SPRE O DEFINIRE A LOCALITĂȚII DE GRUP. MĂSURI ALE SIMETRIEI

Cristian Lupu

(caral@surf.ro)
Centrul pentru Noi Arhitecturi Electronice al Academiei Române

Rezumat: Datorită progresului tehnic, a devenit posibil un nou tip de calcul: calculul bazat pe locație (*location-aware* sau *location-based computing*). Acest tip de calcul a făcut posibile aplicații care își determină locația și își modifică parametrii, interfețele-utilizator și funcțiile în acord cu locația. Preocupările noastre privind localitatea rețelelor aparțin acestei probleme. *Localitatea de interconectare* este comportarea rețelei în jurul originii și este înțeleasă, în primul rând, ca *vecinătate*. *Localitatea de grup*, pe care încercăm să o definim în acest articol, este un alt punct de vedere asupra localității rețelelor. În timp ce definițiile mai vechi ale localității de interconectare se bazează pe distanța logică între nodurile unei anumite structuri și apoi pe anumite reguli de structurare, definiția dată acum localității se bazează pe anumite *proprietăți ale unui grup* (ca structură matematică) de noduri, cum sunt simetriile care împart, partajează grupul. În loc să ne bazăm pe distanțele logice între noduri, *sintetizăm* rețeaua pe anumite *reguli de structurare*, cum sunt proprietățile de (sub)grup. Localitatea de grup pune *proprietățile*, un principiu constructiv, sintetic, înaintea *distanțelor*, un principiu analitic, care este legat de localitatea de interconectare. Distanțele logice „dispar" în localitatea de grup, care își va etala mai întâi proprietățile. Localitatea de grup este, astfel, un pas înainte din punct de vedere calitativ față de localitatea spațială fie ea structurală sau funcțională, bazată pe distanța logică.

Cuvinte cheie: interconectare, grup, simetrie, graf *Cayley*, localitate de grup, globalitate, localitate de interconectare

1. Introducere

Orice interconectare (în sensul păstrării comunicațiilor între noduri sau a conectivității) este mai sigură funcțional cu cât este mai simetrică. Pe de altă parte, una din proprietățile definitorii ale oricărei structurări a spațiului fizic este cea a simetriei. *Transformarea* care păstrează structura spațiului se numește *automorfism*. Considerând o anumită configurație spațială, o structură, o formă, o interconectare, putem evidenția o mulțime de automorfisme ale spațiului, care să lase neschimbată această configurație. Automorfismele astfel evidențiate formează un grup (sau un subgrup) care descrie precis simetria pe care o posedă configurația spațială aleasă [13]. Se numește *grup* o mulțime nevidă G, înzestrată cu o operație asociativă și cu element unitate sau neutru față de care orice element este inversabil. Dacă în grupul G se poate determina o submulțime nevidă G' care în raport cu aceeași operație din G formează grup, se spune că submulțimea G' formează un *subgrup* al grupului G. În continuare, ne vom referi numai la grupurile finite, reprezentate ca grupuri de permutări.

Spațiul amorf are o *simetrie totală*, corespunzătoare grupului tuturor automorfismelor. Simetria unui corp, a unei forme, a unei interconectări în acest spațiu va fi descrisă, în general, de un subgrup al grupului tuturor automorfismelor. Simetria totală a spațiului definit prin n puncte (permutări) va fi redată de $S_{n!}$, în timp ce o *simetrie parțială* este exprimată de un subgrup de permutări. Deci, grupurile simetrice $S_{n!}$ modelează simetria unui spațiu definit prin n puncte și invers. Simetria totală a unui astfel de spațiu reprezintă o interconectare totală, o rețea complet conectată, ca să vorbim în termeni de interconectare, cu $n!$ noduri.

2. Definirea localității de grup

Pentru definirea localității de interconectare prin proprietăți de grup, să luăm ca prime exemple de referință, *caracteristicile de simetrie fizică* ale câtorva figuri plane. O figură plană nu poate avea ca simetrii constitutive decât *identitatea*, *rotația*, *translația*, *oglindirea* și *oglindirea-translația* [12].

