AXIOMATICA ŞI ŞTIINȚA DE TIP MATEMATIC

Paul Sfetcu

psfetcu@yahoo.com

Institutul Național de Cercetare - Dezvoltare în Informatică, ICI, Bucureşti

Rezumat: În articolul de față arătăm modul în care a evoluat conceptul de axiomatică (paralel cu cel de ştiință, dezvoltată pe baze matematice) şi îl vom pune în contrast cu ideile care au stat la baza ştiinței în Antichitate (în gândirea grecească, materializată în operele filosofice scrise de Platon şi de Aristotel şi regăsite apoi şi în opera scolasticilor).

Oamenii de ştiință moderni (în special matematicienii) au conceput axiomatica doar ca să imite structura unei ştiințe veritabile, aşa cum a edificat-o Aristotel în *Organon*. Fără îndoială că această structurare a datelor ştiințifice are un rol ordonator în explozia informațională de date (care cresc exponențial într-o ştiință care are la bază empirismul materiei), dar ea nu poate aduce nici un aport de ordin teoretic în ceea ce priveşte fundamentele matematicii şi ale gândirii.

Cuvinte cheie: ştiință, adevăr şi fals, axiomatizare, formalizare, axiomă, postulat, sistem formal, grup axiomatic, aritmetizarea lui Gödel, independența axiomelor, demonstrație şi transformare

Abstract: In this paper we follow the way the axiomatic concept evolved and we are going to put it in contrast with the Ancient Greek thinking – namely Aristotle, Plato and their followers, the scholastics. Modern scientists, especially mathematicians conceived Axiomatics only as an imitation of the real structure of a genuine science as it was conceived by Aristotle in *Organon*. Since data volume increases exponentially in a science based on empiricism there is no doubt that this structuring of scientific data has a ranking function in mastering the modern data explosion but it cannot bring any theoretical contribution concerning the foundations of Mathematics and modern thought.

Key words: science, truth and false, axiomatization, formalization, axiom and postulate, formal system, axiomatic group, Gödel's arithmetization, demonstration and transformation

1. Introducere

În articolul de față vom arăta modul în care a evoluat conceptul de axiomatică (paralel cu cel de ştiință, dezvoltată pe baze matematice) şi îl vom pune în contrast cu ideile care au stat la baza ştiinței în Antichitate (în speță, gândirea grecească, materializată în operele lui Aristotel).

O dată cu căderea Scolasticii şi apariția Renaşterii, gândirea a părăsit dogmele în care Thomas de Aquino l-a ferecat pe Aristotel şi s-a îndreptat din nou spre realitatea exterioară şi cunoaşterea ei. Pentru aceasta, ea avea nevoie de un aparat puternic cu care să palpeze lumea materială, din care să scoată legile naturii. Gânditorii Renaşterii s-au îndreptat spre matematică, aceasta având o simbolistică moştenită de la scolastică, dar care nu mai era pusă în mişcare de intuiția de tip aristotelic, susceptibilă să provoace confuzii.

Totuşi, structura axiomatică aristotelică a ştiinței a predominat până în timpul nostru, mai precis până la începutul secolului nostru. În această concepție, ştiința trebuie să plece de la evidențe şi să aibă o bază empirică (fiindcă «evidențele», deşi sunt descoperite de intelectul «superior» sau «activ», sunt extrase din materia individualizată). Cu aceasta, ştiința are o dublă față: noetică şi ontologică.

De pe la anul 1600 (dezbaterile istorice pot fi urmărite însă mult mai departe, până în Antichitate), ştiința lui Aristotel se bifurcă: pe de o parte, avem numai fața rațională a ştiinței, pe de alta, numai fața empirică a ştiinței.

De exemplu, raționalismul – aşa cum este profesat de Descartes –, se inspiră în primul rând din ideile aristotelice de evidență şi din postulatul deductibilității, pe când empirismul lui Locke se inspiră mai cu seamă din aspectul empiric al concepției Stagiritului.

2. Concepția modernă despre știință

În aceste condiții, apare o nouă viziune asupra științei, bazată pe schimbarea de optică asupra matematicii, chemată să aibă rolul determinant. Kant o va afirma în mod hotărât: o știință există în măsura în care are înglobată în ea matematica.

Dacă se examinează un anumit domeniu științific, se vede că faptele care aparțin acestui domeniu sunt puse într-o anumită ordine. «Ordinea aceasta – scrie David Hilbert în *Axiomatisches Denken* (1918) – este obținută întotdeauna cu ajutorul unui anumit *sistem de concepte*, astfel încât fiecărui obiect individual din cadrul domeniului științific respectiv îi corespunde un concept al sistemului, iar fiecărui fapt din cadrul domeniului îi corespunde o relație logică între concepte. Sistemul de concepte nu este altceva decât *teoria* domeniului științific».

Problema sistemului de concepte şi a ordinii din interiorul lui a devenit ea însăşi o problemă a metodei științifice şi poartă numele de axiomatică.

În secolul al XIX-lea s-au precizat câteva fapte care au condus mai târziu la o nouă concepție despre axiomatică. Mai întâi, încercările istorice de a demonstra postulatul lui Euclid s-au dovedit zadarnice. Printr-o revoluție a gândirii, Bolyai şi Lobacevski reuşesc simultan, deşi independent, să construiască geometrii perfect coerente, considerând că postulatul lui Euclid este fals. S-au putut astfel construi corpuri de propoziții geometrice perfect articulate, deşi s-a eliminat din grupul de propoziții axiomatice celebrul postulat.

În a doua parte a secolului, matematicienii s-au ocupat în mod special de bazele logice ale științei lor. Lucrările lui Dedekind şi Cantor au fost decisive în această direcție; ele s-au finalizat în teoria mulțimilor, menită să fundamenteze aritmetica şi prin aceasta analiza şi, prin urmare, matematicile în întregime.

Totuşi, teoria mulțimilor s-a izbit de la început de câteva dificultăți, dintre care cea mai gravă a fost aceea că în interiorul ei s-au ivit unele contradicții imposibil de evitat. Pentru a le înlătura, matematicienii şi logicienii s-au gândit să apeleze la axiome suplimentare, care să împiedice construirea unor propoziții susceptibile să degenereze în contradicții.

Faptele de genul acesta s-au multiplicat în special la începutul secolului nostru, când fizica a dat, în unele experiențe, peste situații imposibil de explicat şi de admis. Se ştie că experiențele lui Michelson - Morley pentru măsurarea vitezei absolute a Pământului au dat un rezultat absurd: cu toată precizia uimitoare a aparatelor de măsură şi cu toate că experiența a fost repetată, luându-se cele mai mari precauții, rezultatul acestor măsurători a condus la concluzia inadmisibilă că Pământul este nemişcat, că are viteza zero. Pentru a explica acest rezultat – şi numai pentru aceasta –, a trebuit să se introducă o axiomă arbitrară: aceea a contracției dimensiunilor unui corp în mişcare în raport cu viteza pe care o are.

Această axiomă a fost acceptată de oamenii de știință, iar Einstein a admis în mod explicit că ea este imposibil să fie verificată sau confirmată. **Sub autoritatea lui, odată făcut începutul acesta, fizica nu a mai ținut deloc seama de indicația aristotelică a evidenței adevărului unei axiome, ci a deschis larg poarta admiterii axiomelor, devenite acum ipoteze, dacă acestea sunt capabile să explice rezultatele experimentale luate în considerație**. Cu alte cuvinte, părăsind structura aristotelică a teoriei, care începe de la adevăruri evidente (nedemonstrate) şi sfârşeşte în adevăruri demonstrate, știința modernă a răsturnat teoria; ea caută axiome-ipoteze care să explice faptele sau să le prevadă, fără a se mai interesa de axiomele de la care pleacă.

