

ANALIZELE TIMP-FRECVENȚĂ DIN CLASA COHEN

Cătălin Dumitrescu

Universitatea Politehnică București

Rezumat: În acest articol sunt abordate câteva elemente de analiză bidimensională a semnalelor, în scopul identificării parametrilor acestuia, utilizând reprezentările pătratice din clasa Cohen. Acestea permit analiza semnalelor, urmărind două grade de libertate (timpul și frecvența) în distribuirea energiei semnalului de-a lungul axelor timp și, respectiv, frecvență, conducând la unele concluzii privind structura instantanee a semnalului studiat. Mai întâi, sunt introduse transformările bidimensionale din clasa Cohen, evidențiindu-se unele proprietăți remarcabile, apoi o atenție specială este acordată transformatei Wigner-Ville și derivatelor sale, obținute prin filtrare și netezire. În final, sunt prezentate funcțiile nucleu, specifice transformatelor din clasa Cohen, ca de exemplu spectrograma.

Cuvinte cheie: clasa Cohen, analiza Wigner-Ville, spectrograma, funcția nucleu.

1. Introducere

Analiza semnalelor se poate face prin metode unidimensionale și bidimensionale. Metodele unidimensionale presupun analiza numai în domeniul timp sau numai în domeniul frecvență și au, în general, un grad scăzut de complexitate.

Deși au avantajul că oferă, în multe cazuri, o modalitate de primă evaluare și analiză rapidă a semnalelor, în multe situații, de exemplu, în cazul analizei semnalelor tranzitorii, informațiile care se obțin, privind forma și parametrii acestora, sunt limitate și cu un grad scăzut de aproximare.

Cea de-a doua categorie de metode, respectiv, reprezentările bidimensionale în domeniul timp-frecvență, reprezintă instrumente puternice de analiză a semnalelor și, de aceea, este indicat să fie utilizate, dacă situația o permite, la prelucrarea semnalelor în scopul identificării undelor tranzitorii. Aceste reprezentări au avantajul că permit evidențierea anumitor proprietăți „ascunse” ale semnalelor. Din punct de vedere al sistemelor de analiză, prezintă interes analiza semnalelor la nivel cât mai scăzut, comparabil cu zgomotul aparatului. De aceea, analizele timp-frecvență trebuie efectuate asupra semnalelor afectate de zgomot, raportul semnal/zgomot având o importanță deosebită în evaluarea semnalelor tranzitorii.

Întrebarea „Cum arată o reprezentare timp-frecvență bună?” nu are un răspuns general, depinzând de aplicație, fiind binecunoscut faptul că nu există o reprezentare „universală”, optimă pentru toate situațiile. Mai mult, în situații reale, când categoriile de semnale nu sunt cunoscute apriori și sunt specificate doar printr-un eșantion aleator de realizări, este necesară implementarea unui algoritm care să poată găsi reprezentarea timp-frecvență optimă în mod automat. Eforturile de cercetare sunt îndreptate, în prezent, în direcția rezolvării problemei determinării reprezentării timp-frecvență optime pentru o categorie dată de semnale.

Considerațiile din prezentul material încearcă să clarifice unele aspecte ale acestei problematici, de altfel extrem de vastă.

2. Reprezentările timp-frecvență din clasa Cohen

2.1 Proprietățile distribuțiilor energetice din clasa Cohen

Clasa reprezentărilor timp-frecvență, în formă generală a fost descrisă de Cohen:

$$C(t, \omega, \Phi) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \iint \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j \cdot (\xi \cdot t - \tau \cdot \omega - \xi \cdot u)] \cdot \Phi(\xi, \tau) \cdot f\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \cdot f^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) dud\tau d\xi \quad (2.1)$$

unde Φ este o funcție arbitrară numită funcție nucleu. După modul de alegere a acestei funcții, se obțin mai multe cazuri particulare, corespunzătoare anumitor distribuții (t, ω).

Reprezentările timp-frecvență din clasa lui Cohen trebuie să îndeplinească anumite proprietăți. Satisfacerea acestor proprietăți se materializează prin impunerea anumitor condiții funcției nucleu. Primele două proprietăți privesc decalajul temporal și de frecvență (compatibilitatea cu operațiile de filtrare și modulare) după cum urmează:

$$P_1: C_{f_{t_0}}(t, \omega, \Phi) = C_f(t - t_0, \omega, \Phi) \quad (2.2)$$

$$P_2: C_{M_{\omega_0}}(t, \omega, \Phi) = C_f(t, \omega - \omega_0, \Phi) \quad (2.3)$$

Pentru ca aceste condiții să fie îndeplinite, se poate vedea că funcția nucleu Φ trebuie să fie independentă de t și de ω :

$$C_1: \Phi(\xi, \tau, t, \omega) \text{ trebuie să fie independentă de } t, \quad (2.4)$$

$$C_2: \Phi(\xi, \tau, t, \omega) \text{ trebuie să fie independentă de } \omega. \quad (2.5)$$

Alte două proprietăți care trebuie să caracterizeze reprezentările timp-frecvență se referă la conservarea legilor marginale:

$$P_3: \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_f(t, \omega, \Phi) d\omega = |f(t)|^2 \quad (2.6)$$

$$P_4: \int_{-\infty}^{\infty} C_f(t, \omega, \Phi) dt = |F(\omega)|^2 \quad (2.7)$$

Restricțiile corespunzătoare acestor proprietăți pe care trebuie să le îndeplinească funcția Φ sunt:

$$C_3: \Phi(\xi, \tau) = 1, \quad \forall \xi; \quad (2.8)$$

$$C_4: \Phi(0, \tau) = 1, \quad \forall \tau. \quad (2.9)$$

Funcția Φ trebuie să ia deci următoarea formă:

$$\Phi_\alpha(\xi, \tau) = \exp(j \cdot \alpha \cdot \xi \cdot \tau) \quad (2.10)$$

Pentru ca reprezentările timp-frecvență să fie reale, atunci trebuie ca:

$$P_5: C_f(t, \omega, \Phi) = C_f^*(t, \omega, \Phi) \quad (2.11)$$

Acest lucru se întâmplă doar dacă:

$$C_5: \Phi(\xi, \tau) = \Phi(-\xi, -\tau) \quad (2.12)$$

Alte două proprietăți importante pentru analiza semnalelor sunt:

- Frecvența medie la momentul t este egală cu frecvența instantanee:

$$P_6: \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega \cdot C_f(t, \omega, \Phi) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} C_f(t, \omega, \Phi) d\omega} = \Omega_f(t) = \text{Im} \left\{ \frac{d}{dt} \ln[f(t)] \right\} \quad (2.13)$$

- Media temporală pentru frecvența ω este egală cu timpul de întârziere:

$$P_7: \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot C_f(t, \omega, \Phi) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} C_f(t, \omega, \Phi) dt} = T_f(\omega) = -\text{Im} \left\{ \frac{d}{d\omega} \ln[F(\omega)] \right\} \quad (2.14)$$

Verificarea acestor proprietăți impune:

$$C_6: \begin{cases} \Phi(\xi, 0) = 1 \quad \forall \xi \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\xi, \tau)_{\tau=0} = 0 \quad \forall \xi \end{cases} \quad (2.15)$$

$$C_7: \begin{cases} \Phi(0, \tau) = 1 \quad \forall \tau \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\xi, \tau)_{\xi=0} = 0 \quad \forall \tau \end{cases} \quad (2.16)$$

Primele relații corespunzătoare lui C_6 și C_7 sunt identice cu condițiile C_3 și C_4 .