Este cunoscut faptul că un dreptunghi are următoarele patru simetrii: transformarea identitate I; cele două reflectări sau oglindiri S_1 și S_2 față de mediatoarele laturilor neparalele, A_{S1} și A_{S2}; rotația R de 180°. În figura 1 exemplificăm cele patru automorfisme pentru dreptunghiul ale cărui vârfuri le-am notat 1, 2, 3 și 4. Cu această notație, echivalăm imediat simetriile dreptunghiului cu următoarele permutări (generatori):

$$I=(1\ 2\ 3\ 4)$$
$$S_1=(2\ 1\ 4\ 3)$$
$$S_2=(4\ 3\ 2\ 1)$$
$$R=(3\ 4\ 1\ 2)\}$$

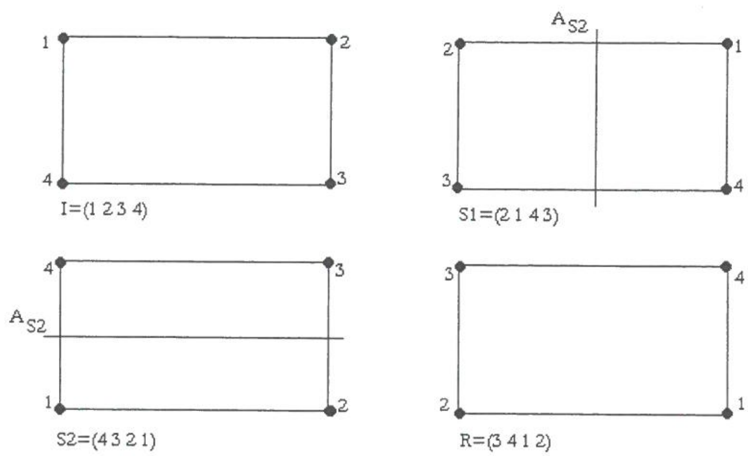

Figura 1. Simetriile unui dreptunghi

Tabela de grup a simetriilor unui dreptunghi, care este o tabelă a rezultatelor operațiilor de compunere a automorfismelor, este următoarea:

$$I\ R\ S_1\ S_2$$
$$R\ I\ S_2\ S_1$$
$$S_1\ S_2\ I\ R$$
$$S_2\ S_1\ R\ I$$

Din această tabelă, vedem imediat că, într-adevăr, cele patru simetrii ale dreptunghiului formează un grup față de operația de compunere a lor. Mai mult, acest grup este un grup comutativ. Echivalând însă simetriile cu permutări, observăm acum că simetriile dreptunghiului formează, de fapt, numai un *subgrup* al grupului simetric de gradul 4, $S_{4!}$.

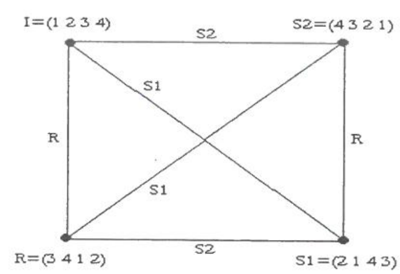

Figura 2. Graful *Cayley complet* al simetriilor unui dreptunghi

Simetriile dreptunghiului împart grupul simetric $S_{4!}$ în subgrupuri de câte patru elemente. Graful *Cayley* [6, 7] al acestor subgrupuri, utilizând ca generatori chiar cele trei simetrii (fără I), este dat de o rețea complet conectată cu 4 noduri (figura 2). Graful din figura 2 este un graf *simetric la vârfuri*, ca orice graf *Cayley* [1]. Să mai remarcăm acum faptul că subgrupul simetriilor unui dreptunghi poate avea și alți generatori decât toate cele trei simetrii, de exemplu numai R și S_1 (pentru că $RS_1 = S_1R = S_2$) sau numai R și S_2 ($RS_2 = S_2R = S_1$) sau numai S_1 și S_2 ($S_1S_2 = S_2S_1 = R$). Cu acești generatori, obținem alte grafuri *Cayley*, să le zicem *minime*, ale simetriilor unui dreptunghi (figura 3). Aceste grafuri sunt, așa cum se poate ușor vedea, și *cicluri hamiltoniene* în graful *Cayley complet* al simetriilor dreptunghiului. Să reținem din acest exemplu împărțirea grafurile *Cayley* în complete și minime [8].