Epoca noastră concepe axiomele unei teorii științifice ca fiind simple elemente organizatorice ale schemei conceptuale a teoriei; ele au un rol metodologic şi nu un caracter noetic. De unde libertatea de a alege axiomele aşa cum vrem – bineînțeles în anumite limite – şi de a construi teorii aşa cum voim, cu sau fără unele axiome.

Vom preciza acum caracteristicile acestei concepţii, care nu apare brusc, ci este întrevăzută încă din secolul al XVII-lea. De exemplu, J. H. Lambert (*Theorie der Parallellinien*, 1786) cercetând teoria paralelelor, îşi dă seama că «fundamentarea geometriei trebuie să facă abstracţie de reprezentarea lucrului» şi că «demonstraţiile trebuie să fie expuse pur simbolic».

Concluzia aceasta este o consecinţă necesară dacă nu se mai are în vedere adevărul propoziţiilor primitive, ci studiul compatibilităţii tuturor propoziţiilor unei teorii, aşa cum este cazul cu sistemele formale actuale.

Cel care a enunţat însă pentru prima dată condiţiile axiomatice ale unei teorii în formă modernă este Moritz Pasch în *Vorlesungen über die moderne Geometrie* (Leipzig, 1882). El desparte cu toată rigurozitatea conceptele matematice în două categorii: definite şi nedefinite. Propoziţiile sunt grupate de asemenea în două categorii: propoziţii principale şi propoziţii demonstrate. Ideea lui Pasch este următoarea: matematica pune în evidenţă relaţii între conceptele matematice, care trebuie să corespundă faptelor din experienţă, dar în marea lor majoritate nu sunt împrumutate din experienţă, ci «demonstrate». De fapt, scrie el, dacă geometria vrea să fie cu adevărat deductivă, trebuie ca procesul deducţiei să fie peste tot independent de *sensul* conceptelor geometrice, aşa cum trebuie să fie independent de figuri; se pot lua în considerare numai *relaţiile* dintre conceptele geometrice incluse în propoziţiile, respectiv, în definiţiile folosite. În *cadrul* deducţiei, este desigur permis şi util – *dar în nici un caz necesar* – să ne gândim la semnificaţia conceptelor geometrice care apar; în cazul că acest lucru devine necesar înseamnă tocmai că deducţia are lacune, că propoziţiile premergătoare sunt insuficiente ca mijloace de demonstraţie.

Ideea că demonstraţia – şi cu aceasta teoria întreagă – trebuie să fie independentă de semnificaţia conceptelor (şi prin aceasta a propoziţiilor) a fost teoretizată de David Hilbert. Pentru el, problema fundamentelor logice ale matematicilor este o problemă *despre* matematică, iar ştiinţa care se va ocupa de această problemă va fi *metamatematica.* Aceasta este o logică specială, care nu este independentă de matematică: noţiunile fundamentale logice presupun noţiuni fundamentale aritmetice şi noţiunile matematice presupun noţiuni de bază logice. Întregul sistem logico-matematic al unei teorii va consta dintr-un angrenaj de simboluri, fiindcă el elimină explicit orice conţinut din aceste simboluri. Aşa cum spune Reymond în lucrarea *Les principes de la logique et la critique contemporaine*, «este un joc de forme pure, căci din datele primitive nu se consideră decât capacitatea lor de a fi ordonate într-un mod sau altul şi formele noi ce se construiesc nu sunt decât relaţiile originare, privite din alt punct de vedere».

Iată cum procedează Hilbert (*Über die Grundlagen der Geometrie*, 1902) pentru a construi, de exemplu, sistemul formal al geometriei euclidiene.

Concepem, spune el, trei sisteme de obiecte: numim obiectele primului sistem *puncte* şi le notăm cu A, B, C, ...; numim obiectele celui de-al doilea sistem *drepte* şi le notăm cu a, b, c, ...; numim obiectele celui de-al treilea sistem *plane* şi le notăm cu α, β, γ, ...; punctele se mai numesc şi *elemente ale geometriei liniare*, punctele şi dreptele se numesc *elemente ale geometriei plane* şi punctele, dreptele şi planele se numesc *elementele geometriei în spaţiu*.

Concepem, spune Hilbert mai departe, punctele, dreptele şi planele în anumite relaţii reciproce şi numim aceste relaţii prin cuvinte ca: «a fi situat», «între», «a fi paralel», «congruent», «continuu»; descrierea exactă a acestor relaţii se obţine prin *axiomele geometriei.*

Putem împărţi axiomele geometriei în cinci grupe; fiecare grupă exprimă anumite fapte fundamentale care aparţin împreună intuiţiei noastre. Aceste grupe de axiome le numim în modul următor:

$I_1 – I_8$ opt axiome de incidenţă;

$II_1 - II_4$ patru axiome de ordonare;

$III_1 - III_5$ cinci axiome de congruență;

IV axioma paralelelor;

V_1-V_2 axioma de continuitate.

Aceste axiome au nevoie de o examinare mai aprofundată. În primul rând, pentru a asigura coerența sistemului, ele trebuie să fie *necontradictorii*; în al doilea rând, ele trebuie să fie *independente;* în sfârşit, ele trebuie să fie *complete*, pentru ca toate teoremele să poată fi deduse din aceste axiome.

Hilbert îşi alege atâtea axiome câte îi trebuie, şi aceasta în mod liber. El reconstruieşte astfel geometria într-un mod care să îi dea o schemă conceptuală riguroasă, dar nu ține seama de modul construcției ei naturale şi istorice. **Rezultatul acesta este o consecință a concepției moderne despre adevărul propozițiilor matematice şi în special al axiomelor: acestea, fiind golite de conținut, sunt golite şi de adevăr, iar acceptarea lor se face prin alegere liberă.**

De la această concepție – a libertății de alegere a axiomelor –, s-a ajuns la ideea că ele sunt convenții. Primul care a enunțat în mod explicit ideea că axiomele geometriei sunt convenții a fost celebrul matematician francez Henri Poincaré. Iată textual ce scrie el (*La science et l'hypothèse*,1909): «Axiomele geometriei nu sunt deci nici judecăți sintetice apriori, nici fapte experimentale. Ele sunt convenții; alegerea noastră, dintre toate convențiile posibile, este *ghidată* de fapte experimentale, dar ea este *liberă* şi nu este limitată decât de necesitatea de a evita orice contradicție. În felul acesta, postulatele pot rămâne *riguros* adevărate, chiar atunci când legile experimentale care determină adoptarea lor nu sunt decât aproximative. Cu alte cuvinte, *axiomele geometriei* (nu vorbesc de cele ale aritmeticii) nu sunt decât definiții deghizate». În concepția modernă a teoriei, punctul de plecare este prin urmare convențional. Acest lucru apare în mod natural, o dată ce conținutul conceptelor şi propozițiilor nu trebuie să mai joace nici un rol în desfăşurarea teoriei. Convenționalismul şi formalismul sunt o consecință naturală a concepției conform căreia axiomele sunt numai necesități metodologice, pentru a da posibilitatea construirii unei teorii, dar nu au nici un caracter noetic şi nu se poate pune problema dacă ele sunt adevărate sau nu.

