

GRAFURILE CAYLEY – UN ALT MOD DE REPREZENTARE A REȚELOR ORTOGONALE

Cristian Lupu
(caral@racai.ro)

Centrul pentru Noi Arhitecturi Electronice al Academiei Române

*Motto: Discovering the rules that govern the future
interconnection environment is a major challenge*
Hai Zhuge, The Future Interconnection Environment

Rezumat: Definiția rețelelor *ortogonale* se bazează pe *relațiile spațiale logice* între noduri. În acest articol ne propunem să definim relațiile între nodurile unei rețele ortogonale cu ajutorul teoriei grupurilor. Relațiile între noduri sunt *generatorii* care conduc la grafuri Cayley. *Generatorii* sunt, de exemplu, transpozițiile sau ciclurile care dau un sens *logic* simetriei de translație sau de rotație. Așa cum am fundamentat definirea rețelelor ortogonale pe relațiile spațiale logice ne vom baza pe relațiile de *simetrie logică* pentru a le reprezenta ca grafuri Cayley.

Cuvinte cheie: Localitate de grup, graf *Cayley*, interconectare, globalitate, granularitate

1. Introducere. Localitate de grup și simetrie

Localitatea de grup este o interconectare (comportare, interacțiune, granularitate) a unor noduri (grupuri de elemente) determinată de anumite proprietăți ale grupului (de exemplu, simetriile unor figuri plane finite).

Această definiție se deosebește radical de prima definiție a localității de interconectare utilizată în articolele [10, 11] dar și în alte lucrări cum ar fi, de exemplu, [3, 4, 5], unde localitatea era înțeleasă în primul rând ca vecinătate. Vedem că, în timp ce definițiile mai vechi ale localității de interconectare se bazează pe distanța logică între nodurile unei anumite structuri și apoi pe anumite reguli de structurare, definiția dată acum localității se bazează pe anumite proprietăți ale unui grup de noduri, cum sunt simetriile, care împart, partajează (în granule) grupul. În loc să ne bazăm pe distanțele logice între noduri sintetizăm rețeaua pe anumite reguli de structurare, cum sunt proprietățile de (sub)grup. Punem proprietățile, un principiu constructiv, sintetic, înaintea distanțelor, un principiu analitic. Distanțele logice "dispar" într-o localitate de grup care își etalează proprietățile. Simetriile din spațiul fizic ne ajută să înțelegem, într-o primă fază, localitatea de grup. Localitatea de grup este un pas înainte din punct de vedere calitativ față de localitatea spațială, fie ea structurală sau funcțională, bazată pe distanța logică. În plus, nimeni nu ne oprește să apreciem localitatea și pe baza vecinătății, dar după ce o proiectăm/evaluăm pe baza proprietăților.

O apreciere cantitativă, o măsură, a localității de grup, pe care o vom nota cu L_n , este dată de raportul între ordinul grupului simetric și ordinul grupului de simetrii (sau de proprietăți, mai general) utilizat pentru împărțirea în subgrupuri [8]:

$$L_n = |S_n| / |G_S| \quad (1)$$

Cum numărul minim de simetrii ale unei interconectări, excluzând cazul banal al unei singure simetrii - I, este 2, localitatea de grup maximă, conform formulei de mai sus, va fi $|S_n| / 2$. Localitatea de grup minimă sau globalitatea maximă, $L_n=1$, se obține atunci când $|S_n| = |G_S|$. Localitățile de grup trebuie comparate pentru același număr de noduri care se interconectează în același spațiu de noduri (grup simetric). De exemplu, localitățile de grup ale tetragonului și dreptunghiului sunt aceleași pentru că se referă la același grup simetric, S_{41} , în timp ce nu putem spune nimic despre localitățile de grup ale triunghiului isoscel și ale pătratului pentru că se referă la grupuri diferite, S_{31} și S_{41} [7].

Definiția rețelelor ortogonale se bazează pe relațiile spațiale logice între noduri [9]. În acest articol ne propunem să definim relațiile între nodurile unei rețele ortogonale cu ajutorul teoriei grupurilor.

2. Lanțuri și hipercuburi binare

Să începem cu lanțurile, cele mai simple structuri care se pot reprezenta cu ajutorul grafurilor Cayley. Lanțul, ca structură elementară de interconectare (SEI), este definit de o transpoziție, figura 1.