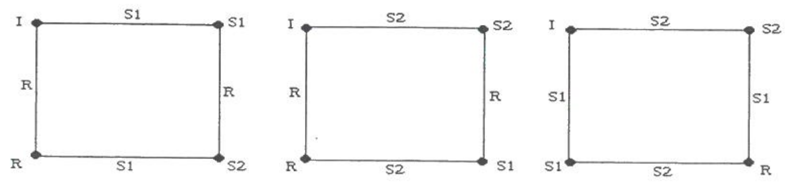

Figura 3. Grafuri *Cayley minime* ale simetriilor unui dreptunghi

În acest fel, notând cu numere nodurile figurilor şi punând în evidenţă diverse simetrii parţiale sau totale, putem să examinăm proprietăţile de simetrie ale figurilor plane ce pot împărţi grupurile simetrice $S_{n!}$ în diferite subgrupuri. În tabelul 1, dăm câteva figuri ale căror *grupuri (subgrupuri) de simetrie* împart grupurile simetrice $S_{n!}$, unde n este numărul de noduri al figurii plane studiate.

Tabelul 1. Împărţirea grupurilor simetrice determinată de simetriile unor figuri plane

Structură	Grupul simetriilor G_S	Împărţirea grupului simetric
Segment de dreaptă	{I, S}	$\|S_{2!}\|=\|G_S\|$
Triunghi isoscel	{I, S}	$\|S_{3!}\|=3\times\|G_S\|$
Trigon	$\{I, R_1, R_2\}$	$\|S_{3!}\|=2\times\|G_S\|$
Triunghi echilateral	$\{I, R_1, R_2, S_1, S_2, S_3\}$	$\|S_{3!}\|=\|G_S\|$
Tetragon	$\{I, R_1, R_2, R_3\}$	$\|S_{4!}\|=6\times\|G_S\|$
Dreptunghi	$\{I, S_1, S_2, R\}$	$\|S_{4!}\|=6\times\|G_S\|$
Pătrat	$\{I, R_1, R_2, R_3, S, T, U, V\}$	$\|S_{4!}\|=3\times\|G_S\|$
Pentagon	$\{I, R_1, R_2, R_3, R_4, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$	$\|S_{5!}\|=12\times\|G_S\|$

După cum observăm în tabelul 1, (sub)grupurile de simetrii ale figurilor geometrice plane, definind în general o simetrie parţială, mai slabă decât cea definită la nivelul grupului simetric corespunzător, *partiţionează* acest din urmă grup în mai multe subgrupuri. Acţiunea generatorilor grupurilor de simetrii este, astfel, în general, „mai” *locală*. Interconectările elementelor unui (sub)grup, definite de simetriile figurilor plane evidenţiază, în general, o anumită *localitate* în raport cu *globalitatea* interacţiunii pe care o presupune simetria grupului $S_{n!}$.

Localitatea de grup se defineşte în felul următor: *Localitatea de grup este o interconectare (comportare, interacţiune), a unor noduri (grupuri de elemente) determinată de anumite proprietăţi ale grupului (de exemplu, simetrii ale figurilor plane finite).*