Examinarea atentă a construcției unei ştiințe a condus la separarea riguroasă a părților din care aceasta este compusă. S-a văzut astfel că o serie de concepte şi de propoziții sunt acceptate în fruntea unei ştiințe fără a fi definite şi, respectiv, fără a fi demonstrate; alte concepte sunt introduse prin definiție, fiind formate cu ajutorul unor procedee de definire date, cu ajutorul primelor concepte; o serie de propoziții sunt derivate prin procedee date de derivare, din propozițiile acceptate fără demonstrație. Descrierea completă şi explicită a diverselor părți ale unei ştiințe, a procedeelor de definire şi de derivare utilizate în cadrul ei, a condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească partea zisă axiomatică (concepte şi propoziții «primitive», acceptate în cazul ştiinței respective) formează obiectul metodei axiomatice.

Pentru Hilbert, tot ceea ce poate constitui, în general, obiectul gândirii ştiințifice, revine metodei axiomatice şi prin aceasta revine mijlocit matematicii. El crede că metoda axiomatică ne face să sesizăm cu adevărat esența gândirii ştiințifice, iar această metodă este de fapt metoda matematică. De unde credința lui Hilbert, exprimată astfel în încheierea studiului citat: «Sub auspiciile metodei axiomatice, matematica pare a fi chemată să dețină un rol conducător în cadrul ştiinței în general». Cu alte cuvinte, metoda axiomatică este metoda matematică de construire a unei ştiințe şi ea tinde să devină metoda prin excelență a oricărei ştiințe.

În rezumat, metoda axiomatică descrie în mod explicit organizarea internă a unei ştiințe, punând în evidență toate categoriile de obiecte şi de propoziții care apar în interiorul ştiinței respective şi motivele în virtutea cărora ele sunt acceptate.

3. Condițiile pe care trebuie să le satisfacă grupul axiomatic

Preocuparea pe care au avut-o gânditorii din Antichitate în ceea ce priveşte edificarea unei teorii era să găsească în primul rând condițiile adevărului unei propoziții, adică acele criterii *din afara* teoriei care fac ca noțiunile primitive şi propozițiile primitive să fie acceptate.

Aristotel ne dă în *Analitice* condițiile pe care trebuie să le îndeplinească axiomele pentru a avea poziția statutului de prim motor al unei demonstrații ştiințifice. Prin aceasta el face distincția netă între adevărurile de la baza unei teorii şi adevărurile care derivă din acestea. Primele trebuie să fie **mai bine cunoscute decât cele din urmă**, altfel nu avem ştiință. Dar cunoaşterea lor nu se face prin demonstrație, ci prin intelectul activ, printr-o contemplare, adică o viziune directă.

Dacă această idee este părăsită, nu mai există decât o singură preocupare: aceea a stabilirii raportului interior, dintre elementele teoriei.

Schema formală generală a unei teorii deductive apare astfel:

I. Partea axiomatică:

1. Termeni nedefiniți;
2. Propoziții primitive (axiome);
3. Reguli de derivare
   a) pentru termeni (definiții);
   b) pentru propoziții (reguli de deducție).

II. Partea derivată:

4. Termenii definiți;
5. Propozițiile demonstrate (teoreme).

În general, se consideră ca parte axiomatică numai grupul de propoziții primitive (axiome) dar, după cum se vede, termenii nedefiniți, precum şi regulile de derivare (a termenilor şi propozițiilor) fac parte din grupul axiomatic. Atât regulile de definire, cât şi regulile de deducție sunt acceptate axiomatic şi ele deci trebuie să fie supuse unui examen tot atât de riguros ca şi axiomele propriu-zise ale unei teorii deductive. Ceea ce, în general, nu s-a făcut şi s-au acceptat reguli de definiție şi de deducție printr-o alegere liberă, fără a se demonstra că ele sunt necesare şi suficiente.

Iată acum modul în care Rudolf Carnap expune în *Abriss der Logistik* (Viena, 1929) condițiile interioare pe care trebuie să le satisfacă termenii primitivi şi axiomele unei teorii. Toate acestea privesc numai dependența lor reciprocă.

Termeni

– Conceptele domeniului vor fi ordonate în modul următor: anumite concepte – «conceptele fundamentale» – vor fi aşezate la începutul teoriei.

– Toate celelalte concepte vor fi «concepte derivate» din acestea prin definiții. Sistemul conceptelor fundamentale este supus următoarelor condiții:

– Conceptele fundamentale trebuie să fie suficiente pentru definirea celorlalte concepte.

– Definițiile trebuie să fie necontradictorii.

– Condiția de economie. Conceptele fundamentale trebuie să fie necesare pentru definirea celorlalte concepte. Cu alte cuvinte, grupul de concepte fundamentale trebuie să fie insuficient dacă se elimină unul dintre ele; sau nici unul dintre aceste concepte nu poate fi definit din celelalte concepte fundamentale (condiția de independență).

Propoziții

– Propozițiile domeniului vor fi ordonate în modul următor: anumite propoziții – «propozițiile», «axiomele» –, vor fi așezate la începutul teoriei.

– Toate celelalte propoziții vor fi derivate ca teoreme din axiome.

Sistemul axiomelor este supus următoarelor condiții:

– Axiomele trebuie să fie suficiente pentru deducerea celorlalte propoziții.

– Axiomele trebuie să fie necontradictorii.

– Condiția de economie. Axiomele trebuie să fie necesare pentru deducerea celorlalte propoziții; sau, altfel, grupul axiomatic de propoziții trebuie să fie insuficient dacă se elimină una dintre axiome; sau încă, nici o axiomă nu poate fi dedusă din celelalte axiome (condiția de independență).

Pe scurt, termenii primitivi și propozițiile primitive trebuie să satisfacă următoarele trei condiții: 1) suficiență; 2) necontradicție; 3) independență.

Cercetarea și găsirea unor metode de rezolvare a acestor trei condiții fac în special obiectul axiomaticii și au ridicat probleme dificile.

Se vede că ceea ce deosebește axiomatica modernă de cea aristotelică este tocmai punerea acestor probleme, a căror rezolvare cere eforturi foarte mari. De altfel, rezolvarea acestor probleme nu s-a putut face decât în cazuri particulare. Vom sublinia că aceste trei probleme s-au ivit tocmai din cauza conținutului conceptului de teorie din matematicile moderne care, nemaiavând un contact cu realitatea care să o garanteze, a trebuit să fie o schemă care se garantează singură.

4. Sistemele formale

După cum se remarcă din cele spuse anterior, de la Aristotel și până în timpul nostru, conceptul de teorie deductivă a suferit o serie de modificări. J. Vuillemin crede că poate distinge în această evoluție trei etape.

1. *Prima etapă* corespunde *axiomaticii materiale.* Geometria, dioptrica și catoptrica lui Euclid, statica lui Arhimede, mecanica cerească a lui Newton, termodinamica lui Clausius sunt exemple de științe de acest tip. La stadiul acesta se disting, într-o teorie științifică, principii nedemonstrabile sau «propoziții imediate» și teoremele pentru a putea reieși în mod clar care sunt principiile de care depinde o teoremă. Aici, definițiile sunt explicite: cuvintele limbajului axiomatic sunt semne care se referă la lucruri existente, cărora ele le dau un criteriu distinctiv fie că sunt lucruri concepute ca existente în mod real (când se dau în plus procedeele de construcție), fie că sunt concepute ca fiind numai posibile.