Următoarele proprietăți pe care dorim să le dețină reprezentările timp-frecvență sunt conservarea suportului temporal, respectiv, de frecvență:

$$P_8: f(t) = 0, \quad \forall |t| > T \Rightarrow C_f(t, \omega, \Phi) = 0, \quad \forall |t| > T \quad (2.17)$$

$$P_9: F(\omega) = 0, \quad \forall |\omega| > \Omega \Rightarrow C_f(t, \omega, \Phi) = 0, \quad \forall |\omega| > \Omega \quad (2.18)$$

P_8 implică:

$$C_8: \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j \cdot \xi \cdot t) \cdot \Phi(\xi, \tau) d\xi = 0, \quad |\tau| < 2 \cdot |t| \quad (2.19)$$

P_9 implică:

$$C_9: \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j \cdot \xi \cdot t) \cdot \Phi(\xi, \tau) d\tau = 0, \quad |\xi| < 2 \cdot |\omega| \quad (2.20)$$

Deci, trebuie ca $\Phi_\alpha(\xi, t)$ să fie definită pentru $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

De asemenea, ar fi de dorit să se verifice și proprietatea de valoare pozitivă a reprezentărilor timp-frecvență pentru a le putea interpreta ca fiind distribuții energetice. Din păcate, această proprietate este incompatibilă cu proprietățile P_7 și P_8 .

Pentru a ne convinge, este suficient să considerăm un semnal temporal cauzal. P_8 ne asigură că reprezentarea timp-frecvență va fi nulă pentru momentele de timp negative. Presupunând că RTF (a fost studiată într-o primă fază de Ville, care căuta o funcție RTF_x care să depindă de timp și de frecvență și să verifice constrângerile de distribuție marginală [Vil48]) nu este negativă, acest lucru implică faptul că întârzierea de grup trebuie să fie totdeauna pozitivă (P_7). Aceasta este în contradicție cu faptul că semnalele cauzale pot avea întârzieri de grup negative pentru anumite frecvențe. Aceeași constatare poate fi făcută în privința incompatibilității proprietăților P_6 și P_9 pentru semnale analitice.

Totuși se preferă a se favoriza proprietățile P_1, \dots, P_9 în detrimentul valorii pozitive.

Formularea unificată care desemnează clasa bilinară Cohen prezintă trei avantaje principale:

- Prin specificarea funcției nucleu arbitrare, este posibilă regăsirea celor mai multe din definițiile distribuțiilor energetice cunoscute;
- Este ușoară transpunerea unei condiții care se vrea a fi îndeplinită de către RTF într-o proprietate de admisibilitate corespunzătoare a funcției nucleu;
- Este posibil, utilizând astfel de argumente de admisibilitate să se verifice apriori proprietățile unei definiții particulare.

2.2 Legătura cu funcția de ambiguitate

Expresia generală a distribuțiilor energetice din clasa lui Cohen se poate rescrie pentru a evidenția relația acestora cu funcția de ambiguitate a semnalului:

$$\begin{aligned} C(t, \omega, \Phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j(\xi t - \tau \omega)] \Phi(\xi, \tau) \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \exp(-j\xi u) du d\tau d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\xi t - \tau \omega)] A_x(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (2.21)$$

unde:

$$A_x(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \cdot f^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \cdot \exp(j \cdot \xi \cdot u) du$$

este funcția de ambiguitate, asociată semnalului $f(t)$, cu aproximarea la nivelul unei constante complexe [Ami95].

Prin urmare:

$$2\pi C(t, \omega, \Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\xi \cdot t + \tau \cdot \omega)] \Phi(-\xi, \tau) A_x(\xi, \tau) d\xi d\tau \Rightarrow \quad (2.22)$$

$$\Rightarrow \Phi(-\xi, \tau) A_x(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(t, \omega, \Phi) \cdot \exp[j(\xi \cdot t + \tau \cdot \omega)] dt d\omega$$

Astfel spus:

$$\Phi(-\xi, \tau) \cdot A_x(\xi, \tau) \stackrel{TF^{(2)}}{\rightarrow} 2 \cdot \pi \cdot C(t, \omega, \Phi) \quad (2.23)$$

$$\Phi(-\xi, \tau) \cdot A_x(\xi, \tau) \stackrel{[TF^{(2)}]^{-1}}{\leftarrow} 2 \cdot \pi \cdot C(t, \omega, \Phi)$$

Cele mai reprezentative distribuții timp-frecvență din clasa Cohen sunt reprezentate în tabelul 2.1. În tabelul 2.2 sunt, de asemenea, precizate cele mai importante proprietăți pe care acestea ar trebui să le îndeplinească în mod ideal, împreună cu constrângerile care rezultă pentru funcțiile nucleu asociate.

În sfârșit, tabelul 2.3 prezintă comparativ proprietățile verificate de câteva reprezentări timp-frecvență din clasa lui Cohen. Este ușor de remarcat că transformata Wigner-Ville îndeplinește cel mai mare număr de proprietăți, ceea ce justifică atenția specială care îi va fi acordată în continuare [Aug95].

Tabelul 2.1. Reprezentări timp-frecvență din clasa Cohen și funcțiile nucleu asociate

$\Phi(\xi, \tau)$	$C_x(t, \nu, \Phi)$	Distribuția
1	$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau$	Wigner-Ville
$\frac{\sin(\pi\xi\tau)}{\pi\xi\tau}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{ r } \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} f\left(s + \frac{\tau}{2}\right) \cdot f^*\left(s - \frac{\tau}{2}\right) ds \right] \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot \nu \cdot \tau} d\tau$	Born-Jordan
$e^{-\frac{(\pi\xi\tau)^2}{2}}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{ r } \cdot e^{-2\sigma^2(s-t)^2 \cdot \tau^2} \cdot f\left(s + \frac{\tau}{2}\right) \cdot f^*\left(s - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi\nu\tau} ds d\tau$	Choi-Williams
$A_h^*(\xi, \tau)$	$\left \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot h^*(s-t) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot \nu \cdot s} ds \right ^2$	Spectrograma

Tabelul 2.2. Proprietățile impuse reprezentărilor timp-frecvență și condițiile de admisibilitate asociate funcțiilor nucleu

Proprietatea	Condiția de admisibilitate
Energie	$\Phi(0,0) = 1$
Limitare în timp	$\Phi(\xi,0) = 1$
Limitare în frecvență	$\Phi(0,\tau) = 1$
Caracter real	$\Phi(\xi,\tau) = \Phi^*(-\xi,-\tau)$
Valoare pozitivă	$\Phi(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot A_{h_k}^*(\xi,\tau), c_k > 0$
Cauzalitate	$\Phi(\xi,\tau) = \frac{i}{\pi} \cdot \nu p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\eta,\tau)}{\xi - \tau} \cdot e^{i \cdot \pi \cdot \eta \cdot \tau } d\eta$
Inversabilitate	$\Phi(\xi,\tau) \neq 0$
Dilatare	$\Phi(\xi,\tau) = \Phi\left(\frac{\xi}{k}, k \cdot \tau\right)$
Filtrare	$\Phi(\xi,\tau) \cdot \Phi(\xi,\tau') = \Phi(\xi,\tau + \tau')$
Modulare	$\Phi(\xi,\tau) \cdot \Phi(\xi',\tau) = \Phi(\xi + \xi',\tau)$
Conservarea suportului temporal	$ s > \frac{ \tau }{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi,\tau) \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot \xi \cdot s} d\xi = 0$
Conservarea suportului de frecvență	$ \nu > \frac{ \xi }{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(-\xi,\tau) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot \nu \cdot \tau} d\tau = 0$
Valoare unitate	$ \Phi(\xi,\tau) = 1$
Frecvență instantanee	$\Phi(\xi,0) = 1, \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(\xi,0) = 0$
Întârziere de grup	$\Phi(0,\tau) = 1, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(0,\tau) = 0$

Tabelul 2.3. Proprietăți verificate de câteva reprezentări timp-frecvență din clasa Cohen

Proprietatea	Spectrograma	Wigner-Ville	Born-Jordan	Choi-Williams
Energie	√	√	√	√
Limitate în timp	-	√	√	√
Limitare în frecvență	-	-	-	-
Realitate	√	√	√	√
Valoare pozitivă	√	-	-	-
Cauzalitate	-	-	-	-
Inversabilitate	-	√	-	√
Dilatare	-	√	√	√
Filtrare	-	√	-	-
Modulare	√	√	-	-
Suport temporal	-	√	√	-
Suport în frecvență	-	√	√	-
Valoare unitate	-	√	-	-
Frecvența instantanee	-	√	√	√
Întârziere de grup	-	√	√	√

