0}$ un proces adaptat și măsurabil, astfel încât $P\left(\left\{\omega / \int_0^t |b(s)|\, ds < \infty\right\}\right) = 1, \forall t \geq 0;$
3. X o mișcare browniană;
4. $f(t, x) : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă, ce admite derivate parțiale de ordinul unu în t și de ordinul unu și doi în x, toate continue ($f \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$).

Dacă un proces $(Y(t))_{t\geq 0}$ satisface ecuația

$$dY = b\, dt + a\, dX \tag{3}$$

atunci pentru $f(t,Y)$ avem:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + b\frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\right)dt + a\frac{\partial f}{\partial Y}dX \tag{4}$$

Această relație face legătura între o modificare mică, survenită în nivelul variabilei aleatoare (dX) şi modificarea corespunzătoare a funcției ce depinde de nivelul variabilei aleatoare (df).

Se observă că, în procesele aleatoare de evoluție a variabilelor Y şi $f(t,Y)$, caracterul aleator este indus de aceeaşi variabilă aleatoare, anume dX. Ne propunem să construim o variabilă aleatoare $g(t,Y)$ a cărei variație dg este deterministă într-un interval dt mic.

Considerăm $g(t,Y) = f(t,Y) - \Delta \cdot Y$ unde Δ est o mărime constantă în intervalul de timp dt.

Aplicând lema lui Itô funcției g, obținem $dg = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + b\left(\frac{\partial f}{\partial Y} - \Delta\right) + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\right)dt + a\left(\frac{\partial f}{\partial Y} - \Delta\right)dX$

Alegând $\Delta = \frac{\partial f}{\partial Y}$, rezultă $dg = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\right)dt$, adică o relație deterministă ce exprimă evoluția variabilei aleatoare g.

4. Modelul Black – Scholes

4.1. Ipotezele modelului

Reluăm ipotezele formulate la 2.1. şi 2.2.. Aşa cum am văzut, evoluția activului suport urmează un proces aleator, de tip log-normal, descris prin ecuația (1). De asemenea, admitem că rata dobânzii (r) şi volatilitatea activului suport (σ) sunt funcții deterministe de timp.

În plus, considerăm că activul suport nu plăteşte dividende pe durata de valabilitate a opțiunii, ipoteză care poate fi abandonată dacă valoarea dividendelor ce vor fi plătite este cunoscută de la început.

Mai presupunem că nu există posibilitate de arbitraj, ceea ce face ca toate portofoliile sigure (cu risc nul) să aducă acelaşi venit.

Vom mai accepta următoarele ipoteze: tranzacționarea activelor suport poate avea loc în mod continuu; sunt permise pozițiile short la vânzare, adică o persoană poate vinde active pe care nu le deține, în speranța că valoarea respectivelor active va scădea până în momentul în care are loc tranzacția; titlurile financiare sunt infinit divizibile, adică se poate achiziționa orice cantitate de active suport.

4.2. Ecuația cu derivate parțiale Black-Scholes

Notăm cu $V(S,t)$ valoarea unei opțiuni generice la momentul t şi considerăm că $V \in C^{1,2}$ $(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R})$.

Procesul $(S(t))_{t\geq 0}$ satisface o ecuație de tipul celei de la (3) (pentru $Y = S$, $a = \sigma S$, $b = \mu S$, obținem ecuația (1)). Funcțiile a şi b precizate mai devreme verifică condițiile (1), respectiv (2) de la lema lui Itô, astfel încât, aplicând relația (4) cu V în locul lui f şi S în locul lui Y, obținem

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dX.$$

Pentru eliminarea caracterului aleator, construim un portofoliu format dintr-o opțiune de tipul $V(S,t)$ şi o cantitate $(-\Delta)$ de active suport (lucru realizabil conform unor ipoteze formulate anterior). Valoarea acestui portofoliu la momentul de timp t este

$$\Pi = V - \Delta \cdot S \tag{5}$$

Alegând

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \tag{6}$$

şi aplicând lema lui Itô funcţiei Π , avem

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \tag{7}$$

Portofoliul obţinut prin alegerea lui Δ ca mai sus are o evoluţie deterministă. În consecinţă, investiţia într-un astfel de portofoliu prezintă risc nul. Dacă suma Π ar fi investită într-o bancă cu rata dobânzii r, atunci creşterea depozitului bancar în intervalul de timp dt ar fi

$$d\Pi = r\Pi \, dt \tag{8}$$

Întrucât nu există posibilităţi de arbitraj, veniturile obţinute prin cele două modalităţi de investire fără risc sunt egale, aşa încât din (7) şi (8) rezultă

$$r\Pi \, dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \tag{9}$$

Pe baza relaţiilor (5) şi (6), din (9) rezultă

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{10}$$

cunoscută sub denumirea de ecuaţia cu derivate parţiale Black - Scholes.