Această definiţie se deosebeşte radical de prima definiţie a localităţii utilizată în articolele [9], [10] dar şi în alte lucrări cum ar fi, de exemplu, [3], [4], [5], [11], unde localitatea era înţeleasă, în primul rând, ca *vecinătate*. Vedem că, în timp ce definiţiile mai vechi ale *localităţii de interconectare* se bazează pe *distanţa logică* între nodurile unei anumite structuri şi apoi pe anumite *reguli de structurare*, definiţia dată acum localităţii se bazează pe anumite *proprietăţi* ale unui *grup de noduri*, cum sunt simetriile, care *împart*, *partajează* grupul. În loc să ne bazăm pe distanţele logice între noduri, sintetizăm reţeaua pe anumite reguli de structurare, cum sunt proprietăţile de (sub)grup. De data aceasta, punem *proprietăţile*, un principiu constructiv, sintetic, înaintea *distanţelor*, un principiu analitic! Distanţele logice „dispar” într-o *localitate de grup*, care îşi etalează *proprietăţile*. Simetriile din spaţiul fizic ne-au ajutat să înţelegem, într-o primă fază, localitatea de grup. Localitatea de grup este un pas înainte, din punct de vedere calitativ, faţă de localitatea spaţială fie ea structurală sau funcţională, bazată pe distanţa logică. În plus, nimeni nu ne opreşte să apreciem localitatea şi pe baza vecinătăţii, dar după ce o proiectăm/evaluăm pe baza proprietăţilor.

O apreciere cantitativă, o măsură, a *localităţii de grup*, pe care o vom nota cu L_n, este dată de raportul între ordinul grupului simetric şi ordinul grupului de simetrii (sau de proprietăţi, mai general) utilizat pentru împărţirea în subgrupuri:

$$L_n=|S_{n!}| / |G_S|. \qquad (1)$$

Cum numărul minim de simetrii ale unei interconectări, excluzând cazul banal al unei singure simetrii - I, este 2, *localitatea de grup maximă*, conform formulei de mai sus, va fi $|S_{n!}| / 2$. *Localitatea de grup minimă* sau *globalitatea maximă*, $L_n=1$, se obține atunci când $|S_{n!}| = |G_S|$. În tabelul 1, localitatea minimă se obține, de exemplu, pentru o interconectare a două puncte, $L_2=1$, dar şi pentru interconectarea într-un triunghi echilateral (n.b., nu triunghi!) $L_3=1$, şi localitatea maximă se obține în cazul interconectării printr-un pentagon regulat, $L_5=12$. Localitățile de grup trebuie comparate pentru acelaşi număr de noduri care se interconectează. De exemplu, localitățile de grup ale tetragonului şi dreptunghiului sunt aceleaşi pentru că se referă la acelaşi grup simetric, $S_{4!}$, în timp ce nu putem spune nimic despre localitățile de grup ale triunghiului isoscel şi ale pătratului pentru că se referă la grupuri de simetrie diferite, $S_{3!}$ şi $S_{4!}$.

În tabelul 1, avem mai multe figuri geometrice, care au acelaşi număr de simetrii, de exemplu dreptunghiul şi tetragonul, conducând la aceeaşi localitate de grup. Prin ce se pot deosebi interconectările care au acelaşi L_n sau care din cele două figuri este mai simetrică? Vom răspunde la această întrebare printr-un alt exemplu.

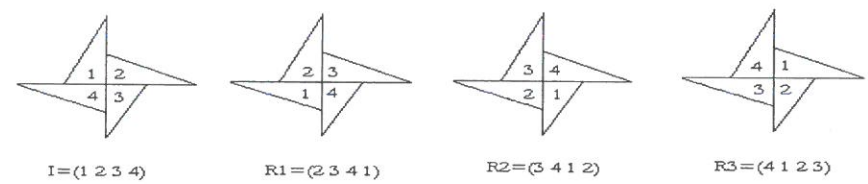

Figura 4. Simetriile unui tetragon

Tetragonul (figura 4) are şi el patru simetrii: identitatea I şi rotațiile R_1, R_2, R_3, în acelaşi sens cu 90°, 180° şi, respectiv, 270°. Pentru a exprima aceste simetrii ca permutări, putem numerota triunghiurile constitutive ca în figură. Aşa cum vedem, tetragonul, deşi are acelaşi *număr* de simetrii ca şi dreptunghiul, nu mai are simetrii de tip reflectare şi de tip oglindire având alte *proprietăți* de simetrie. Tabela de grup a simetriilor tetragonului este:

$$\begin{matrix} I & R_1 & R_2 & R_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 & I \\ R_2 & R_3 & I & R_1 \\ R_3 & I & R_1 & R_2 \end{matrix}$$