2.3 Distribuția Wigner-Ville

Interdistribuția Wigner-Ville a două semnale este definită prin [Aug91]:

$$W_{f,g}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot g^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.24)$$

Autodistribuția Wigner-Ville unui semnal este dată de:

$$W_f(t, \omega) = W_{f,f}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.25)$$

Distribuția Wigner-Ville poate fi văzută ca o transformare Fourier scurtă în care fereastra se adaptează continuu cu semnalul deoarece această fereastră nu este altceva decât semnalul însuși, inversat în timp. Transformarea Wigner-Ville se obține, deci, ca rezultat al următoarelor operații:

a) în orice moment t , se multiplică semnalul cu conjugata „*imaginii în oglindă*”, relativ la momentul de evaluare:

$$q_x(t, \tau) = f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (2.26)$$

b) se calculează transformata Fourier pentru rezultatul acestei înmulțiri, în raport cu variabila de decalaj τ .

Una din proprietățile acestei reprezentări timp-frecvență este aceea că poate fi, de asemenea, definită plecând de la funcțiile spectrale:

$$W_{F,G}(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\omega + \frac{\xi}{2}\right) \cdot F^*\left(\omega - \frac{\xi}{2}\right) \cdot e^{j\xi t} d\xi \quad (2.27)$$

Se obține deci:

$$W_{F,G}(\omega, t) = W_{f,g}(t, \omega). \quad (2.28)$$

2.3.1 Proprietățile distribuției Wigner-Ville

Cele mai importante proprietăți ale acestei distribuții sunt următoarele:

a) Pentru două funcții f și g avem:

$$W_{f,g}(t, \omega) = W_{g,f}^*(t, \omega). \quad (2.29)$$

Deci, distribuția Wigner-Ville a unei funcții reale sau complexe va fi reală:

$$W_f(t, \omega) = W_f^*(t, \omega). \quad (2.30)$$

În plus, distribuția Wigner-Ville a unei funcții reale va fi pară în domeniul frecvență:

$$W_f(t, \omega) = W_f^*(t, -\omega). \quad (2.31)$$

b) Un decalaj temporal între două semnale îi corespunde un decalaj temporal între transformările Wigner-Ville corespunzătoare:

$$\begin{cases} f_1(t) = f(t - \tau) \\ g_1(t) = g(t - \tau) \end{cases} \Rightarrow W_{f_1, g_1}(t, \omega) = W_{f, g}(t - \tau, \omega) \quad (2.32)$$

c) Modularea fiecăreia dintre cele două semnale conduce la deplasarea în frecvență a transformărilor Wigner-Ville:

$$\begin{cases} f_2(t) = e^{j\Omega t} f(t) \\ g_2(t) = e^{j\Omega t} g(t) \end{cases} \Rightarrow W_{f_2, g_2}(t, \omega) = W_{f, g}(t, \omega - \Omega) \quad (2.33)$$

d) Combinarea proprietăților b) și c) conduce la:

$$\begin{cases} f_3(t) = e^{j\Omega t} f(t - \tau) \\ g_3(t) = e^{j\Omega t} g(t - \tau) \end{cases} \Rightarrow W_{f_3, g_3}(t, \omega) = W_{f, g}(t - \tau, \omega - \Omega), \quad (2.34)$$

e) Distribuția Wigner-Ville a două semnale este o funcție biliniară de f și g . Aceasta semnifică faptul că transformata unei sume de două semnale nu este egală cu suma transformatelor semnalelor. Din definiție reiese că:

$$W_{f_1+f_2, g_1+g_2}(t, \omega) = W_{f, g_1}(t, \omega) + W_{f_1, g_2}(t, \omega) + W_{f_2, g_1}(t, \omega) + W_{f_2, g_2}(t, \omega) \quad (2.35)$$

Caz particular:

$$W_{f+g}(t, \omega) = W_f(t, \omega) + W_g(t, \omega) + 2 \operatorname{Re}[W_{f, g}(t, \omega)] \quad (2.36)$$

f) Înmulțirea distribuției Wigner-Ville cu t poate fi exprimată ca o sumă de două distribuții:

$$2 \cdot t \cdot W_{f, g}(t, \omega) = W_{t, f, g}(t, \omega) + W_{f, t, g}(t, \omega) \quad (2.37)$$

De aceeași manieră avem:

$$2 \cdot \omega \cdot W_{f, g}(t, \omega) = W_{\frac{1}{j} f'(t), g}(t, \omega) + W_{f, \frac{1}{j} g'(t)}(t, \omega) \quad (2.38)$$

g) Conform definiției, distribuția Wigner-Ville este transformata Fourier a funcției

$f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot g^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ considerată ca funcție de τ și unde t reprezintă un parametru fix. În consecință:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} W_{f, g}(t, \omega) d\omega = f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot g^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (2.39)$$

relație care poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t_1 - t_2)} W_{f, g}\left(\frac{t_1 + t_2}{2}, \omega\right) d\omega = f(t_1) \cdot g^*(t_2) \quad (2.40)$$

Sunt de remarcat următoarele două cazuri particulare:

- $t_1 = t_2 = t$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{f, g}(t, \omega) d\omega = f(t) \cdot g^*(t) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{f, g}(t, \omega) d\omega = |f(t)|^2 \quad (2.41)$$

Aceasta demonstrează că integrarea distribuției Wigner-Ville în raport cu variabila frecvență unghiulară și cu t fixat furnizează puterea instantanee a semnalului la momentul t .

- $t_1 = t, t_2 = 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} W_{f, g}\left(\frac{t}{2}, \omega\right) d\omega = f(t) \cdot g^*(0). \quad (2.42)$$

Această relație este importantă fiindcă arată posibilitatea reconstrucției semnalului $f(t)$ plecând de la distribuția Wigner-Ville la momentul $\frac{t}{2}$ folosind transformata Fourier inversă.

h) Integrala distribuției Wigner-Ville este egală cu energia temporală a semnalului $f(t)$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{f, g}(t, \omega) dt d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g^*(t) dt \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(t, \omega) dt d\omega = |f(t)|^2 \quad (2.43)$$

i) La fel ca și în cazul proprietății g), se demonstrează că:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\xi t} W_{f,g}(\omega, t) dt = F\left(\omega + \frac{\xi}{2}\right) \cdot G^*\left(\omega - \frac{\xi}{2}\right) \quad (2.44)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_1 - \omega_2)t} W_{f,g}\left(t, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) dt = F(\omega_1) \cdot G^*(\omega_2) \quad (2.45)$$

Se obține deci că integrarea distribuției Wigner-Ville în raport cu variabila temporală pentru o frecvență ω conduce la densitatea spectrală de putere a semnalului f la acea frecvență:

- $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{f,g}(t, \omega) dt = F(\omega) \cdot G^*(\omega) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} W_f(t, \omega) dt = |F(\omega)|^2 \quad (2.46)$$

- $\omega_1 = \omega, \omega_2 = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} W_{f,g}\left(t, \frac{\omega}{2}\right) dt = F(\omega) \cdot G^*(0) \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_a - \infty}^{\omega_b} \int_{\omega_a - \infty}^{\infty} [W_f(t, \omega) dt] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_a}^{\omega_b} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (2.48)$$

j) Formula lui Moyal (relație corespunzătoare formulei lui Parseval aplicată distribuției Wigner-Ville) [Qia96]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{f_1, g_1}(t, \omega) \cdot W_{f_2, g_2}^*(t, \omega) = \langle f_1, f_2 \rangle \cdot \langle g_1, g_2 \rangle^* \quad (2.49)$$