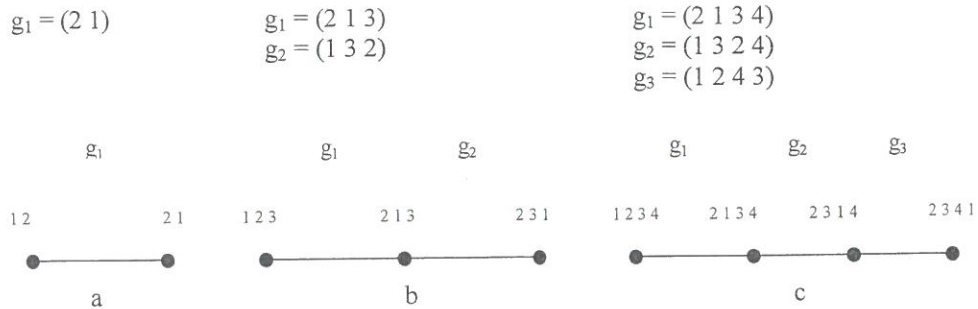


Figura 1: Lanțuri reprezentate ca grafuri Cayley

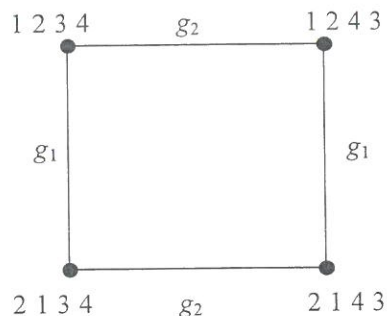


Figura 2: Un HCB cu 2^2 noduri reprezentat ca graf Cayley al subgrupului generat de $g_1=(2\ 1\ 3\ 4)$ și $g_2=(1\ 2\ 4\ 3)$

Transpoziția între două noduri, $g_1=(2\ 1)$, este generatorul unui graf Cayley al unui lanț cu două vârfuri, figura 1, a. Acest lanț are localitatea de grup minimă, $L_2=1$. Subgrupul de proprietăți (simetriei) care împarte grupul simetric $S_{2!}$ este $G_5=(I, T)$, I fiind identitatea și T fiind transpoziția.

Transpoziția între două noduri este și elementul de bază al construirii hipercuburilor binare, HCB, reprezentate ca grafuri Cayley. Să luăm câteva exemple de HCB.

Să considerăm generatorii $g_1=(2\ 1\ 3\ 4)$ și $g_2=(1\ 2\ 4\ 3)$. Generatorii aceștia formează un alt subgrup G_5 (cele două transpoziții plus permutarea identitate) care produc următoarele permutări:

- 1 2 3 4
- 2 1 3 4
- 2 1 4 3
- 1 2 4 3

Graful Cayley rezultat este un patrulater, figura 2, echivalent cu un HCB cu 2^2 noduri. Localitatea de grup a acestuia este $L_4 = |S_{n!}| / |G_5| = 4! / 3 = 8$. Localitatea de grup s-a stabilit luând în considerare proprietățile transpozițiilor, adică ale subgrupului G_5 față de grupul simetric $S_{n!}$. Subgrupul G_5 împarte grupul de simetrie $S_{n!}$ corespunzător dimensiunilor. Subgrupul G_5 are proprietăți diferite de subgrupurile de simetrie fizică, [8], împărțind grupul simetric altfel, în dimensiuni logice, nu fizice.

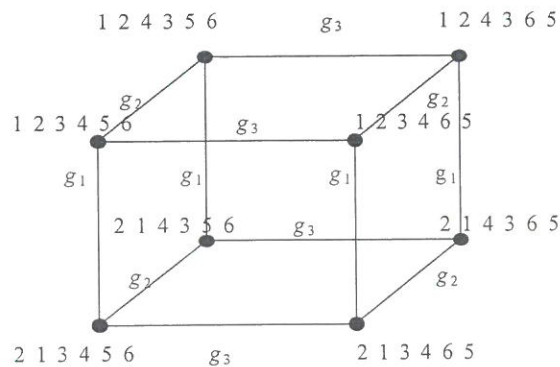


Figura 3: Un HCB cu 2^3 noduri reprezentat ca graf Cayley

Să considerăm generatorii $g_1 = (2\ 1\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $g_2 = (1\ 2\ 4\ 3\ 5\ 6)$ și $g_3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5)$. Cu acești generatori se obțin următoarele permutări:

- 1 2 3 4 5 6,
- 2 1 3 4 5 6,
- 1 2 4 3 5 6,
- 1 2 3 4 6 5,
- 2 1 4 3 5 6,
- 2 1 3 4 6 5,
- 1 2 4 3 6 5,
- 2 1 4 3 6 5.

Graful Cayley corespunzător este un cub, adică un HCB cu 2^3 noduri, figura 3.

Hipercubul binar cu 2^3 noduri are o localitate de grup $L_6 = |6!|/4 = 720/4 = 180$.