4.3. Valoarea opţiunilor la scadenţă

Deţinătorul unei opţiuni call de tip european nu are interes să acţioneze, dacă la termenul de scadenţă T, preţul de exerciţiu E este superior cursului $S(T)$. Dacă, din contră, $S(T) > E$, atunci, operând la momentul T, deţinătorul opţiunii realizează un profit egal cu $S(T) - E$. Astfel, valoarea la scadenţă a unei opţiuni call este

$$C(T, S(T)) = max(S(T) - E, 0) \tag{11}$$

Pentru deţinătorul unei opţiuni put de tip european, în cazul $S(T) < E$, exercitarea opţiunii aduce un profit egal cu diferenţa dintre preţul de exerciţiu al opţiunii cedate şi valoarea activului suport la scadenţă, adică $E - S(T)$. În caz contrar, nu există motive de exercitare a opţiunii. Astfel, valoarea la scadenţă a unei opţiuni put este

$$P(T, S(T)) = max(E - S(T), 0) \tag{12}$$

4.4. Actualizarea valorii unei sume

Pentru ca la momentul T un investitor să deţină suma E, este necesar ca, în prezent (la momentul t), să facă un plasament bancar cu valoarea $M(t)$ care verifică condiţiile $\begin{cases} M'(t) = rM(t) \\ M(T) = E \end{cases}$ unde r este rata dobânzii.

Rezolvând ecuaţia diferenţială şi folosind condiţia finală, găsim:

$$M(t) = Ee^{-r(T-t)} \tag{13}$$

dacă r se consideră constantă în timp.

Când r este o funcţie de t, obţinem:

$$M(t) = Ee^{-\int_t^T r(s)ds} \tag{14}$$

Situaţia prezentată aici corespunde cazului continuu, care va fi utilizat mai departe.

4.5. Evaluarea opțiunilor call de tip european

Valoarea unei opțiuni call la scadență este $C(S,T) = max(S - E,0)$ (conform relației (11)). Această relație reprezintă condiția finală, aplicată la momentul de timp $t = T$.

Pentru condiția la limită, în punctul $S = 0$, se pune problema determinării valorii unei opțiuni europene de tip call, în cazul în care activul suport ia, la un moment dat, valoarea zero. Din ecuația (1), se observă că variația valorii activului suport este zero. Rezultă că valoarea activului suport este întotdeauna zero, chiar şi la scadență şi, în consecință, valoarea opțiunii la scadență va fi tot zero. În mod firesc, valoarea opțiunii la momentul t va fi egală cu zero – valoarea actualizată a unei sume egală cu zero, la un moment dat, în viitor, este zero. Prin urmare, avem condiția la limită $C(0,t) = 0$.

Cealaltă condiție la limită se pune la ∞. Trebuie impusă explicit condiția ca S să tindă la infinit pe toată durata de exercițiu a opțiunii, deci să ia valori mari la toate momentele de timp t. În consecință, valoarea activului suport la scadență va fi mult mai mare decât valoarea de exercițiu E. Aşadar, valoarea opțiunii la scadență poate fi considerată ca fiind egală cu S. Actualizând, obținem valoarea opțiunii la momentul de timp curent $S(t) = Se^{-r(T-t)}$, valoare care poate fi aproximată cu S, datorită valorii foarte mari a lui S. Deci, avem condiția la limită $C(S,t) \approx S$, când $S \to \infty$.

Pe baza ecuației (10) şi a relațiilor găsite mai devreme, obținem problema de determinare a valorii unei opțiuni call de tip european, în condițiile în care rata dobânzii şi volatilitatea sunt constante în timp:

$$(\mathrm{P1})\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{C}}{\partial \mathrm{t}} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{S}^2 \dfrac{\partial^2 \mathrm{C}}{\partial \mathrm{S}^2} + \mathrm{rS}\dfrac{\partial \mathrm{C}}{\partial \mathrm{S}} - \mathrm{rC} = 0 \\ \mathrm{C}(\mathrm{S},\mathrm{T}) = \max(\mathrm{S}-\mathrm{E},0) \\ \mathrm{C}(0,\mathrm{t}) = 0 \\ \mathrm{C}(\mathrm{S},\mathrm{t}) \approx \mathrm{S},\ \textit{când}\, \mathrm{S} \to \infty \end{cases}$$

Propoziția 1. Dacă rata dobânzii şi volatilitatea sunt constante în timp, atunci soluția problemei (P1) este:

$$C(S,t) = S \cdot N(d_1) - Ee^{-r(T-t)} \cdot N(d_2) \tag{15}$$

unde $N(\cdot)$ este funcția cumulativă de probabilitate (funcția de repartiție) pentru o variabilă aleatoare normală din $N(0,1)$, anume $N(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$

iar

$$d_1 = \frac{ln\dfrac{S}{E} + \left(r + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad d_2 = \frac{ln\dfrac{S}{E} + \left(r - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

4.6. Evaluarea opțiunilor put de tip european

Ținând cont că, la exercițiu, valoarea unei opțiuni put este cunoscută, şi anume $P(S,T) = max(E - S,0)$ (în conformitate cu (12)), am obținut condiția finală, aplicată la momentul de timp $t = T$.