Pentru $f_1 = f_2 = g_1 = g_2 = f$ se obține:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f^2(t, \omega) dt d\omega = |f(t)|^4 \quad (2.50)$$

k) Cazul semnalelor limitate în timp sau în frecvență

$$f(t) = g(t) = 0, \forall t < t_a \text{ sau } t > t_b \Rightarrow W_{f,g}(t, \omega) = 0, \forall t < t_a \text{ sau } t > t_b$$

$$F(\omega) = G(\omega) = 0, \forall \omega < \omega_a \text{ sau } \omega > \omega_b \Rightarrow W_{f,g}(t, \omega) = 0, \forall \omega < \omega_a \text{ sau } \omega > \omega_b.$$

Prin urmare suportul temporal și de frecvență sunt conservate. Această proprietate este o noutate în raport cu toate reprezentările timp-frecvență care în mod obișnuit iau valori într-un interval mult mai larg.

l) cauzalitate:

$$f(t) = 0, \forall t < 0 \Rightarrow W_f(t, \omega) = 0, \forall t < 0, \forall \omega.$$

m) semnale analitice:

$$F(\omega) = 0, \forall \omega < 0 \Rightarrow W_f(t, \omega) = 0, \forall \omega < 0, \forall t.$$

2.3.2 Efectele operatorilor liniari asupra distribuției Wigner-Ville

Cei mai importanți operatori liniari sunt filtrarea și modularea. Filtrarea corespunde unei convoluții temporale, în timp ce modularea este asociată unei multiplicări. Datorită dualității timp-frecvență, consecințele aplicării celor doi operatori sunt inversate în domeniul spectral [Ami96].

a) Filtrarea liniară

Fie h_f și h_g doi operatori liniari care aplicații semnalelor f și g conduc la obținerea semnalelor f_c și g_c .

$$f_c(t) = (f * h_f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h_f(t - \tau) d\tau \quad (2.51)$$

$$g_c(t) = (g * h_g)(t) \quad (2.52)$$

În acest caz:

$$W_{f_c, g_c}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{f, g}(t, \omega) \cdot W_{h_f, h_g}(t - \tau, \omega) d\tau, \quad (2.53)$$

$W_{f_c, g_c}(t, \omega)$ este convoluția temporală dintre $W_{f, g}$ și W_{h_f, h_g} .

b) Modularea

$$f_m(t) = f(t) \cdot m_f(t) \quad (2.54)$$

$$g_m(t) = g(t) \cdot m_g(t)$$

$$W_{f_m, g_m}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{f, g}(t, \eta) \cdot W_{m_f, m_g}(t, \omega - \eta) d\eta, \quad (2.55)$$

unde $W_{f_m, g_m}(t, \omega)$ este convoluția în frecvență dintre $W_{f, g}$ și W_{m_f, m_g} .

2.3.3 Distribuția pseudo Wigner-Ville

În încercarea implementării numerice a algoritmilor distribuției Wigner-Ville, trebuie, în general, să se pondereze semnalele $f(t)$ și $g(t)$ cu ajutorul ferestrelor w_f și w_g . Aceste funcții de pondere glisează în lungul axei temporale și se centrează pe momentele de timp t în care distribuția Wigner-Ville urmează a fi calculată. Aceasta înseamnă că, în locul semnalelor $f(\tau)$ și $g(\tau)$, vor fi considerate semnalele f_t și g_t definite astfel:

$$f_t(\tau) = f(\tau) \cdot w_f(\tau - t) \quad (2.56)$$

$$g_t(\tau) = g(\tau) \cdot w_g(\tau - t)$$

Pentru fiecare valoare a lui t , se va calcula distribuția Wigner-Ville a funcțiilor semnalelor $f_t(\tau)$ și $g_t(\tau)$.

Relația de legătură dintre $W_{f, g}$ și W_{f_t, g_t} este:

$$W_{f_t, g_t}(\tau, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{f, g}(t, \eta) \cdot W_{w_f, w_g}(0, \omega - \eta) d\eta. \quad (2.57)$$

Considerând această expresie pentru diferite valori a lui t , se obține:

$$\tilde{W}_{f, g}(t, \omega) = W_{f_t, g_t}(\tau, \omega)_{\tau=t}, \quad (2.58)$$

care este o funcție de t și ω și care se aseamănă cu o distribuție Wigner-Ville. Aceasta va fi denumită distribuția pseudo Wigner-Ville a semnalelor f și g .

În mod evident, distribuția pseudo Wigner-Ville depinde de ferestrele w_f și w_g chiar dacă acest lucru nu apare în mod explicit în notație. $\tilde{W}_{f, g}$ este egală cu convoluția dintre $W_{f, g}$ și o funcție independentă de timp.

Considerând distribuția Wigner-Ville ca o funcție de ω (cu t fixat), se poate demonstra că aplicarea unor ferestre temporale asupra ei poate fi interpretată ca o operație de filtrare a acestei funcții cu un filtru $W_{w_f, w_g}(0, \omega)$ (rolul variabilei t este jucat de ω).

Dacă $w_f = w_g$ este o funcție reală pară, atunci funcția pondere a filtrului rezultă sub forma următoare:

$$W_{w_f}(0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \cdot w_f^2\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau. \quad (2.59)$$

Se observă că funcția de transfer a acestui filtru are forma pătratului ferestrei și ca urmare va fi de tip trece-jos.

Distribuția pseudo Wigner-Ville este o versiune netezită (în raport cu frecvența) a distribuției Wigner-Ville. De exemplu, o fereastră dreptunghiulară de lungime T va juca rolul unui filtru trece-jos care va atenua toate variațiile distribuției Wigner-Ville în zona ω , $t < \frac{T}{2}$.

În cazul distribuției Wigner-Ville, funcția nucleu $\Phi(\xi, \tau) = 1$ și conform relației (2.23) avem:

$$A_x(\xi, \tau) \xrightarrow{TF^{(2)}} 2 \cdot \pi \cdot W_x(t, \omega) \quad (2.60)$$

$$A_x(\xi, \tau) \xleftarrow{[TF^{(2)}]^{-1}} 2 \cdot \pi \cdot W_x(t, \omega)$$

În consecință, distribuția Wigner-Ville este egală cu o transformată Fourier dublă, aplicată funcției de ambiguitate, iar funcția de incertitudine este egală cu o dublă transformată Fourier inversă, aplicată distribuției Wigner-Ville.

2.3.4 Distribuția pseudo Wigner-Ville netezită

Dacă:

$$x(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cdot x_n(t). \quad (2.61)$$

atunci:

$$W_x(t, \omega) = \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \cdot W_{x_n}(t, \omega) + 2 \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{k=n+1}^N \text{Re}\{a_n \cdot a_k \cdot W_{x_n \cdot x_k}(t, \omega)\} \quad (2.62)$$

Există deci $\frac{N(N-1)}{2}$ termeni de interferență. Ei sunt prețul pe care această distribuție trebuie să-l plătească în schimbul tuturor proprietăților valoroase de care dispune. Consecințele existenței acestor termeni de interferență sunt [Bar93]:

- imprecizia interpretării rezultatelor analizei Wigner-Ville asupra unui semnal;
- scăderea importanței acestui tip de distribuție timp-frecvență.