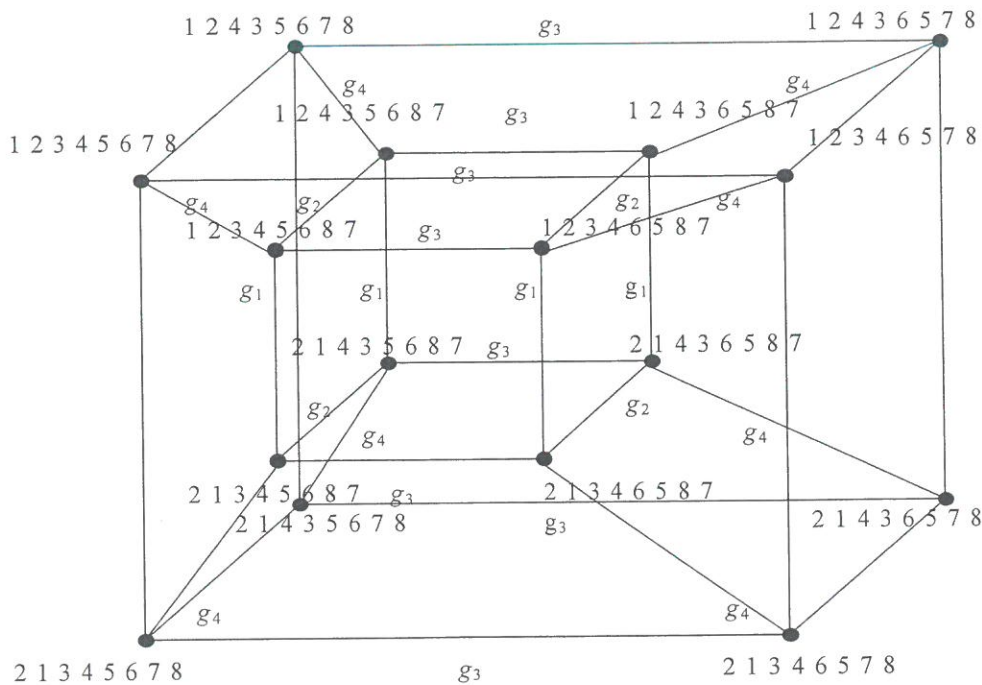


Figura 4: Un HCB cu 2^4 noduri reprezentat ca graf Cayley

Observăm în exemplele precedente că hipercuburile binare au fost reprezentate prin grafuri Cayley corespunzătoare unor subgrupuri ai căror generatori corespund dimensiunilor hipercuburilor binare. În general, un HCB cu 2^r noduri corespunde unui subgrup G_S compus din permutarea identitate și r generatori $g_1 = (2\ 1\ 3\ 4\ 5\ 6\ \dots\ (2r-1)\ (2r))$, ..., $g_r = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \dots\ (2r)\ (2r-1))$. Un HCB va fi deci corespunzător unui subgrup având ca generatori toate transpozițiile disjuncte care se pot forma pe mulțimea numerelor $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, (2r-1), (2r)\}$. De aceea putem spune, încă o dată, despre HCB că reprezintă o rețea structurată numai pe relații bilaterale.

Un HCB cu 2^4 noduri poate fi reprezentat ca graf Cayley al subgrupului de permutări de 8 simboluri obținut cu generatorii $g_1 = (2\ 1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)$, $g_2 = (1\ 2\ 4\ 3\ 5\ 6\ 7\ 8)$, $g_3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5\ 7\ 8)$ și $g_4 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 7)$, figura 4.

Localitatea de grup a acestui hiper cub este $L_8=8!/5=40320/5=8064$.

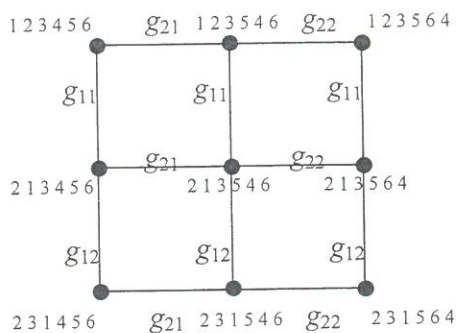


Figura 5: O hipergrilă cu 32 noduri reprezentată ca graf Cayley al subgrupului generat de $g_{11}=(2\ 1\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $g_{12}=(1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6)$, $g_{21}=(1\ 2\ 3\ 5\ 4\ 6)$ și $g_{22}=(1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5)$

Vedem în figura 4 cum un HCB cu 2^4 noduri poate fi construit din două HCB cu 2^3 noduri interconectate prin muchii aparținând dimensiunii a 4-a. Această proprietate de descompunere recursivă este o proprietate de grup și caracterizează diferite grafuri Cayley. S. B. Akers și B. Krishnamurthy definesc grafurile Cayley ierarhice ca fiind acele grafuri Cayley ale căror generatori pot fi ordonați într-un șir g_1, g_2, \dots, g_d astfel încât pentru orice $i, 1 < i < d$, g_i să fie în afara subgrupului generat de primii $(i-1)$ generatori. Pe baza acestei definiții se poate spune că orice graf Cayley ierarhic are o structură ce poate fi descompusă (compusă) recursiv.

Unele grafuri Cayley, în particular cele simetrice la muchii, sunt ierarhice pentru orice ordonare a mulțimii generatorilor. Aceste grafuri sunt numite puternic ierarhice. Spre exemplu, un HCB cu 2^r noduri, al cărui graf Cayley este puternic ierarhic, poate fi descompus pe oricare din cele r dimensiuni în două HCB cu 2^{r-1} noduri interconectate prin muchii în dimensiunea r .