Ca şi în cazul opțiunilor call de tip european, se pune condiția la limită în punctul $S = 0$. Aşa cum am văzut, dacă, la un moment dat, valoarea activului suport este zero, atunci această valoare va rămâne zero până la scadență. Rezultă că valoarea opțiunii la scadență va fi egală cu E. Valoarea unei astfel de opțiuni la un moment t anterior lui T se determină prin actualizarea valorii E obținând $P(0,t) = Ee^{-r(T-t)}$ în cazul în care rata dobânzii este constantă în timp (conform (13)) sau $P(0,t) = Ee^{-\int_t^T r(s)ds}$ dacă rata dobânzii variază în timp (conform (14)).

Mai punem condiția la limită la ∞. Dacă valoarea activului suport creştere continuu mult, astfel încât această valoare poate fi considerată infinită pe un întreg interval de timp până la exercițiu, atunci valoarea opțiunii la exercițiu va fi egală cu zero. Dar valoarea actuală a unei opțiuni ce nu valorează nimic la scadență este zero, astfel încât obținem condiția la limită $P(S,t) \to 0$, când $S \to \infty$.

Putem scrie acum problema de determinare a valorii unei opțiuni put de tip european, în condițiile în care rata dobânzii și volatilitatea sunt constante în timp astfel:

$$(P2)\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\dfrac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \\ P(S,T) = \max(E - S, 0) \\ P(0,t) = Ee^{-r(T-t)} \,/\, Ee^{-\int_t^T r(s)ds} \\ P(S,t) \to 0, \text{ când } S \to \infty \end{cases}$$

Propoziția 2. Dacă rata dobânzii și volatilitatea sunt constante în timp, atunci soluția problemei (P2) este:

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1) \qquad (16)$$

unde $N(\cdot)$ este funcția cumulativă de probabilitate pentru o variabilă aleatoare de tipul $N(0,1)$, iar d_1 și d_2 sunt dați prin aceleași formule ca în Propoziția 1.

5. Concluzii

Pentru a determina valoarea unei opțiuni, folosim formula (15), dacă opțiunea este de tip call, și formula (16), dacă opțiunea este de tip put. Ambele formule exprimă valoarea opțiunii la un moment de timp, în funcție de valoarea activului suport la același moment de timp. În expresiile acestor formule, intervine funcția $N(\cdot)$, ale cărei valori sunt tabelate.

Determinarea valorii unei opțiuni se poate realiza și prin metode numerice. Aceste metode constau în înlocuirea derivatelor parțiale cu aproximații bazate pe diferențe finite. Pentru a determina valoarea unei opțiuni call, se rezolvă numeric problema (P1), iar pentru determinarea valorii unei opțiuni de tip put, - problema (P2). Se pot utiliza, în acest sens, metode explicite, dar mai ales metode implicite (Crank – Nicolson, extrapolarea Richardson etc.).

O altă modalitate de evaluare pleacă de la premisa că valoarea unei opțiuni este valoarea actuală a plății așteptate la scadență, pentru o evoluție aleatoare a valorii activului suport, dată de ecuația stocastică (1). Astfel, se calculează prețul la scadență pe baza simulării evoluției prețului activului cu ajutorul acestei ecuații. Se reia simularea de mai multe ori și se calculează plata medie pentru toate realizările. Valoarea opțiunii este valoarea actuală a mediei obținute.

Bibliografie

1. **ALEXANDER, C.O.:** The Handbook of Risk Management and Analysis, John Wiley, 1998.
2. **BULOW, J., J. ROBERTS:** The Simple Economics of optimal Auctions. În: Journal of Political Economy, vol. 97, 1989, pp 1060-1090.
3. **DEWYNNE, J.N., A.-E., WHALLEY, P. WILMOTT:** Mathematical Models and Partial Differential Equations in Finance, Quantitative Methods. În: Super Computers and AI in Finance, S. Zenios, 1995.
4. **HAUG, E.G.**: The Complete Guide to Option Pricing Formulas, McGraw-Hill, 1997.
5. **HILLIER, B., M.V. IBRAHIMO:** The Performance of Credit under Asymmetric Information about Project Means and Variances. În: Journal of Economic Studies, vol. 19, 1992, pp 3-17.
6. **TUDOR, C., B. IFTIMIE, M. TUDOR:** Elemente de teoria proceselor stocastice cu aplicații în finanțe, Tipografia ASE București, București, 1998.
7. **VICKREY, W.:** Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders. În: Journal of Finance, vol. 16, 1991, pp 8-37.
8. **WILMOTT, P.** Derivative. Inginerie financiară, Editura Economică, București, 2002.