2. *A doua etapă* corespunde *axiomaticii formale*, care este un nou grad de abstracție. Nu se mai admit lucruri a căror realitate sau posibilitate ar preceda de drept stipulațiile axiomelor și ar risca totdeauna să le debordeze în fapt, ci se substituie definițiilor explicite definiții implicite. La acest stadiu, trebuie să fie eliminate toate elementele care, prin efectul habitudinilor mentale, sunt adăugate stipulărilor efective, pentru a nu admite decât pe acelea pe care le comandă axiomele. Sistemele se constituie atunci independent de diverse interpretări posibile sau de modele care ar putea fi date. Ele devin forma unei teorii ca putând *a priori* să trateze cu același succes toate aplicațiile izomorfe. Cartea a V-a a *Elementelor* lui Euclid, silogistica lui Aristotel, axiomatica lui Zermelo etc. pot ilustra ca exemple o asemenea axiomatică formală.

3. *Axiomatica formalistă* se distinge de axiomatica formală şi aduce în plus o teorie proprie a demonstraţiei. Logica propoziţiilor la stoici anticipează acest stadiu atins abia de metamatematica lui Hilbert. Singurele probleme care se pun pentru un sistem formal sunt acelea de necontradicţie, suficienţă şi independenţă. Întreg sistemul este construit prin alegere liberă.

Explicaţiile care însoţesc axiomele şi regulile sistemului nu sunt indispensabile; ele sunt destinate numai să faciliteze lectura expresiilor simbolice. Sistemul are un sens prin el însuşi, independent de orice explicaţie sau interpretare.

Iată acum ceea ce este caracteristic acestei axiomatici formaliste, aşa cum precizează Ladrière: «Trecerea la axiomatica formală modifică profund sensul axiomaticii: prioritatea care este acordată enunţurilor luate ca punct de plecare devine într-adevăr relativă. Ea nu mai este fondată pe simplitate sau pe un mai mare grad de evidenţă, ci numai pe comoditate. Alegerea enunţurilor iniţiale devine în întregime arbitrară. În principiu, orice sistem de enunţuri poate fi luat ca sistem de axiome; singurul lucru care interesează este să se poată deduce din ele întreaga teorie. Cu alte cuvinte, sistemul axiomatic nu mai are ca scop de a face să apară ordinea naturală care există între enunţurile unei teorii, ci de a introduce o ordine care, în sine, poate fi oricare».

5. Construcţia unui sistem formal

Iată în continuare modul în care se construieşte un sistem formal în mod axiomatic şi care sunt problemele care se ridică cu privire la el.

După cum s-a văzut, conceptul de teorie deductivă a fost înlocuit cu acela de sistem formal. Un sistem formal, spune Ladrière, este o mulţime de teoreme care se obţin cu ajutorul unor reguli precise şi obiective. Ladrière găseşte două părţi distincte într-un sistem formal: o parte *morfologică*, care descrie constituenţii sistemului, şi o parte *axiomatică*, ce defineşte o clasă de teoreme.

A. Morfologia

Aceasta cuprinde două părţi:

1. *Componentele sistemului*, care va cuprinde:

   a) o listă de componente primitive;

   b) o listă de operaţii asupra acestor componente;

   c) reguli de formare, cu ajutorul cărora se pot fabrica noi componente, plecând de la cele primitive.

2. *Propoziţiile sistemului* (asamblaje de semne care au un sens), parte care va indica:

   a) o listă de operatori propoziţionali;

   b) reguli de formare, care indică cum se pot forma, cu ajutorul componentelor sistemului, *propoziţii elementare* şi cum se pot obţine din acestea *propoziţii complexe.*

B. Partea axiomatică

Aceasta va cuprinde:

a) o listă de propoziţii considerate valabile (axiome);

b) reguli de derivare, cu ajutorul cărora se obţin propoziţii valabile din altele valabile.

Cu privire la un sistem formal, H. B. Curry (*Some Aspects of the Problem of Mathematical Rigor*, 1941) consideră că sunt trei lucruri care trebuie menţionate în mod distinct: *prezentarea*, *reprezentarea* şi *interpretarea*.

1. *Prezentarea unui sistem*

Aceasta este construcția formală a sistemului sau formularea lui cu ajutorul unei mulțimi de simboluri.

2. *Reprezentarea unui sistem*

Punerea în corespondență biunivocă a componentelor primitive cu elementele unei clase bine definite de obiecte se numeşte reprezentarea sistemului. Aceasta înseamnă o «concretizare» a sistemului.

3. *Interpretarea unui sistem*

Interpretarea diferă de reprezentare deoarece corespondența se face între propozițiile elementare ale sistemului şi o clasă dată oarecare de enunțuri, al căror adevăr (sau falsitate) este determinat, în mod independent de sistem. Propozițiilor derivabile din sistem le corespund atunci *enunțuri adevărate*.

În definitiv, construcția sistemului ca sistem este un simplu joc de simboluri, conform unor reguli precis date. Sistemul capătă un sens *ad hoc* prin interpretarea lui, şi anume un sens teoretic.

Pentru mai multă precizie, vom adăuga că, din punct de vedere tehnic, interpretarea unui sistem se leagă de noțiunea de model. Iată cum descrie noțiunea de model Ladrière.

Un *model* este o mulțime de elemente *Mn* puse în corespondență cu componentele unui sistem *S*, astfel încât:

1. propozițiilor din sistemul *S* le corespund enunțuri formate cu elementele mulțimii *Mn*;
2. se poate determina, independent de sistemul *S*, dacă un atare enunț este adevărat sau fals;
3. propozițiilor derivabile din *S* le corespund enunțuri adevărate din *Mn*.

Interpretarea unui sistem revine astfel la construirea unui model pentru sistem.

6. Multiplicitatea modelelor

Am văzut că sistemul capătă o interpretare în momentul în care i se construieşte un model. Sistemul formal, fiind construit arbitrar, nu are nici o legătură cu modelul cu care este pus în corespondență biunivocă. De unde rezultă în mod principial posibilitatea de a construi oricâte modele voim pentru acelaşi sistem. Acest lucru este considerat de către unii filosofi ai matematicilor ca un progres față de axiomatica veche. Interpretarea arbitrară a unui sistem este însă o consecință inevitabilă a construcției lui convenționale şi lipsite de orice contact din afară. Aceasta înseamnă: deoarece un sistem poate avea o serie infinită de modele, structura logico-formală pe care o dă acelui model nu aparține în mod esențial modelului. Cu alte cuvinte, nu avem aici decât următoarele alternative:

1) sau sistemul formal nu reprezintă nici o structură, de aceea poate avea interpretări diferite, prin modele diferite;

2) sau el reprezintă numai o schemă ordonatoare convențională, pentru ca modelul să fie organizat, dar nu avem nici o indicație că el ar fi chiar organizarea propozițiilor adevărate din model.

Am putea da o serie de exemple pentru a arăta că asemenea construcții axiomatice arbitrare nu au nici o putere de a arăta specificitatea unui model (adică a unei mulțimi de propoziții adevărate): de pildă, faptul că în sistemul formal al lui Russell şi Whitehead din *Principia mathematica* există o pluralitate de sisteme de numere naturale. Cum am spus, acest rezultat este imposibil de evitat pentru orice sistem formal construit axiomatic în mod arbitrar, fiindcă în felul acesta el nu se poate pune în corespondență cu un model unic, a cărui specificitate ar reda-o, ci cu o serie infinită de modele. Pe lângă acestea, Russell mai introduce şi o serie de axiome cu care încearcă fundamentarea aritmeticii: Teoria (ramificată) a tipurilor, Axioma infinitului, Axioma alegerii, Axioma de reductibilitate.