3. Hipergrile generalizate

Cu transpoziții se mai pot construi și hipergrilele (generalizate, HGG). În exemplele care urmează dăm trei structuri de hipergrile. Lanțurile din figurile 1, b și 1, c sunt structurile elementare de interconectare care stau la baza exemplurilor care urmează.

Să considerăm generatorii $g_1 = (2\ 1\ 3)$ și $g_2 = (1\ 3\ 2)$. Plecând de la permutarea $1\ 2\ 3$ cu generatorul g_1 se obține permutarea $2\ 1\ 3$ și cu generatorul g_2 se obține, în continuare, $2\ 3\ 1$. Graful Cayley corespunzător acestor permutări obținute cu cei 2 generatori este un lanț cu 3 noduri, fig. 1, b.

Localitatea de grup a lanțului cu 3 noduri este $L_3=2$.

În figura 5 este reprezentată o hipergrilă bidimensională cu 3^2 noduri ca graf Cayley al subgrupului generat de $g_{11}=(2\ 1\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $g_{12}=(2\ 3\ 1\ 4\ 5\ 6)$, $g_{21}=(1\ 2\ 3\ 5\ 4\ 6)$ și $g_{22}=(1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 4)$.

Localitatea de grup a acestei hipergrile este $L_6=6!/5=144$.

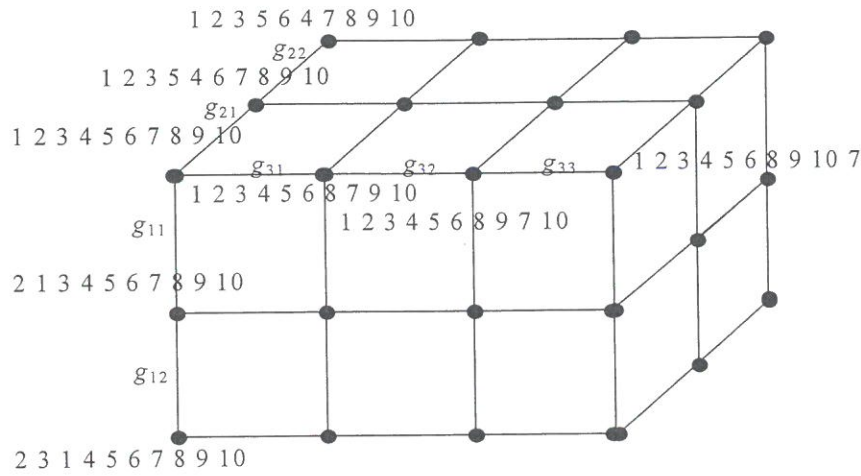


Figura 6: O HGG cu 3x3x4 noduri reprezentată (parțial) ca graf Cayley al subgrupului generat de $g_{11} = (2\ 1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$, $g_{12} = (1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$, $g_{21} = (1\ 2\ 3\ 5\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$, $g_{22} = (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10)$, $g_{31} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 7\ 9\ 10)$, $g_{32} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 9\ 8\ 10)$, $g_{33} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 10\ 9)$

O hipergrilă generalizată cu 3x3x4 noduri are ca SEI lanțul cu 3 noduri, figura 1, b, și cel cu 4 noduri, figura 1, c. Ca atare, dacă vrem să o reprezentăm ca graf Cayley trebuie să constituim următoarea mulțime de generatori:

$$\begin{aligned} g_{11} &= (2\ 1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10), \\ g_{12} &= (1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10), \\ g_{21} &= (1\ 2\ 3\ 5\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10), \\ g_{22} &= (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10), \\ g_{31} &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 7\ 9\ 10), \\ g_{32} &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 9\ 8\ 10), \\ g_{33} &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 10\ 9). \end{aligned}$$

Împreună cu permutarea identitate, generatorii de mai sus conduc la o HGG reprezentată ca graf Cayley, figura 6.

Localitatea de grup este $L_{10}=10!/8=3628800/8=453600$.

4. Hipertoruri

Torurile (T), hipertorurile (HT) și hipertorurile generalizate (HTG) au ca structură elementară de interconectare permutarea-ciclu. Permutările-ciclu generează grafuri Cayley orientate, circuite hamiltoniene. Să dăm câteva exemple de astfel de grafuri care reprezintă T, HT și HTG.

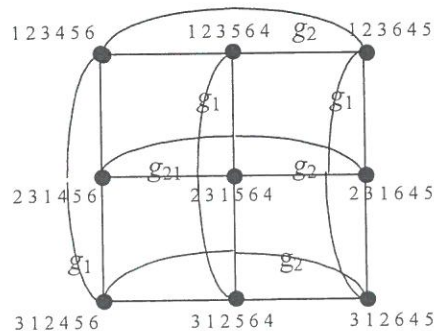


Figura 7: Un HT orientat cu 3^2 noduri reprezentat ca graf Cayley al subgrupului generat de $g_1=(2\ 3\ 1\ 4\ 5\ 6)$ și $g_2=(1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 4)$

Să considerăm generatorul-ciclu $g = (2\ 3\ 1)$. Cu acest generator și cu permutarea identitate ($G_S = \{I, C\}$) se obțin următoarele 3 permutări:

1 2 3,
2 3 1,
3 1 2.