Fie:

$$x_+(t) = a_+ \cdot x_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{j \cdot 2\pi \frac{\nu}{2} t} \cdot e^{j \cdot \varphi_+}, a_+ \geq 0, \quad (2.63)$$

$$x_-(t) = a_- \cdot x_0\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{j \cdot 2\pi \left(-\frac{\nu}{2}\right) t} \cdot e^{j \cdot \varphi_-}, a_- \geq 0, \quad (2.64)$$

atunci:

$$W_{x_+}(t, \nu) = a_+^2 \cdot W_{x_0}\left(t - \frac{\Delta t}{2}, \nu - \frac{\Delta \nu}{2}\right); \quad (2.65)$$

$$W_{x_-}(t, \nu) = a_-^2 \cdot W_{x_0}\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \nu + \frac{\Delta \nu}{2}\right). \quad (2.66)$$

Fie:

$$x(t) = x_+(t) + x_-(t), \quad (2.67)$$

atunci:

$$W_x(t, \nu) = W_{x_+}(t, \nu) + W_{x_-}(t, \nu) + 2 \cdot \text{Re}\{W_{x_+ x_-}(t, \nu)\} \quad (2.68)$$

Se poate demonstra că următoarea relație este adevărată:

$$W_x(t, \nu) = W_{x_+}(t, \nu) + W_{x_-}(t, \nu) + 2a_+ \cdot a_-^* \cdot W_{x_0}(t, \nu) \cdot \cos[2\pi(t\Delta\nu + \nu\Delta t) + (\varphi_+ - \varphi_-)] \quad (2.69)$$

adică, termenul de interferență este o versiune modulată a distribuției Wigner-Ville a semnalului.

Biliniaritatea transformării conduce la existența termenilor de interferență între toate componentele planului (t, w) și, în particular, între frecvențele pozitive și negative ale spectrului unui semnal real. Astfel, termenii de interferență pot fi suprimați dacă distribuția Wigner-Ville a unui semnal real este construită sistematic în raport cu semnalul analitic care îi este asociat. Pe lângă avantajul clarificării reprezentării, aceasta permite definirea în mod unic a noțiunilor de frecvență și amplitudine instantanee. Totuși, această operație nu împiedică în totalitate apariția termenilor de interferență între componente diferite de-a lungul axei frecvențelor pozitive.

Studii detaliate, au demonstrat că astfel de termeni posedă o structură preponderent oscilatorie, invers decât componentele proprii semnalului care au o structură mult mai regulată. Aceasta sugerează reducerea influenței termenilor de interferență printr-un procedeu adecvat de netezire care conduce la o reprezentare Wigner-Ville modificată:

$$C_x(t, \nu, F) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t', \nu') \cdot F(t-t', \nu-\nu') dt' d\nu', \quad (2.70)$$

unde F este o funcție de netezire normalizată, adică:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t, \nu) dt d\nu = 1 \quad (2.71)$$

Reprezentarea astfel construită, definește clasa generală a reprezentărilor biliniare admisibile, care se supun condiției de invarianță la translatările în planul (t, w) . Alegerea unei ponderi determină deci în mod esențial metoda de analiză cunoscută sub numele de aproximarea netezită a distribuției Wigner-Ville inițiale [Qia96].

Astfel, metodele de tip spectrogramă, pentru care $F(t, \nu) = W_h(t, \nu)$, unde $h(t)$ este fereastra de observare temporală, sunt fundamental limitate de necesitatea unui compromis între rezoluțiile temporale și de frecvență: ameliorarea rezoluției în frecvență nu se poate face decât cu prețul mării duratei de observație și vice-versa.

S-a demonstrat că, pentru semnalul $h(t)$ de energie unitară și de durată T , inegalitatea Heisenberg-Gabor se scrie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(t-t_0)^2}{T^2} + T^2 \cdot (\nu-\nu_0)^2 \right] \cdot W_h(t, \nu) dt d\nu \geq \frac{1}{2\pi} \quad (2.72)$$

unde t_0 și ν_0 sunt momentele de timp și frecvență medii ale semnalului $h(t)$.

Rezoluțiile temporale și de frecvență sunt astfel legate, ceea ce înseamnă că analiza clasică poate fi considerată drept o metodă cu un grad de libertate. O soluție firească, pentru ameliorarea acestei situații, este de a se trece la o analiză cu două grade de libertate, alegând pentru realizarea netezirii o funcție separabilă în raport cu cele două variabile ale sale:

$$F_p(t, \nu) = g(t) \cdot Q(\nu) \quad (2.73)$$

O astfel de procedură definește distribuția Wigner-Ville netezită:

$$PW_x(t, \nu) = C_x(t, \nu, F_p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j \cdot 2\pi \cdot \nu \cdot \tau} q(\tau) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\nu-t) \cdot x\left(\nu + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x^*\left(\nu - \frac{\tau}{2}\right) d\nu \right] d\tau \quad (2.74)$$

unde:

$$q(\tau) = TF^{-1}\{Q(\nu)\}. \quad (2.75)$$

Structura unei astfel de transformări ia forma unei simple corelații ponderate și centrate, urmată de o transformată Fourier, ea însăși ponderată.

2.3.5 Distribuția Wigner-Ville pentru semnale discrete

Fie $f(n)$, $f \in C$, $n \in N$, un semnal discret. Atunci transformata sa Fourier se definește sub forma:

$$F(\theta) = (F_d f)(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \theta} \quad (2.76)$$

Transformata Fourier inversă este dată de:

$$f(n) = (F_d^{-1} F)(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) \cdot e^{j \cdot n \cdot \theta} d\theta \quad (2.77)$$

Produsul scalar poate fi de asemenea exprimat ca fiind:

$$\langle f, g \rangle = \sum_n f(n) \cdot g^*(n) \quad (2.78)$$

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) \cdot G^*(\theta) d\theta. \quad (2.79)$$

Pentru dezvoltările ulterioare este util să considerăm următorii operatori în timp discret:

a) Translația în timp:

$$(S_k f)(n) = f(n - k), k \in Z \quad (2.80)$$

Translația în frecvență:

$$(S_{\xi} F)(\theta) = F(\theta - \xi), \xi \in R \quad (2.81)$$

b) Modulația:

$$(M_{\xi} f)(n) = f(n) \cdot e^{j \cdot \xi \cdot n}, \xi \in R \quad (2.82)$$

c) Multiplicarea cu n:

$$(Qf)(n) = n \cdot f(n) \quad (2.83)$$

d) Inversarea în timp:

$$(Rf)(n) = f(-n) \quad (2.84)$$

Interdistribuția Wigner-Ville a două semnale discrete $f(n)$ și $g(n)$ este definită prin:

$$W_{f,g}(n, \theta) = 2 \sum_k e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \theta} \cdot f(n + k) \cdot g^*(n - k) \quad (2.85)$$

Relația următoare definește distribuția Wigner-Ville în timp discret în situația când $f(n) = g(n)$:

$$W_{f,g}(n, \theta) = 2 \sum_k f(n + k) \cdot f^*(n - k) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \theta} \quad (2.86)$$

Aceasta poate fi, de asemenea, definită plecând de la informațiile spectrale:

$$W_{F,G}(\theta, n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j \cdot 2 \cdot n \cdot \xi} \cdot F(\theta + \xi) \cdot G^*(\theta - \xi) d\xi \quad (2.87)$$

unde:

$$W_{F,G}(\theta, n) = W_{f,g}(n, \theta). \quad (2.88)$$

Distribuția Wigner-Ville a semnalelor discrete este o funcție de o variabilă discretă n și de o variabilă continuă θ . În raport cu θ , aceasta este periodică cu perioada π .

$$W_{f,g}(n, \theta) = W_{f,g}(n, \theta + \pi), \forall n, \theta. \quad (2.89)$$

Cele mai importante proprietăți ale acesteia sunt enumerate, pe scurt, mai jos:

a) Simetria

$$W_{f,g}(n, \theta) = W_{f,g}^*(n, \theta) \Rightarrow W_f(n, \theta) = W_f^*(n, \theta) \text{ este reală} \quad (2.90)$$

$$W_f(n, \theta) = W_{f^*}(n, -\theta); \quad (2.91)$$

b) Translatarea în timp

$$g_1(n) = (S_k g)(n) = g(n - k) \quad (2.92)$$

$$f_1(n) = (S_k f)(n) = f(n - k) \quad (2.93)$$

$$W_{f_1, g_1}(n, \theta) = W_{f, g}(n - k, \theta); \quad (2.94)$$

c) Modularea

$$W_{M_\xi f, M_\xi g}(n, \theta) = W_{f, g}(n, \theta - \xi); \quad (2.95)$$

d) Produsul scalar

$$W_{f, g}(0, 0) = 2 \cdot \langle f, Rg \rangle; \quad (2.96)$$

unde:

$$W_{f, g}(n, \theta) = 2 \cdot \langle S_{-n} M_{-\theta} f, RS_{-n} M_{-\theta} g \rangle; \quad (2.97)$$

e) Interdistribuția Wigner-Ville în timp discret a unor sume de semnale:

$$W_{f_1 + f_2, g_1 + g_2}(n, \theta) = W_{f_1, g_2}(n, \theta) + W_{f_2, g_1}(n, \theta) + W_{f_1, g_1}(n, \theta) + W_{f_2, g_2}(n, \theta) \quad (2.98)$$