Pentru a reprezenta acest grup având ca generatori simetriile R_1, R_2 şi R_3 vom extinde definiția grafului *Cayley* dată în [1], preluată şi de noi în [9], şi la varianta orientată pe care o vom numi *graf Cayley orientat*. Un graf *Cayley* orientat va fi, deci, compus numai din vârfuri şi arce. Dacă graful *Cayley* are şi muchii, acest graf va fi numit *graf Cayley mixt*. Pentru tetragon, graful *Cayley* complet este un graf mixt (figura 5). Într-adevăr, să observăm că acest graf este nedirecționat numai pe diagonale şi că generatorii R_1 şi R_3 parcurg vârfurile grafului în sensuri opuse. Să mai observăm, de asemenea, că, în tabela de grup a simetriilor tetragonului, putem evidenția un singur subgrup de ordinul 2, $\{I, R_2\}$, în timp ce între simetriile dreptunghiului se formează trei astfel de subgrupuri, $\{I, R\}$, $\{I, S_1\}$, $\{I, S_2\}$.

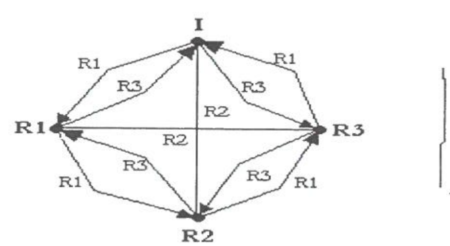

Figura 5. Graful *Cayley complet* al simetriilor unui tetragon

3. Măsuri ale simetriei

Acum putem răspunde la întrebarea mai sus formulată, în secțiunea precedentă, privind care structură având aceeași mărime de tabelă de grup este „mai" simetrică, printr-o conjectură a cărei formulare este dublă:

O structură plană este cu atât mai simetrică cu cât în tabela de grup a simetriilor ei se pot forma mai multe subgrupuri de ordinul 2.

O structură plană este cu atât mai simetrică cu cât graful Cayley complet al ei este mai neorientat.

Mai mult, să încercăm o generalizare, formulând o conjectură mai cuprinzătoare, referitoare la proprietățile de simetrie/asimetrie ale structurilor de interconectare. Prin utilizarea grafurilor *Cayley* mixte se introduce posibilitatea diverselor grade de comparație între simetrie și asimetrie, prin care se poate „măsura" mai bine „simetria" (localitatea de grup simetric): *O structură de interconectare este mai simetrică cu cât graful Cayley mixt al ei este mai simetric, adică cu cât are mai multe muchii și mai puține arcuri.*

În condițiile acestea, simetria se măsoara prin S_n a cărei formulă este dată de raportul între numărul de muchii din graful *Cayley* mixt (NM_{GCM}) care reprezintă structura de interconectare și ordinul subgrupului simetric G_S sau al oricărui subgrup de *proprietăți* care *împarte* grupul simetric $S_{n!}$:

$$S_n = NM_{GCM} / |G_S|. \tag{2}$$

Asimetria AS_n este inversul simetriei:

$$AS_n = |G_S| / NM_{GCM}. \tag{3}$$

Tabelul 2. Simetrii și asimetrii ale unor figuri plane

Structură	**Simetria $S_n=NM_{GCM} / \|G_S\|$**	**Asimetria $AS_n=\|G_S\| / NM_{GCM}$**
Segment de dreaptă	$S_2=1/2=0.5$	$AS_2=2/1=2$
Triunghi isoscel	$S_3=1/2=0.5$	$AS_3=2/1=2$
Tetragon	$S_4=2/4=0.5$	$AS_4=4/2=2$
Dreptunghi	$S_4=6/4=1.5$	$AS_4=4/6=0.66$

Pentru exemplul 1, $NM_{GCM}=6$, iar pentru exemplul 2, $NM_{GCM}=2$. Simetria dreptunghiului este 6/4=1.5, iar simetria tetragonului este 2/4=0.5. Asimetria dreptunghiului este de 4/6=0.66, iar cea a tetragonului este 4/2=2, de două ori mai mare. În tabelul 2, dăm câteva din simetriile și asimetriile figurilor din tabelul 1, calculate cu formulele de mai sus.