Graful Cayley corespunzător acestor permutări obținute cu un ciclu de puterea 1 pe 3 simboluri este un tor cu 3 noduri și este un graf Cayley orientat, un circuit hamiltonian. El este echivalent grupului Z_3 sau C_3 .

Localitatea de grup a torului orientat cu 3 noduri este $L_3=3$.

În general, un ciclu de putere 1 pe n simboluri determină un graf Cayley care va fi reprezentarea unui tor orientat unidimensional cu n noduri.

Pentru a reprezenta un tor neorientat trebuie să considerăm încă un generator-ciclu de sens opus, $g=(3\ 1\ 2)$. Generatorul este un ciclu de puterea 2 pe 3 simboluri și cu el vom obține aceleași permutări ca mai sus. Diferența este că arcurile grafului Cayley vor fi în sens opus față de arcurile unui graf Cayley cu generatorul-ciclu $g = (2\ 3\ 1)$. Cu $G_S = \{I, C_1, C_2\}$ obținem un graf Cayley al torului neorientat, sau, mai bine spus, orientat în ambele sensuri pentru că nu are muchii propriu-zise, este o suprapunere de două circuite hamiltoniene. Localitatea de grup a torului neorientat este mai mică, $L_3=2$.

Generatorul format din 2 cicluri $g = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$ sau, ca să păstrăm coerența notației, generatorii $g_1=(2\ 3\ 1\ 4\ 5\ 6)$ și $g_2=(1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 4)$, determină un graf Cayley care va fi reprezentarea unui hipertor bidimensional orientat cu 3^2 noduri, fig. 7.

Localitatea de grup a acestuia este $L_6=6!/3=240$.

Ca să generăm un hipertor neorientat trebuie să mai introducem încă doi generatori-ciclu de sensuri opuse. Localitatea de grup a hipertorului neorientat cu 3^2 noduri va fi mai mică, $L_6=6!/5=144$.

În general un hipertor orientat cu $N=m^r$ noduri va avea drept graf Cayley un graf determinat de generatorul cu r cicluri, $(1\ 2\ \dots\ m)(m+1\ m+2\ \dots\ 2m)\dots(m^{r-1}+1\ m^{r-1}+2\ \dots\ m^r)$ sau de r generatori-ciclu de putere 1 pe m simboluri. Generarea ca graf Cayley a unui hipertor neorientat va fi făcută prin adăugarea a încă r generatori-ciclu de putere 1 pe m simboluri, de sens opus.

Un hipertor generalizat orientat cu $3 \times 3 \times 4$ noduri are ca generatori $g_1=(2\ 3\ 1\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$, $g_2=(1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 4\ 7\ 8\ 9\ 10)$ și $g_3=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 10\ 7)$.

Localitatea de grup a acestui HTG orientat este $L_{10}=10!/4=907200$.

Pentru a obține un HTG neorientat mai trebuie să adăugăm încă trei generatori-ciclu de sens opus. Localitatea de grup a acestui HTG neorientat va fi $L_{10}=10!/7=518400$.

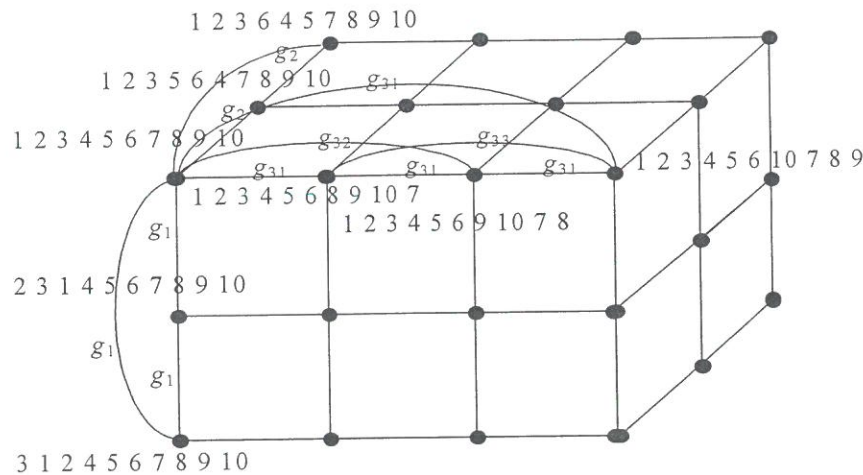


Figura 8: Un HCG cu $3 \times 3 \times 4$ noduri reprezentat (parțial) ca graf Cayley al subgrupului generat de $g_1=(2\ 3\ 1\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$, $g_2=(1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 4\ 7\ 8\ 9\ 10)$, $g_{31}=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 10\ 7)$, $g_{32}=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 7\ 10)$, $g_{33}=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 9\ 10\ 8)$

5. Hiper cuburi generalizate

Structura elementară de interconectare a hiper cuburilor (HC) sau a hiper cuburilor generalizate (HCG) este rețeaua complet conectată (RCC). Generatorii acestei structuri sunt ciclurile de diverse puteri pe diverse mulțimi de simboluri și transpozițiile. Ciclurile generează grafuri Cayley cu arcuri sau cu muchii în funcție de ordin și putere. Structurile RCC și rețelele care se bazează pe ele pot fi orientate, neorientate sau parțial orientate. Să parcurgem câteva exemple.