și în particular:

$$W_{f+g}(n, \theta) = W_f(n, \theta) + W_g(n, \theta) + 2 \operatorname{Re}[W_{f, g}(n, \theta)]; \quad (2.99)$$

f) Multiplicarea cu n sau $e^{j2\theta}$

$$2 \cdot n \cdot W_{f, g}(n, \theta) = W_{nf, g}(n, \theta) + W_{f, 2ng}(n, \theta); \quad (2.100)$$

$$e^{j2\theta} \cdot W_{f, g}(n, \theta) = W_{S_{-1}f, S_1g}(n, \theta); \quad (2.101)$$

g) Transformarea inversă

Distribuția Wigner-Ville evaluată la frecvența $\frac{\theta}{2}$ poate fi considerată ca fiind transformata Fourier a secvenței $2 \cdot f(n+k) \cdot g^*(n-k)$, pentru n fixat. Avem deci:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j \cdot k \cdot \theta} \cdot W_{f, g}\left(n, \frac{\theta}{2}\right) d\theta = 2 \cdot f(n+k) \cdot g^*(n-k), \quad (2.102)$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{j(n_1 - n_2)\theta} \cdot W_{f, g}\left(\frac{n_1 + n_2}{2}, \theta\right) d\theta = f(n_1) \cdot g^*(n_2), \text{ unde } \frac{n_1 + n_2}{2} \in Z. \quad (2.103)$$

Este interesant de remarcat existența următoarelor cazuri particulare:

- $n_1 = n_2 = n$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W_{f, g}(n, \theta) d\theta = f(n) \cdot g^*(n) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W_f(n, \theta) d\theta = |f(n)|^2. \quad (2.104)$$

- $n_1 = 2n, n_2 = 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{j2n\theta} W_{f,g}(n, \theta) d\theta = f(2n) \cdot g^*(0). \quad (2.105)$$

• $n_1 = 2n - 1, n_2 = 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{j2(n-1)\theta} \cdot W_{f,g}(n, \theta) d\theta = f(2n-1) \cdot g^*(1). \quad (2.106)$$

Prin urmare, este posibilă din punct de vedere teoretic, reconstrucția exactă a semnalului plecând de la transformarea Wigner-Ville în timp discret corespunzătoare, folosind relațiile de mai sus. Totuși, din punct de vedere practic, acest lucru nu este foarte important având în vedere că, pe de o parte, se lucrează de obicei cu versiunea filtrată în timp și/sau frecvență a distribuției Wigner-Ville, iar, pe de altă parte, că ceea ce interesează este analiza semnalelor cu ajutorul acestei transformate și nu reconstrucția lor.

2.4 Analiza comparativă a unor semnale folosind distribuțiile energetice din clasa Cohen

Pentru studiul comparativ folosind reprezentările timp-frecvență s-a utilizat un impuls modulat liniar în frecvență, de amplitudine unitară, și a cărei frecvență, normată la frecvența de eșantionare, crește liniar de la 0.1 la 0.3. Durata semnalului corespunde la 512 eșantioane [Dum03], [Cun94].

În figura 2.1a este reprezentată *pseudodistribuția Wigner-Ville* netezită pentru care semnalul în situația când dimensiunile ferestrelor de netezire de-a lungul axelor temporală și respectiv de frecvență sunt ambele 64, iar transformata Fourier este calculată în 512 de puncte. Se observă că această reprezentare în formă de „lamă de cuțit” conservă suportul temporal și de frecvență și că oferă o imagine precisă a modului cum este distribuită energia semnalului de-a lungul planului timp-frecvență.

În figura 2.1b este înfățișat planul timp-frecvență privit de sus, sub un unghi de 90°. Se poate vedea cât de subțire este „lama energetică” a semnalului de test și în același timp cât de net se delimitează de restul „peisajului”. *Figurile 2.1c și d* au aceeași semnificație ca și cele precedente, doar că ele au fost obținute înjumătățind ferestrele de netezire precum și numărul de puncte în care a fost calculată transformata Fourier.

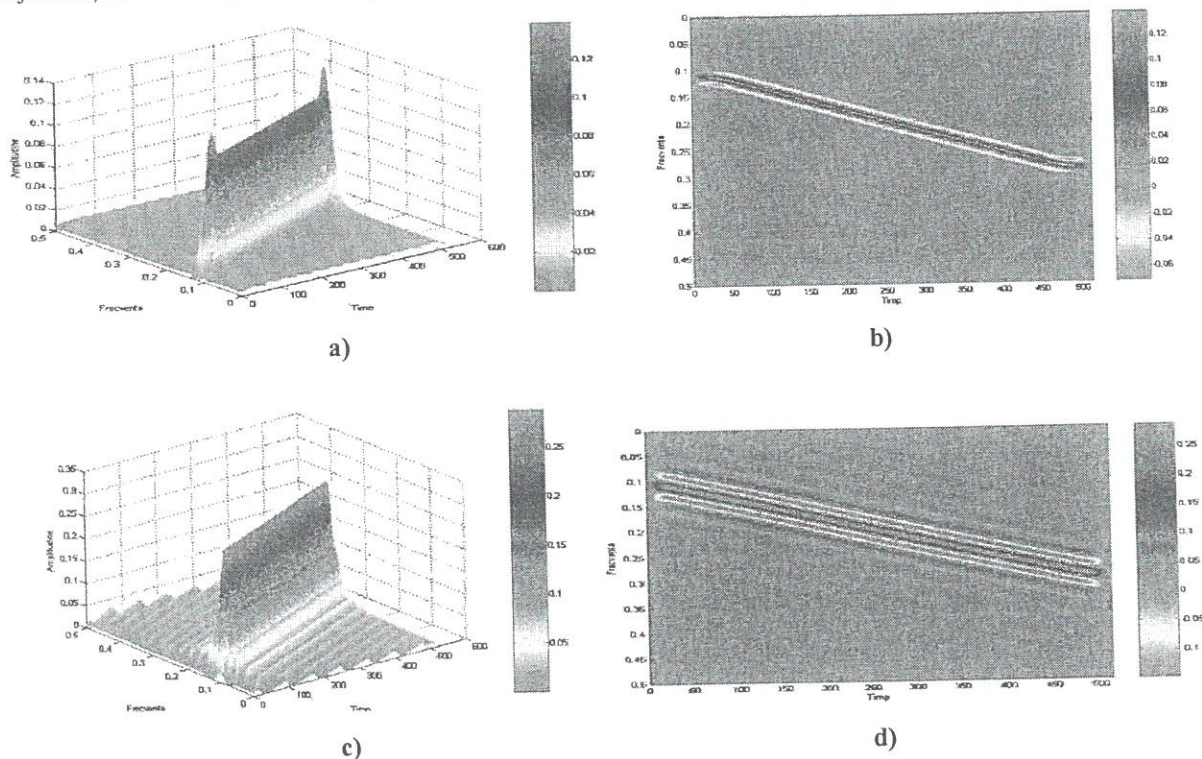


Figura 2.1. Reprezentarea pseudo-Wigner-Ville a semnalului de test.