Faptul acesta (al pluralității sistemelor de numere naturale) este caracterizat de Fraenkel şi Bar-Hillel (*Le problème des antinomies* în «Revue de Métaphysique et de Morale», 1939) astfel: «Există în această teorie (a lui Russell), fapt aproape paradoxal, o infinitate de clase vide. Dar şi mai neaşteptat şi mai de necrezut pentru matematicieni este existența unei pluralități de sisteme de *numere* (naturale). Se definesc numerele de clase, anume drept clasele tuturor claselor (de un acelaşi tip) echivalente cu o clasă determinată, şi fiecare tip antrenează existența unui sistem propriu de numere. Această consecință este destul de neplăcută, mai întâi, prin impresia penibilă pe care o dă, apoi – şi mai ales –, pentru că ea pretinde întrebuințarea unui formalism complicat, necesar tratării acestei pluralități de sisteme de numere».

7. Independența axiomelor

Am notat că ideea de independență a axiomelor, în raportul lor reciproc, îşi are originea în poziția specială a postulatului lui Euclid în cadrul geometriei. S-a văzut că putem scoate acest postulat din grupul axiomatic, că putem să îl înlocuim chiar cu o propoziție contradictorie față de el, şi totuşi se poate construi o teorie a unei geometrii neeuclidiene perfect coerentă. Prin urmare, postulatul lui Euclid este independent față de celelalte axiome.

Noțiunea de independență are două aspecte, care în general nu au fost concepute distinct:

1) independența unei axiome față de celelalte din grupul axiomatic al unei teorii înseamnă imposibilitatea deducerii ei din celelalte. Este o exigență economică – conform adagiului lui Ockam – conform căreia principiile nu trebuie multiplicate, şi această condiție este perfect justificată. Schema conceptuală a unei teorii va fi cu atât mai bine sesizată, cu cât este mai simplă, cu cât va avea mai puține axiome.

2) în cadrul axiomatizării moderne, independența axiomelor arată însă şi posibilitatea de a introduce în grupul axiomatic o propoziție (independentă de celelalte) în mod arbitrar sau de a scoate o astfel de propoziție din grupul axiomatic. Această idee apare de la prima vedere bizară.

Ce înseamnă faptul că o axiomă este independentă? Pentru sistemele formale, aceasta înseamnă că axioma nu este deductibilă din celelalte. Să revenim la postulatul lui Euclid. În lucrarea *Mecanismul logic al matematicilor* (Bucureşti, Edit. Academiei, 1968), Anton Dumitriu arată semnificația pluralității geometriilor:

1. *geometria euclidiană* cu postulatul lui Euclid valabil, în care suma unghiurilor unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte;

2. *geometria neeuclidiană* de tipul Lobacevski-Bolyai, cu postulatul lui Euclid nevalabil (printr-un punct exterior unei drepte se pot duce două drepte paralele la dreapta dată) şi cu suma unghiurilor unui triunghi mai mică decât două unghiuri drepte;

3. *geometriile de tipul Riemann*, cu postulatul lui Euclid nevalabil (nu se poate duce nici o paralelă) şi cu suma unghiurilor unui triunghi mai mare decât două unghiuri drepte.

Geometria lui Euclid îşi găseşte realizarea pe plan; Beltrami (1868) a arătat că geometria lui Lobacevski-Bolyai poate fi realizată pe o pseudosferă, care este o suprafață reală de rotație, născută prin rotirea curbei numite tractrice. Dreptele din plan devin geodezicele pseudosferei.

Geometria lui Riemann (fără paralele) își găsește realizarea pe o sferă reală, unde cercurile mari înlocuiesc dreptele din plan.

Dar aceste suprafețe – planul, pseudosfera și sfera –, pe care au loc geometriile respective, sunt suprafețe cu curbura lui Gauss constantă. Aceasta este nulă pentru plan, este negativă în cazul pseudosferei și pozitivă în cazul sferei.

Cu toate aceste rezultate, din care se vede imediat că suma unghiurilor unui triunghi, precum și valabilitatea postulatului lui Euclid sunt în legătură directă cu noțiunea de curbură a suprafeței, logicienii și matematicienii nu au tras nicio concluzie în ceea ce privește *natura* dreptelor paralele. Dar noțiunea de drepte paralele depinde de noțiunea de dreaptă. Definiția lui Legendre – «dreapta este drumul cel mai scurt între două puncte» – este exprimarea unei intuiții. Că acest drum este pe plan este subînțeles, dar nu este introdus în definiție printr-un caracter specific și explicit. Există însă drumuri – cele mai scurte – și pe alte suprafețe. Acestea sunt curbele geodezice ale suprafețelor și sunt în legătură directă cu curbura suprafeței pe care se găsesc. Definind dreapta ca fiind drumul cel mai scurt între două puncte, am omis să specificăm că ea este pe plan și să o legăm de un caracter specific planului. În fond, nu am definit decât noțiunea generală de geodezică, definind dreapta ca fiind drumul cel mai scurt între două puncte; cu alte cuvinte, nu am dat decât *genul,* dar nu și *diferența specifică* necesară într-o astfel de definiție. Dreapta definită de Legendre nu este decât o geodezică, în general, pe o suprafață oarecare. Din această cauză, postulatul dreptelor paralele nu poate fi demonstrat în geometria euclidiană, fiindcă noțiunea de geodezică nu este legată de plan, deși există drepte în plan. Să presupunem acum că definim o dreaptă pe plan: o dreaptă este o geodezică pe o suprafață cu curbura lui Gauss constantă, și anume $K = 0$ (planul). Este evident astfel că postulatul paralelelor aparține intrinsec geometriei euclidiene și el va fi enunțat acum astfel: *pe o suprafață cu curbura lui Gauss $K = 0$, printr-un punct exterior unei geodezice* (*drepte*) *se poate duce o paralelă la această geodezică și numai una*.

Același lucru se poate spune în ceea ce privește geometria hiperbolică a lui Lobacevski-Bolyai: geodezica este, în acest caz, legată de curbura constantă $K < 0$. Postulatul paralelelor va suna astfel: printr-un punct exterior unei geodezice pe o pseudosferă (curbura constantă $K < 0$) se pot duce două geodezice paralele cu geodezica dată.

La fel pentru geometria riemanniană, realizată pe suprafețe cu curbura constantă $K > 0$ (sfera): postulatul paralelelor va exprima *imposibilitatea de a duce printr-un punct exterior unei geodezice, o geodezică paralelă*.

Prin urmare, postulatul lui Euclid, fiind definit numai prin gen, și nu și prin diferența specifică, este independent nu numai de plan, dar de orice suprafață.

Această întâmplare a condus la concepția generală a independenței axiomelor (menționată la punctul 2), dar ea se bazează pe o neglijență istorică, și nu pe un fapt real. Generalizarea, în acest sens, a independenței axiomelor a dus la următoarele consecințe, care au schimbat ideea de teorie științifică și de construcție axiomatică.

A. Considerarea axiomelor sub o formă atât de generală și de lipsită de specificitate, încât sistemul axiomatic în întregime poate fi interpretat pe o serie infinită de modele (adică formularea axiomelor sub forma generalității genului, dar nu și a diferenței specifice).