O RCC cu 5 noduri reprezentată ca graf Cayley are următorii generatori: trei cicluri de puterea 1 pe 3 noduri, $g_1=(2\ 3\ 1\ 4\ 5)$, $g_2=(1\ 3\ 4\ 2\ 5)$ și $g_3=(1\ 2\ 4\ 5\ 3)$; două cicluri de puterea 2 pe 4 noduri, $g_4=(3\ 4\ 1\ 2\ 5)$ și $g_5=(1\ 4\ 5\ 2\ 3)$; și, în fine, un ciclu de puterea 1 pe 5 noduri, $g_6=(2\ 3\ 4\ 5\ 1)$. Cele două cicluri de puterea 2 pe 4 noduri sunt un fel de transpoziții și au drept corespondent în graful Cayley care reprezintă RCC cu 5 noduri două muchii. De aceea acest graf Cayley este parțial orientat.

Localitatea de grup a acestei RCC parțial orientate este $L_5=5!/7=17.14$.

Pentru generarea unei RCC neorientate mai trebuie să introducem printre generatori patru permutări-ciclu de sens opus față de cele introduse mai sus. G_5 se mărește la 11 generatori și localitatea de grup se micșorează la $L_5=5!/11=10.9$.

În loc de ciclurile de puterea 1 pe 3 noduri se pot folosi următoarele transpoziții: $t_1=(3\ 2\ 1\ 4\ 5)$, $t_2=(1\ 4\ 3\ 2\ 5)$ și $t_3=(1\ 2\ 5\ 4\ 3)$. În condițiile acestea localitatea de grup a structurii RCC parțial orientate este aceeași. Dacă vrem să obținem o structură complet neorientată trebuie să mai adăugăm un singur ciclu de puterea 1 pe 5 noduri dar de sens opus celui introdus deja. Localitatea de grup devine $L_5=5!/8=15$.

Pentru rețeaua HCG din fig. 8, înfățișată doar parțial, pe două din dimensiuni nodurile sunt organizate sub forma unor toruri cu 3 noduri caracterizate de generatorul-ciclu de puterea 1 cu 3 noduri (g_1 și g_2). Pe dimensiunea a treia cele 4 noduri sunt organizate sub forma unei RCC. Acestei structuri elementare îi corespunde un graf Cayley având ca generatori un ciclu de puterea 1 cu 4 noduri (g_{31}) și două cicluri de puterea 1 cu 3 noduri pe care le notăm g_{32} și g_{33} . Pentru hiper cubul generalizat orientat din figura 8 vom avea deci următorii generatori:

$$\begin{aligned} g_1 &= (2\ 3\ 1\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10), \\ g_2 &= (1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 4\ 7\ 8\ 9\ 10), \\ g_{31} &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 10\ 7), \\ g_{32} &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 7\ 10), \\ g_{33} &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 9\ 10\ 8). \end{aligned}$$

Localitatea de grup a hiper cubului orientat din figura 8, L_{10} , este $10!/6 = 3628800/6 = 604800$.

Pentru a reprezenta același hiper cub dar neorientat, va trebui să mai introducem în G_5 încă 5 cicluri de sens opus celor pe care le-am introdus deja. Cu aceasta localitatea de grup devine $L_{10}=10!/11=329890.9$.

Dacă folosim în loc de g_{32} și g_{33} două transpoziții, localitatea de grup a HCG parțial orientat va fi $L_{10}=10!/6=604800$. În cazul în care, pornind de la această reprezentare, vrem să obținem un HCG neorientat, localitatea de grup va deveni $L_{10}=10!/9=403200$.

6. Structuri neomogene la legături

Structurile neomogene la legături, cum sunt hiperstructurile generalizate (HSG), se reprezintă ca grafuri Cayley având la bază structuri elementare de interconectare construite cu permutări. Pentru structurile din acest articol, permutările pe care le-am folosit, transpoziția și ciclul, ne ajung. HSG se codifică ca în [8, 9].

Să ilustrăm reprezentarea cu grafuri Cayley a unei HSG cu 6x8 noduri având vectorul de interconectare ($X^{21} \cup X^{22}$, $X^{11} \cup X^{12}$) codat ($T_{0+2} \cup RCC_{2+5}$, $T_{0+3} \cup STEA_{3+7}$), figura 9. Structurile elementare sunt torul, T, rețeaua complet conectată, RCC, și steaua, STEA.