Se constată că acest fapt a dus la micșorarea rezoluției reprezentării atât în timp, cât și în frecvență. Un alt efect al micșorării ferestrelor și al dimensiunii FFT este acela de creștere a amplitudinii lobilor secundari. Avantajele utilizării unor ferestre de analiză de dimensiuni reduse constau în conservarea mai bună a suporturilor temporal și de frecvență, precum și reducerea timpului de calcul față de situația anterioară, când aceste dimensiuni erau duble. Chiar și în aceste condiții, se poate determina pe baza cărui tip de semnal a fost realizată o astfel de reprezentare în situația în care acesta nu este cunoscut apriori. Se pot face și estimări suficient de bune asupra parametrilor semnalului aflat la originea transformării. Fereastra de analiză a fost în ambele cazuri de tip Hamming.

Semnalul de test va fi în continuare analizat cu ajutorul altor reprezentări timp-frecvență din clasa lui Cohen, cum ar fi *distribuția Born-Jordan* reprezentată în figura 2.2, pentru calcularea căreia s-au folosit ferestre de tip Hamming. Comparativ cu distribuția Wigner-Ville aceasta se prezintă tot sub forma unei „lame de cuțit” ceva mai groasă, deci cu rezoluție mai mică, dar ai cărei lobi secundari sunt aproape de neobservat când dimensiunea ferestrei H este egală cu 64. Când dimensiunea ferestrei se micșorează la 32, rezoluția se micșorează și lobii secundari devin vizibili.

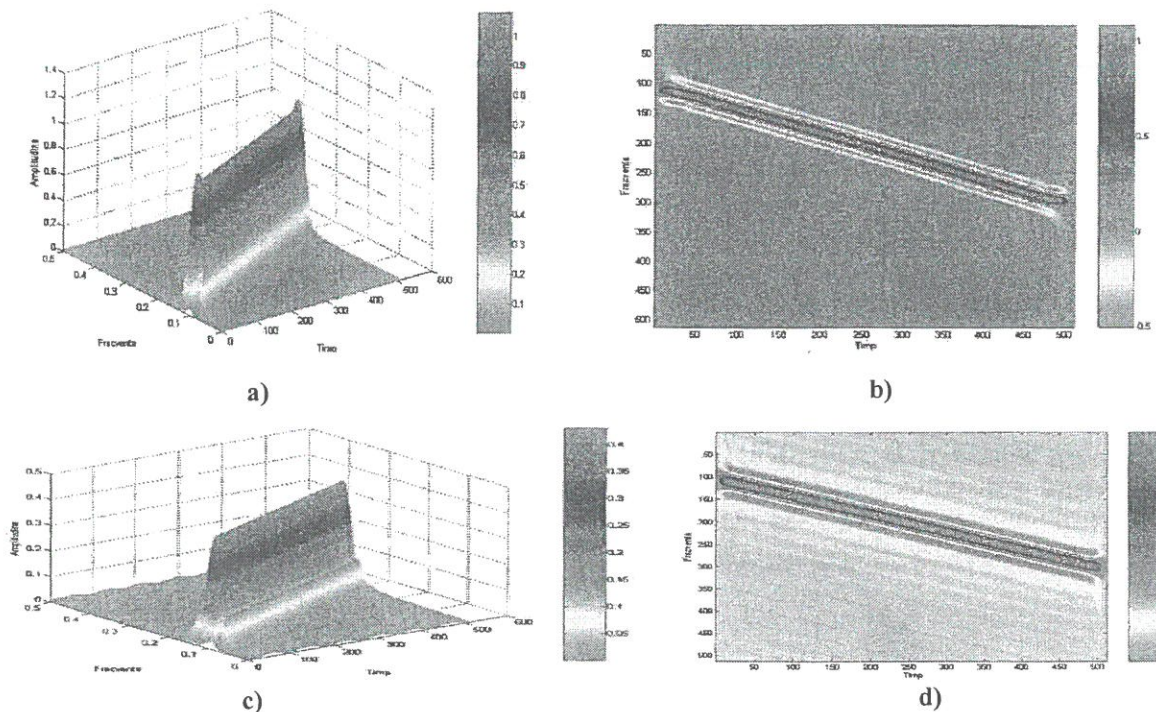
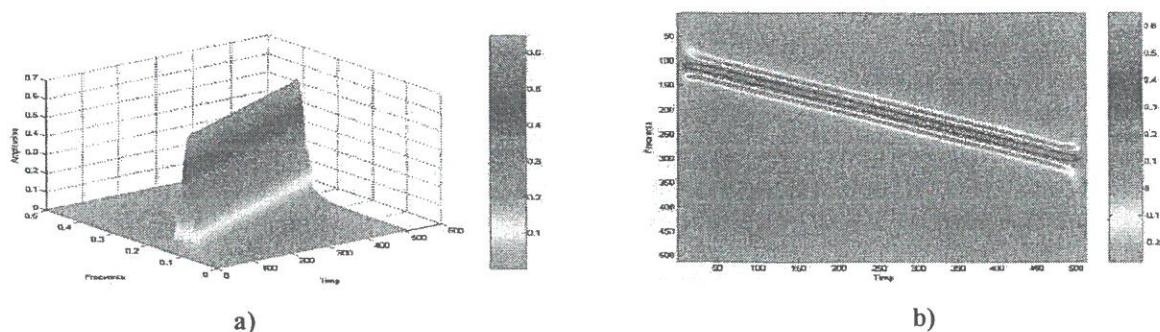


Figura 2.2. Reprezentarea Born-Jordan a semnalului de test

Figura 2.3 conține *distribuțiile Choi-Williams* ale semnalului cu frecvență linear variabilă, pentru fereastra de tip Hamming de dimensiuni 64 (a și b) și respectiv 32 (c și d). O primă observație care se impune este legată de semnul pozitiv al distribuției și de amplitudinea mare a acesteia. Rezoluția reprezentării este aproape la fel de bună ca și a distribuției pseudo-Wigner-Ville netezită. Este interesant că lobii secundari nu au devenit vizibili pentru nici una din dimensiunile ferestrei de analiză. În schimb, au apărut la nivelul fronturilor semnalului unele perturbații perpendiculare pe axa timp și cu suport de frecvență larg, care sunt mai accentuate când dimensiunea ferestrei de netezire este mică.



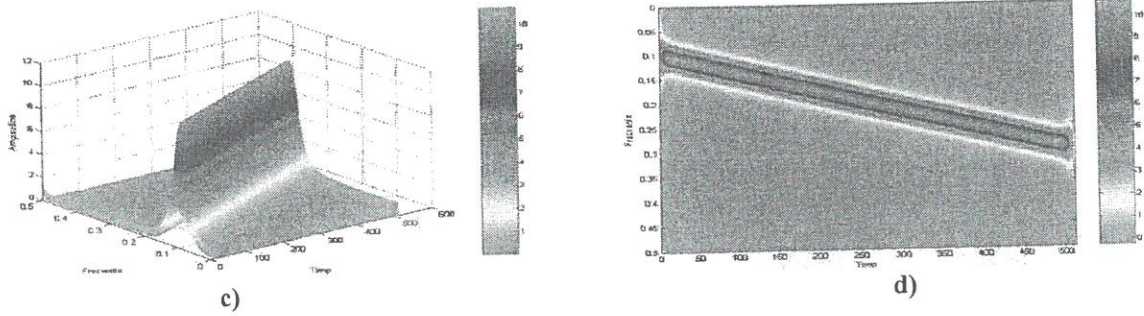


Figura 2.3. Reprezentarea Choi-Williams a semnalului de test.

Distribuția Zao-Mark-Atlas a semnalului de test este prezentată în figura 2.4. Ca o primă constatare, amplitudinea reprezentării este cea mai mică în raport cu celelalte reprezentări studiate până acum.