B. Posibilitatea de a construi pentru același model o serie infinită de sisteme axiomatice, în funcție de modul în care se alege în mod arbitrar un grup de axiome sau altul.

Cu alte cuvinte, sistemul formal nu descrie schema formală specifică a modelului considerat.

8. Necontradicția axiomelor

Analiza făcută anterior nu a urmărit tehnica formală a construirii axiomatice a unui sistem, ci principiul acestei axiomatizări. Din acest punct de vedere va fi privită şi condiția de noncontradicție a sistemului de axiome.

Într-o primă enunțare a problemei noncontradicției unei teorii axiomatice, aceasta sună astfel: o teorie axiomatizată nu este contradictorie dacă nu se pot deduce din axiome (şi din propozițiile deja demonstrate) o propoziție p şi, în acelaşi timp, şi negația ei non-p. Se arată că, dacă se întâmplă aceasta, atunci înăuntrul teoriei respective, în care s-ar putea deduce valabil şi p şi *non-p*; orice propoziție formulabilă este deductibilă în sistem şi nimic nu mai este fals şi, prin urmare, nimic nu mai este adevărat.

Lăsând la o parte complicațiile şi dificultățile care au survenit în căutarea rezolvării problemelor de acest gen, să ne ocupăm de sensul acestei demonstrații de «consistență».

Problema necontradicției unei teorii deductive, în modul în care se pune în cercetările axiomatice actuale, este mult prea largă. De aceea ea nu poate fi rezolvată decât pentru teorii restrânse, pentru părțile unei teorii, căreia i se impun deci anumite restricții. Care este cauza acestei imposibilități?

După cum am văzut, problema independenței a fost scoasă din planul metodologic al teoriei, unde este o problemă de economie a teoriei, interpretată ca o posibilitate arbitrară de a introduce sau de a scoate o axiomă din interiorul unei teorii. Această concepție conduce însă mai departe la consecința că toate propozițiile derivate din cadrul teoriei, a căror derivare presupune axioma considerată (chiar dacă presupun şi alte propoziții), pot şi trebuie să fie eliminate o dată cu această axiomă. Cu alte cuvinte, o teorie T, care conține axiomele $A_1, A_2, ..., A_n$, se desparte într-un şir de mulțimi de propoziții $M_1, M_2, ..., M_n$, juxtapuse arbitrar (fiindcă oricare mulțime $M_1, M_2, ..., M_s$ poate fi retrasă din T fără ca părțile rămase să îşi deterioreze sistemul axiomatic interior). Este evident acum că problema necontradicției unui sistem axiomatic nu se poate pune decât în modul acesta larg: o propoziție formulabilă în T_1 – fie aceasta p –, împreună cu negația ei *non-p,* nu pot fi demonstrate împreună în T. Văzută în felul acesta, făcând abstracție de caracterul ei de *dependență* față de T, propoziția p poate reprezenta orice. Să considerăm în mod schematic şi formal o teorie T axiomatizată, şi fie o propoziție p atomică (cum se numeşte ea) în această teorie, susceptibilă să ia două valori, adevărul şi falsul. Dar, considerată în felul acesta, golită de conținut, propoziția p nu este legată analitic de teoria T. Altfel spus, dacă luăm în considerare, de exemplu, teoria mulțimilor şi spunem că ea conține atomii $p, q, r, ...$ (susceptibili să ia două valori, adevărul şi falsul), nimic nu ne indică faptul că propoziția p nu poate avea conținutul «Pământul este rotund». Cum, prin ce procedeu respingem din teoria axiomatizată şi formalizată propoziția p = «Pământul este rotund» care nu aparține ei? Este evident că, o dată ce un asemenea conținut al propoziției p nu este expulzat şi nu e cu putință să fie, numai prin mecanismul pur formal al sistemului, atunci nici propoziția *non-p* nu este expulzabilă pentru acelaşi motiv. Rezultă dar că problema noncontradicției unui sistem este în general nerezolvabilă din cauza modului în care este ea pusă şi care nu corespunde construcției reale a unei teorii.

Într-adevăr, este uşor să ne dăm seama – şi acest lucru este mai mult decât evident pentru oricine a practicat matematica –, că o propoziție nu se găseşte în interiorul unei teorii, fie axiomă, fie teoremă, numai fiindcă nu este contradictorie cu celelalte propoziții ale teoriei. Caracterul acesta de noncontradicție față de toate celelalte propoziții din T îi dă posibilitatea de a aparține teoriei, dar nu o face necesară.

Orice propoziție p a unei teorii T este necontradictorie cu oricare din propozițiile teoriei; *această condiție este necesară*, *dar nu suficientă*.

Sau altfel spus, condiția de noncontradicție a unei propoziții p față de toate propozițiile dintr-o teorie *T* oferă o simplă posibilitate pentru *p* (sau *non-p*) de a aparţine lui *T.* Dar propoziţiile unei teorii *T* nu aparţin lui *T* pentru că au *posibilitatea* simplă de a îi aparţine; ele aparţin lui *T* în mod *necesar*.

Studiind necontradicţia unei teorii la nivelul posibilităţii, ea a fost extinsă la o problemă foarte vastă, în care ea nici nu îşi mai păstrează caracterul ei propriu. Acest lucru se putea vedea mai simplu, de la început, dacă ne refeream la modelul unui «sistem» axiomatizat; cum, în principiu, un sistem admite un număr infinit de modele, o demonstraţie de necontradicţie a sistemului considerat ar însemna o demonstraţie de noncontradicţie pentru fiecare model în parte; dar nici un model nu este reprezentat în mod specific de sistem.

Se va pune întrebarea: cum s-a putut face această demonstraţie în sistemul calculului propoziţional? Este evident că toate propoziţiile din sistemul propoziţional *Principia mathematica*, de exemplu, nu exprimă nimic altceva din punct de vedere logic decât principiul terţului exclus sau echivalentul lui formal, principiul contradicţiei. De aceea este relativ uşor de demonstrat necontradicţia unui astfel de sistem.

9. Suficienţa axiomelor

Problema suficienţei axiomelor este problema cea mai complexă a axiomaticii, iar cercetările au condus la concluzia că ea nu este rezolvabilă (în afară de câteva cazuri simple, cum este sistemul calculului propoziţional clasic).

Problema a fost enunţată astfel de către Hao Wang în lucrarea *A Survey of Mathematical Logic* (Pekin, 1964): dându-se o formulă corect formată în cadrul unei teorii axiomatizate, să se dea un procedeu de decidere pentru demonstrabilitatea ei, adică un procedeu efectiv, prin care, fiind dată o propoziţie a sistemului, să se poată decide, într-un număr finit de paşi, dacă ea este demonstrabilă.

Problema aceasta a fost pusă chiar de Hilbert, dar primele rezultate au fost obţinute de Herbrand. Acesta stabileşte care sunt operaţiile finite şi determinate pentru a verifica faptul că o propoziţie are o anumită proprietate *A*, în care caz ea se va numi normală. Cu alte cuvinte, pentru fiecare teorie deductivă necontradictorie va exista o proprietate specială *A* a propoziţiilor adevărate; dacă, prin operaţiile indicate de Herbrand, reuşim să descoperim că o propoziţie are proprietatea *A*, urmează că îi putem fabrica o demonstraţie corespunzătoare.