Steaua este o SEI cu 5 noduri [8] care are ca generator un ciclu de puterea 2 pe 5 simboluri, $g = (3\ 4\ 5\ 1\ 2)$. Acest ciclu generează următoarele permutări:

$$\begin{aligned} &1\ 2\ 3\ 4\ 5, \\ &3\ 4\ 5\ 1\ 2, \\ &5\ 1\ 2\ 3\ 4, \\ &2\ 3\ 4\ 5\ 1, \\ &4\ 5\ 1\ 2\ 3. \end{aligned}$$

Localitatea de grup a unei SEI de tip STEA orientată este $L_5=5!/2=60$.

Pentru a reprezenta o STEA neorientată trebuie, ca și în celelalte cazuri de cicluri, să introducem un ciclu suplimentar de sens opus. Localitatea de grup a unei astfel de stele neorientate se micșorează la $L_5=5!/3=40$.

Pe prima dimensiune de 8 noduri avem două structuri SEI, un tor pe primele patru noduri, având ca generator:

$$g_{11} = (2\ 3\ 4\ 1\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14)$$

și o stea pe ultimele cinci noduri, având ca generator:

$$g_{12} = (1\ 2\ 3\ 6\ 7\ 8\ 4\ 5\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14).$$

Pe a doua dimensiune de șase noduri avem, de asemenea, două structuri elementare de interconectare, un tor pe primele trei noduri ale dimensiunii, având ca generator

$$g_{21} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 10\ 11\ 9\ 12\ 13\ 14)$$

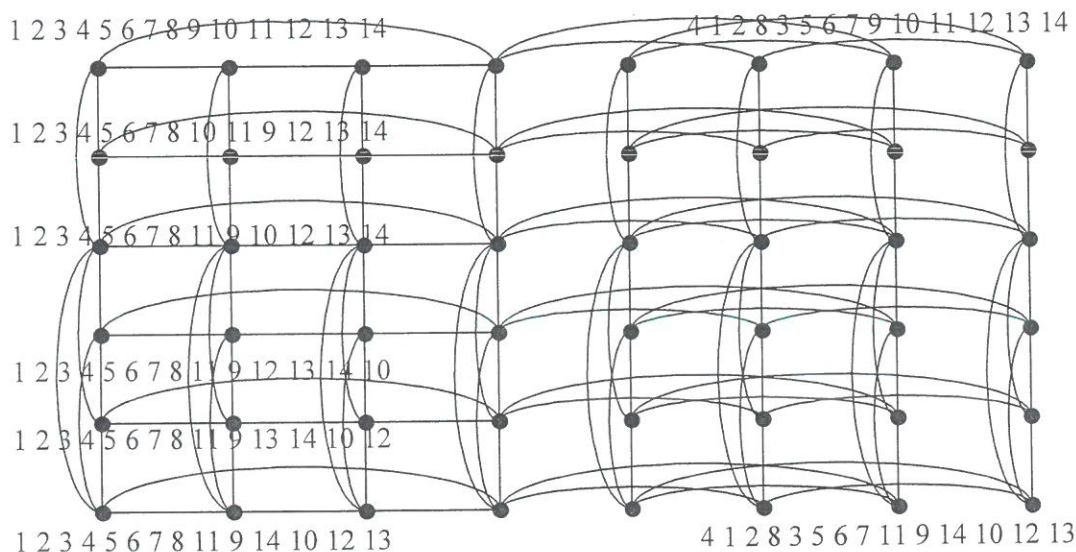


Figura 9: O hiperstructură generalizată cu $N=m_2 \cdot m_1=6 \cdot 8$. Vectorul de interconectare este $(X^{21} \cup X^{22}, X^{11} \cup X^{12})$ și HSG este codată $(T_{0+2} \cup RCC_{2+5}, T_{0+3} \cup STEA_{3+7})$

și o rețea RCC pe ultimele patru noduri. RCC se compune din trei generatori, un ciclu de puterea 1 pe patru noduri,

$$g_{22} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 12\ 13\ 14\ 11),$$

un ciclu de puterea 1 pe 3 noduri,

$$g_{23} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 12\ 13\ 11\ 14)$$

și un alt ciclu de puterea 1 pe 3 noduri,

$$g_{24} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 13\ 14\ 12).$$

Această hiperstructură generalizată este orientată. G_S are 7 generatori. Pentru a avea o HSG neorientată trebuie să mai introducem 6 cicluri de sens opus. G_S are în această situație 13 generatori.

Generatorii g_{23} și g_{24} se pot înlocui cu două transpoziții, hiperstructura generalizată devenind un graf Cayley parțial orientat.

Menționăm că hiperstructurile generalizate pe care le-am putut reprezenta ca grafuri Cayley au restricția ca structurile elementare de interconectare ce intră în componența unei dimensiuni trebuie să fie disjuncte, nu ca în definiția generală a HSG [8, 9].

7. Localitatea de grup ca o măsură a granularității interconectării

Dăm în tabelul care urmează localitățile de grup ale rețelelor ortogonale pe care le-am reprezentat ca grafuri Cayley.