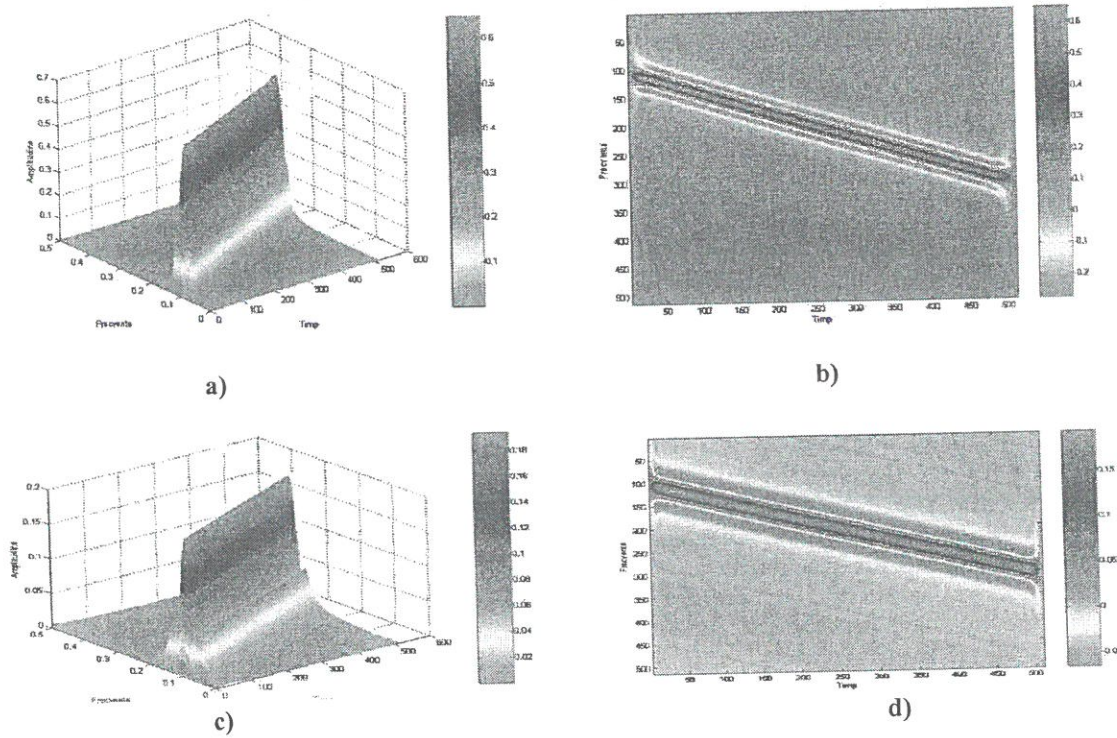


Figura 2.4. Reprezentarea Zao-Mark-Atlas a semnalului de test.

Rezoluția reprezentării este foarte bună, comparativ cu rezoluțiile celorlalte distribuții.

Micșorarea dimensiunii ferestrei de analiză (la valoarea 32 față de 64) a condus la apariția lobilor secundari, precum și a unor perturbații la nivelul fronturilor semnalului.

A fost lăsată la sfârșit analiza semnalului cu ajutorul *spectrogramei* (figura 2.5), care este tot o distribuție din clasa lui Cohen, cea mai puțin performantă, dar în același timp și cea mai simplă dintre toate. Fereastra folosită a fost de tip rectangular, de dimensiune 64.

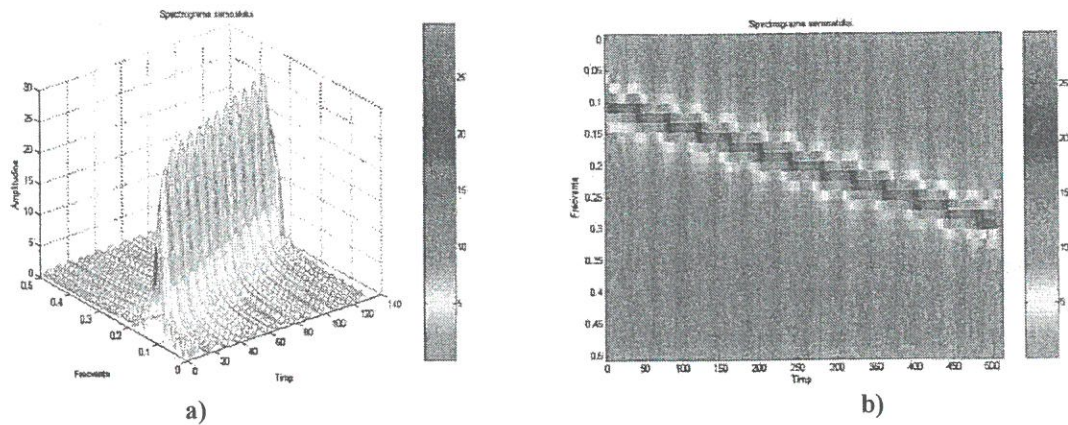


Figura 2.5. Spectrograma semnalului de test.

Din analiza cu ajutorul reprezentărilor timp-frecvență, din clasa Cohen, a unui semnal de test se desprind câteva concluzii:

- dintre toate distribuțiile timp-frecvență investigate, spectrograma oferă rezoluția temporală și în frecvență cea mai scăzută;
- distribuția Zao-Mark-Atlas prezintă amplitudinea cea mai mică;
- distribuția Choi-Williams este pozitivă și are amplitudinea cea mai mare;
- distribuția Born-Jordan aproape că nu prezintă lobi secundari;
- alegerea ferestrelor de analiză (Blackman, Hanning, Hamming, Bartlett, rectangulară) influențează rezoluțiile temporală și de frecvență, ca și nivelul lobilor secundari.

3. Concluzii

Analiza semnalelor tranzitorii, este o sarcină de bază pentru sistemele de analiză.

Reprezentările pătratice prezentate, care fac parte din categoria mai largă descrisă de clasa Cohen, oferă proprietăți excelente de analiză timp-frecvență a semnalelor.

În urma investigațiilor efectuate, pot fi subliniate unele aspecte importante în legătură cu utilizarea analizei semnalelor, folosind distribuțiile timp-frecvență din clasa Cohen și anume:

- structura energetică a semnalelor analizate poate fi identificată și localizată cu o bună acuratețe în planul timp-frecvență;
- atunci când tipul, durata, frecvența și dispunerea temporală a semnalelor nu sunt cunoscute apriori, acestea pot fi estimate cu ajutorul distribuțiilor timp-frecvență;
- se întrevide astfel posibilitatea implementării acestor algoritmi de analiză în sistemele de analiză a semnalelor tranzitorii;
- pot fi alcătuite baze de date utile pentru identificarea semnalelor tranzitorii, deoarece „semnătura” acestora poate fi individualizată cu ajutorul reprezentărilor timp-frecvență.

Bibliografie

1. AMIN, M. G.: The Running Time-Frequency Distribution. Circuits. În: System and Signal Processing, 1995, pp. 401-414.
2. AMIN, M. G.: Recursive Kernels for Time-Frequency Signal Representation. În: IEEE Signal Processing Letter, 1996, pp. 16-18.
3. AUGER. F.: Representation Temps-Frequence des Signaux Non-Stationnaires. În: Synthese et Contribution. 1991, pp. 221.

4. **AUGER, F., P. FLANDRIN:** Improving the Readability of Time-Frequency and Time-Scale Representation by the Reassignment Method. În: IEEE Transaction on Signal Processing, 1995, pp. 1068-1089.
5. **BARANIUK, R. G., D. JONES:** Signal-Dependent Time-Frequency Representation. În: IEEE Transaction on Signal Processing, 1993, pp. 1589-1602.
6. **CUNNINGHAM, G., W.J.WILLIAMS:** Fast Implementation of Generalized Discrete Time-Frequency Distributions. În: IEEE Transaction on Signal Processing, 1994, vol. 42, pp. 1496-1502.
7. **DUMITRESCU, C.:** Analizele timp-frecvență ale EEG. Referat susținut în cadrul examenelor parțiale de doctorat. UPB, București, 2003.
8. **QIAN, S.:** Joint Time-Frequency Analysis. Methods and Applications. Prentice Hall, 1996.
9. **VILLE, J:** Theorie et Application de la Notion de Signal Analytique. Cable et Transmissions, 1948, vol. 2A, pp. 61-74.