Simetriile/asimetriile calculate prin formulele (2) și (3) se pot compara, ca și localitățile de grup, doar pentru *același număr de noduri n*, ($S_{n!}$).

4. Concluzii

Între *localitatea de interconectare*, fundamentată, cum am văzut, pe noțiunea de *vecinătate*, și *localitatea de grup*, bazată pe noțiunea de *apartenență la o proprietate*, există legături. Aceste legături ne vor ajuta în articolele viitoare să investigăm mai departe *relația vecinătate - apartenență la o proprietate* ca pe o legătură esențială în structurarea și funcționarea unei interconectări.

Vecinătate în rețelele de interconectare înseamnă, după noi, *comportarea în jurul unei origini*. Nu există vecin până nu am stabilit o origine! Întâi se precizează originea și apoi se vorbește despre vecini, despre *structurarea și funcționalitatea* vecinilor în jurul originii. Există o neomogenitate primordială în rețelele de interconectare prin acțiunea de fixare a originii. Această *neomogenitate* modelează foarte bine doar o parte din funcțiile de *comunicare* ale rețelei. Pentru a aprecia vecinătățile unei rețele de interconectare am introdus *localitatea de interconectare*, pe care am definit-o și am studiat-o în [7], [9].

Apartenența la o proprietate sau la diverse proprietăți poate desemna un element al unei *mulțimi*. Proprietățile care *definesc* elementele unei mulțimi, deși nu este nevoie de ele în teoria mulțimilor, ci doar de *apartenența* la mulțimea respectivă, dau *consistență* acelei mulțimi, dau un *înțeles* superior mulțimii ca o entitate matematică. O rețea de interconectare este o mulțime de *noduri* și de *legături*. *Simetria*, de diverse tipuri, poate fi o proprietate care dă un sens, de exemplu, pe de-o parte *constructiv*, iar pe de alta, *estetic*, rețelei de interconectare. Apartenența la o *ierarhie* poate fi o altă caracteristică a unei rețele sau a unei părți dintr-o rețea. Pentru a evalua apartenența la proprietățile care definesc o rețea de interconectare ca o mulțime, am introdus *localitatea de grup* pe care am definit-o în articolul de față. Nu este nevoie de nici-o origine pentru a caracteriza localitatea de grup. O rețea de interconectare, ca orice mulțime, poate fi definită „printr-o relație care fundamentează *apartenența* (s.m.)" la mulțimea respectivă „sau poate fi construită aducând în câmpul mulțimii (rețelei, n.m.) elemente care satisfac relația care o definește" [2]. Apartenența la o proprietate *colectivizantă*, cum se exprimă Drăgănescu citându-l pe Bourbaki, nu mai necesită precizarea sau fixarea unei origini ca în cazul localității de interconectare. Proprietățile mai mult sau mai puțin colectivizante se pot „măsura" prin localități de grup.