Tabelul 1. Câteva localități de grup

Localitate de grup	Structură
$L_2=1$	Lanț cu 2 noduri
$L_4=8$	HCB cu 2^2 noduri
$L_6=180$	HCB cu 2^3 noduri
$L_8=8064$	HCB cu 2^4 noduri
$L_3=2$	Lanț cu 3 noduri
$L_6=144$	HG cu 3^2 noduri
$L_{10}=453600$	HGG cu $3 \times 3 \times 4$ noduri
$L_3=3$	T orientat cu 3 noduri
$L_3=2$	T neorientat cu 3 noduri
$L_6=240$	HT orientat cu 3^2 noduri
$L_6=144$	HT neorientat cu 3^2 noduri
$L_{10}=907200$	HTG orientat cu $3 \times 3 \times 4$ noduri
$L_{10}=518400$	HTG neorientat cu $3 \times 3 \times 4$ noduri
$L_5=17.14$	RCC cu 5 noduri parțial orientată
$L_5=10.9$	RCC cu 5 noduri neorientată
$L_5=15$	RCC cu 5 noduri neorientată
$L_{10}=604800$	HCG orientat cu $3 \times 3 \times 4$ noduri
$L_{10}=329890.9$	HCG neorientat cu $3 \times 3 \times 4$ noduri
$L_{10}=403200$	HCG neorientat cu $3 \times 3 \times 4$ noduri
$L_5=60$	STEA orientată
$L_5=40$	STEA neorientată

Din acest tabel, comparând de exemplu rețeaua complet conectată cu 5 noduri și STEA-ua cu 5 noduri, observăm că localitățile de grup sunt mai mici la RCC decât la STEA. Granulele interconectate în RCC sunt mai mici decât granulele interconectate în STEA în spațiul arhitectural S_5 . În acest fel, localitatea de grup este o măsură a granularității interconectării ce ne va fi de folos la definirea unei alte paradigme a interconectării bazată nu atât pe distanțele logice între noduri cât mai ales pe proprietățile de simetrie ale interconectărilor.

8. Concluzii

Cu ajutorul transpozițiilor (cicluri de ordinul 2) și ciclurilor propriu-zise de diverse puteri pe diverse mulțimi de simboluri (noduri) putem obține grafuri Cayley care să reprezinte rețele de tipul HGG, HTG, HCG sau HSG. Fiecărei dimensiuni îi va corespunde un graf Cayley elementar corespunzător structurii elementare de interconectare, SEI. Această SEI va fi un graf Cayley reprezentat ca un subgrup de permutări cu generatorii săi. Reținem, ca idee generală, că diferite tipuri de permutări determină diferite topologii omogene, de exemplu, transpozițiile sunt folosite la reprezentarea hipercuburilor binare și a HGG iar ciclurile la reprezentarea HTG și a HCG. Și mai este o idee la fel de generală: orice structură poate fi reprezentată ca graf Cayley având ca generatori o mulțime de transpoziții. Diferențele sunt în localitățile de grup.

Bibliografie

1. AKERS, S. B., B. KRISHNAMURTHY: A Group - Theoretic Model for Symmetric Interconnection Networks. În: IEEE Trans. on Computers, Vol. 38, No. 4, April 1989, pp. 555-566.
2. DUATO, J., S. YALAMANCHILI, L. NI: Interconnection Networks. An Engineering Approach, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, 1997.
3. HENNESSY, J., D. A. PATTERSON: Computer Architecture. A Quantitative Approach, Morgan Kaufmann Pub. Inc, San Mateo, California, 1990.

4. **HILLIS, W. D.:** The Connection Machine, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1985.
5. **LUPU, C.:** Despre simetrie și izomorfism la rețele de interconectare directe. În: Revista Română de Informatică și Automatică, vol. 15, nr. 1, 2005, pp. 47-52.
6. **LUPU, C.:** Interconectarea. Localitate și simetrie în rețele ortogonale de calculatoare, Editura Tehnică, București, 2004.
7. **LUPU, C.:** Rețele ortogonale. În: Revista Română de Informatică și Automatică, vol. 11, nr. 2, 2001, pp. 28-36.
8. **LUPU, C.:** Localitatea de interconectare. În: Revista Română de Informatică și Automatică, vol. 11, nr. 4, 2001, pp. 32-40.
9. **LUPU, C.:** Locality Measured By Contour Patterns. A Topographic Model. În: Proc. of the 15th IASTED International Conference on Modelling and Simulation, Marina Del Rey, California, March 1-3, 2004, pp. 50-54.
10. **ROMAN, T.:** Simetria. Prezentare matematică a unor fenomene din natură și artă, Editura Tehnică, București, 1963.
11. **ZHUGE, H.:** The Future Interconnection Environment. În: Computer, vol. 38, nr. 4, 2005, pp. 27-33.
12. **WEYL, H.:** Simetria, Traducere în limba română, Editura științifică, București, 1966.