Aşadar, pentru a dovedi că o teorie este necontradictorie, vom stabili că propoziţiile ei axiomatice au toate proprietatea *A*, după cum vom stabili că orice combinaţie de semne sau de propoziţii conduc la propoziţii care posedă aceeaşi proprietate *A.* Această metodă de recurenţă dă dreptul ca pentru orice propoziţie a unei asemenea teorii să se poată construi o demonstraţie.

Pentru aceasta trebuie însă să se găsească un asemenea procedeu. Problema aceasta se numeşte, în general, problema deciderii şi, după cum se vede, se pune numai în cadrul sistemelor axiomatice.

Folosind teorema zisă de necompletitudine a lui Gödel – apărută în articolul *Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I* («Monatshefte für Mathematik und Physik», 1930) – sau variante ale acesteia, s-a arătat că, pentru anumite sisteme axiomatice, astfel de procedee nu pot exista.

Ce spune teorema lui Gödel? Că în orice sistem axiomatic formal necontradictoriu (care este aritmetizabil) se poate construi în mod corect o formulă care nu este decidabilă în sistem. Cu alte cuvinte, nu se poate demonstra formula în interiorul sistemului şi nici nu putem afirma că nu se poate demonstra.

Făcând abstracţie de toate conexiunile acestei probleme cu problema independenţei şi necontradicţiei unui sistem care, aşa larg cum sunt puse, duc în mod inevitabil la astfel de probleme, noi vom spune un singur lucru aici: *demonstrabilitatea unei formule nu este un caracter al formulei sau o proprietate a formulei*. Demonstrabilitatea are un caracter operaţional constructiv şi nu depinde numai de propoziţia considerată, ci de o serie întreagă de propoziţii anterioare ale teoriei respective. A pune problema în modul acesta înseamnă a o pune greşit: dacă lucrurile ar sta aşa, atunci demonstrabilitatea unei propoziţii în cadrul unei teorii ar consta într-un oarecare caracter *A* formal al structurii formale a unei propoziţii, pe care, citindu-l pe această structură, ar arăta că ea este demonstrabilă în sistem, şi deci, în cazul acesta, propoziţia ar fi demonstrată fără a fi demonstrată! O asemenea caracteristică poate fi găsită numai în sistemul calculului propoziţional clasic, fiindcă, în acest sistem, fiecare formulă este o tautologie, adică este adevărată fără demonstraţie, numai prin structura ei, care exprimă, după cum am mai spus, principiul contradicţiei (sau echivalentul lui formal, principiul terţului exclus).

Acest caracter constructiv al demonstraţiei, care ridică un întreg edificiu propoziţional într-o teorie efectivă, a fost subliniat de Kant, iar în timpul nostru de logicianul francez É. Goblot, care a formulat această teză în formula binecunoscută: *démontrer c'est construire*.

Este de remarcat doar un singur lucru: dacă **semnul** demonstrabilităţii unei propoziţii s-ar citi direct pe o propoziţie, atunci aceasta, nedepinzând de nici o altă propoziţie, nu ar avea nevoie decât de axiome pentru a fi demonstrabilă. Aceasta înseamnă însă că întreaga ierarhie a edificiului teoriei este distrusă şi că întreaga teorie axiomatizată este o simplă mulţime neordonată de propoziţii.

Nu numai atât, dar dacă caracterul demonstrabilităţii nu este pus în directă legătură cu axiomele, atunci şi acestea devin inutile, construcţia întregului sistem fiind inutilă. Ceea ce s-a întâmplat cu calculul natural al lui Jaskowski sau Gentzen.

10. Demonstraţie şi transformare

În sistemele axiomatice, demonstraţia – care nu mai ţine seama de conţinutul propoziţiilor –, a ajuns un simplu procedeu mecanic. Acest aspect a fost subliniat, de altfel, de cei mai autorizaţi specialişti.

Într-un articol dedicat special acestei «automatizări» a proceselor de creaţie ştiinţifică, V. M. Gluşkov în articolul *Problema automatizării proceselor de creaţie ştiinţifică* (trad. în limba română, Bucureşti, 1966), arată că formalizările aritmetizate (de tip Gödel) permit să se descompună în componente elementare bine definite procesul demonstraţiei tuturor propoziţiilor demonstrabile din cadrul teoriei respective. Iată ce spune el textual: «Introducând în programul unui calculator universal toate axiomele şi regulile de deducţie ale teoriei respective, precum şi formula care exprimă propoziţia de demonstrat, putem căuta un sistem de cercetare aleatorie de demonstrare a acestei formule. Dacă numărul de paşi elementari care permit realizarea demonstraţiei formulei cerute este relativ mic, atunci viteza de lucru mai mare a calculatorului electronic permite găsirea demonstraţiei prin metoda trierii simple a variantelor. Însă pentru propoziţii mai complicate, această metodă de căutare a demonstraţiei devine practic neaplicabilă, deoarece numărul de variante care trebuie triate devine deosebit de mare, aşa încât parcurgerea lor completă într-un interval de timp rezonabil este imposibilă chiar la calculatoarele rapide de astăzi».

În concepţia axiomaticienilor actuali, ideea predominantă este însă că demonstraţia este un simplu mijloc mecanic. Şi această concluzie este inevitabilă deşi, pentru noi este inadmisibilă, fiindcă ceea ce devine mecanic nu este demonstraţia, care are alt caracter, după cum am văzut – nu de construcţie a unei formule, ci de construcţie a unui întreg edificiu de propoziţii şi de formule, în care formula sau propoziţia considerată îşi află locul ei natural. Am spus că rezultatul acesta este inevitabil, deoarece la exigenţa de «independenţă» totală s-a răspuns printr-o independenţă arbitrară, care dă o independenţă faţă de un sistem unei întregi mulţimi de propoziţii (care nu ar putea aparţine sistemului, fără ca o anumită axiomă să nu aparţină de asemenea). La acest nivel, demonstraţia s-a redus la «decidabilitate», care depinde de structura formală a formulei şi deci nu de constructibilitatea ei în sistem cu ajutorul unui număr de axiome şi de propoziţii deja construite în sistem.

Însă într-o teorie ştiinţifică veritabilă (nu în sistemele axiomatizate arbitrar), demonstrabilitatea are ca obiect să extindă *adevărul* axiomelor la *adevărul* teoremelor. Nu este vorba de a construi în mod corect din nişte date admise alte concepte sau propoziţii, indiferent dacă primele sunt adevărate sau nu. Într-o teorie *adevărată* se petrece altceva decât o construcţie a unei formule cu ajutorul unor convenţii iniţial admise. În acest sens, Aristotel a făcut o distincţie netă între demonstraţie şi schema demonstraţiei. Iată ce spune el în *Analitica priora*: «Orice demonstraţie este un silogism, dar nu orice silogism este o demonstraţie» – η μεν γαρ απόδειξις συλλογισμός τις ο συλλογισμος δε ου πας απόδειξις.