Am redefinit localitatea ca o caracteristică, ca o proprietate colectivizantă a unui grup, opusă globalității și diferită de înțelesul obișnuit, cu care, de cele mai multe ori, se confundă, acela de vecinătate. Grupurile de simetrie, G_S, caracterizând, în general, o simetrie mai slabă decât cea definită la nivelul grupului simetric corespunzător, $S_{n!}$, *partiționează* acest din urmă grup în mai multe subgrupuri. Acțiunea generatorilor unor astfel de grupuri de simetrie este, în general, *„mai" locală*. Interconectările lor evidențiază, în general, o anumită *localitate* în raport cu *globalitatea* interacțiunii, definită de simetriile întregului grup $S_{n!}$. Cu cât simetria este mai slabă (ordinul grupului de simetrie mai mic), cu atât ea determină o interacțiune „mai" locală în cadrul grupului simetric, sau, altfel spus, o *localitate mai mare*. Obținem astfel o confirmare cu ajutorul teoriei grupurilor a interdependenței simetrie/localitate: *cu cât o structură posedă mai multă simetrie, cu atât localitatea interacțiunilor (interconectărilor) independente este mai mică, iar globalitatea mai mare.* Cu cât un spațiu de interconectare posedă mai multă simetrie, cu atât *granularitatea interconectării* este mai mare. Echivalând localitatea cu o eficiență a interconectării, enunțăm, în continuare, o altă concluzie: *o structură de interconectare este cu atât mai eficientă din punct de vedere al comunicării, cu cât ea este mai asimetrică.*

Trebuie să facem o diferență între simetria ca număr de transformări – G_S, care se folosește la partiționarea grupului simetric $S_{n!}$ pentru a da o localitate de grup, și între simetria S_n care servește la departajarea structurilor cu aceeași localitate de grup. Simetria G_S are mai mult sens în *planul arhitectural* $S_{n!}$ pe când simetria S_n are mai mult sens în cadrul structurii de interconectare. Simetria G_S este *exterioară*, ca să spunem așa, în timp ce simetria S_n este *interioară*!

Introducând, într-un articol viitor, modelul de interconectare morfologică, bazat pe noțiunile de *morfem* și de *ansamblu*, vom fundamenta posibilitățile de *apartenență* la un grup și, mai precis, posibilitățile de apartenență la un grup de simetrii și, în ultimă instanță, vom justifica *localitatea de grup*.

Bibliografie

1. **AKERS, S. B., B. KRISHNAMURTHY:** A Group - Theoretic Model for Symmetric Interconnection Networks. În: IEEE Trans. on Computers, vol. 38, no.4, April 1989, pp. 555-566.
2. **M. DRĂGĂNESCU**, Ortofizica, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985.
3. **DUATO, J., S. YALAMANCHILI, L. NI**: Interconnection Networks. An Engineering Approach, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, 1997.
4. **HENNESSY, J., D. A. PATTERSON**: Computer Architecture. A Quantitative Approach, Morgan Kaufmann Pub. Inc, San Mateo, California, 1990.
5. **HILLIS, W. D.**: The Connection Machine, The MIT Press, Cambridge, Massachusets, London, England, 1985.
6. **LUPU, C.**: Despre simetrie și izomorfism la rețele de interconectare directe. În: Revista Română de Informatică și Automatică, vol. 15, nr. 1, 2005, pp. 47-52.
7. **LUPU, C.:** Interconectarea. Localitate și simetrie în rețele ortogonale de calculatoare, Editura Tehnică, București, 2004.
8. **LUPU, C.:** Contribuții la dezvoltarea sistemelor de prelucrare neconvenționale, Teză de doctorat, UPB-Fac. de Automatică și Calculatoare, conducător științific Prof. dr. ing. Nicolae Țăpuș, Mai 1995.
9. **LUPU, C.:** Localitatea de interconectare. În: Revista Română de Informatică și Automatică, vol. 11, nr. 4, 2001, pp.32-40.
10. **LUPU, C.:** Locality Measured By Contour Patterns. A Topographic Model. În: Proceedings of the 15th IASTED International Conference on Modelling and Simulation, Marina Del Rey, California, March 1-3, 2004, pp.50-54.
11. **REED, D. A., D. C. GRUNWALD**: The Performance of Multicomputer Interconnection Network. În: Computer, vol. 20, no. 6, pp. 63-73, June 1987.
12. **ROMAN, T.**: Simetria. Prezentare matematică a unor fenomene din natură și artă, Editura Tehnică, București, 1963.
13. **WEYL, H.**: Simetria, Editura științifică, București, 1966. (Traducere în limba română).