Cu alte cuvinte, una este schema demonstraţiei şi alta este demonstraţia însăşi. Silogismul şi oricare alte scheme de demonstraţie sunt simple scheme şi ele nu conţin demonstraţia: demonstraţia conţine şi schema ei formală – silogismul –, dar nu este numai atât. Ce este caracteristic deci unei demonstraţii ca să fie în mod real o demonstraţie şi să nu rămână o simplă schemă de demonstraţie? Pentru aceasta, Aristotel spune că demonstraţia răspunde naturii lucrurilor. Obiectul demonstraţiei este deci, în concepţia aristotelică, stabilirea raporturilor universale şi necesare dintre concepte. Dar conceptul aristotelic nu se reduce la o abstracţie săracă şi mai ales nu se reduce la extensiunea sărăcită de conţinut a generalului sau a mulţimii (clasă) cu care se intenţionează să se fundeze matematicile; conceptul aristotelic este *universalul* – το καθόλου –, care este principiul cunoaşterii şi principiul existenţei, materia şi condiţia formală a gândirii. De aceea, pentru Stagirit, conceptul exprimă ceea ce este în mod real esenţa şi scopul, cauza formală şi cauza finală; el este principiul trecerii potenţei în act. Şi de aceea, spune el, demonstraţia ne dă adevărul, plecând de la principii sau de la consecinţele lor imediate; ea stabileşte ceea ce este universal-necesar, ceea ce nu poate fi altfel.

Ne putem acum da seama că, în sistemele axiomatice moderne, demonstraţia nu are nimic de-a face cu demonstraţia ştiinţifică a lui Aristotel; ea s-a redus la schema demonstraţiei, iar «a demonstra» înseamnă «a transforma» aceste scheme într-un mod infinit în alte scheme.

Dacă s-a reţinut bine care este nivelul logic la care se construieşte sistemul formal, rezultatul semnalat în ceea ce precedă nu putea fi altul.

11. Filosofia semnului

După cum vedem, evoluţia axiomaticii a ajuns la punctul ei culminant în creaţia sistemelor formale. Ideea de a considera ştiinţa ca o limbă bine făcută (aşa cum spune H. Poincaré) s-a realizat în sistemul formal, care este o limbă perfect organizată, cu o sintaxă şi o semantică perfect definite. Un asemenea limbaj va fi cu atât mai obiectiv, cu cât va fi mai lipsit de orice contact cu intuiţia noastră, lipsit de orice conţinut, şi nu va avea un sens decât în momentul în care este interpretat. Semnul a devenit centrul preocupărilor teoretice referitoare la construcţia unei ştiinţe.

Încă de la începutul acestor cercetări, legate în special de construcţia ca sistem formal a logicii, Bertrand Russell scria în *Principia mathematica*: «Adoptarea regulilor simbolismului în procesul deducţiei ajută intuiţia în regiuni prea abstracte pentru ca imaginaţia să poată prezenta minţii în mod prompt adevărata relaţie dintre ideile întrebuinţate [...]. Şi astfel mintea este condusă să construiască şiruri de raţionamente în regiuni în care imaginaţia ar fi cu totul incapabilă să se susţină singură fără ajutor simbolic». Acest lucru este adevărat. Serii de concepte, serii de judecăţi şi chiar raţionamente pot fi acoperite de o notaţie simbolică bine aleasă, care concentrează şi declanşează toate aceste serii de concepte sau de operaţii, devenite familiare, de îndată ce simbolul apare undeva în cursul procesului deductiv. Folosul simbolismului este indiscutabil. Cu ajutorul unui simplu simbol se pot concentra şi efectua operaţii mentale complexe care, fiind binecunoscute, nu mai au nevoie să fie detaliate, ci numai simbolizate, astfel ca rezultatul să apară automat. Calculul integral este un astfel de exemplu, în care semnul de integrare simbolizează o însumare cu trecere la limită a normei diviziunii.

Matematica face uz de asemenea notaţii simbolice, care acoperă largi procese mentale, în mod frecvent. Familiarizarea cu acest procedeu simbolic a dus însă la identificarea procesului simbolic cu procesul mental respectiv, de unde o credinţă aproape mistică în puterea semnului. S-a făcut astfel o confuzie între simbol şi ceea ce este simbolizat, socotind că simbolismul însuşi are o virtute creatoare intrinsecă. Hilbert este responsabil în bună parte de această confuzie. Autoritatea acestui mare matematician a impus şi ideile filosofice emise de el unei întregi direcţii în epocă, care abia începe să iasă din impasul în care a fost adusă teoria ştiinţei în timpul nostru. Pentru Hilbert, esenţa matematicii – şi prin aceasta a oricărei teorii de tip matematic – este acest joc de semne făcut după reguli precise. Simbolul nu este pentru Hilbert un auxiliar al memoriei, ci defineşte un fel de spaţiu abstract cu atâtea dimensiuni câte grade de libertate sunt în operaţia concretă şi imprevizibilă a combinaţiei. Semnul, spune Hilbert, posedă în esenţa lui o regulă intelectuală care garantează contra erorii, este condiţia creaţiei prin mobilitatea sa în sensibil. Lui, scrie el, nu aplicaţiei (*Abbildung*) lui Dedekind, îi datoreşte matematica întreaga origine şi dezvoltare: «*Am Anfang*, *so heisst es hier, ist das Zeichen*» (La început, aşadar, este semnul).

Simbolul – şi în general formalismul – este util şi practica matematică a demonstrat utilitatea lui; concepţia conform căreia desfăşurarea jocului simbolic poate avea un sens în el însuşi, fără gândirea care îi dă suport, rămâne o iluzie. Idealizarea simbolului vid presupune o filosofie platonică vidă, un cer de semne fără conţinut la care poate participa lumea obiectivă, al cărei fundament se găseşte în neantul semnului. Această concepţie este inadmisibilă iar, din punct de vedere istoric, este cea mai slabă concepţie platonizantă cunoscută.

12. Axiomatica în Antichitate

Metoda axiomatică apare încă la gânditorii din vechime şi este aplicată cu toată rigoarea în *Elementele* lui Euclid. Dar teoreticianul axiomaticii antice este Aristotel. Prezentăm în continuare structura unei teorii deductive în concepţia lui.

Mai întâi, ştiinţa are ca scop, în concepţia Stagiritului, cunoaşterea universalului şi nu există decât o ştiinţă, aceea a universalului. Individul nu face obiectul ştiinţei şi pentru aceasta el nu este inteligibil. Acest lucru va fi preluat de scolastici, care vor repeta tot timpul: *scientia est universalium*. Universalul, în unul din aspectele lui, este esenţa lucrurilor – ειδος – , care este sesizat prin definiţie. Din această cauză, o definiţie nu poate fi exprimată decât printr-o propoziţie universală. Introducerea universalului se face astfel prin definiţie, care va indica genul (γένος) şi diferenţa specifică (διαφορα ειδοποιός).

Aşadar, termenii unei teorii – sau conceptele – sunt introduşi prin definiţie, care, după cum arată şi numele – ορισμός –, este o «limitare» sau o «delimitare», aşa cum ne-o spune şi cuvântul latin respectiv, *definitio.*

Pentru ca raţionamentul să se poată desfăşura, el trebuie să plece de la ceva dat. Punctul de plecare al unui raţionament poate fi:

1. definiţia (ορισμός).

2. axioma (αξίωμα).

3. afirmaţia (θέσις).

4. ipoteza (υπόθεσις).

5. postulatul (αίτημα).

Definiția nu pune existența unui lucru (cum fac celelalte patru), ci arată numai ce este un lucru şi nu că el este.

Axiomele, zice Aristotel, sunt principiile pe care trebuie să le pătrundă acela care vrea să învețe ceva. «Numesc principiul imediat al unui silogism o «teză» (afirmație) dacă aceasta nu poate fi demonstrată şi dacă nu este nevoie să fie pătrunsă de acela care vrea să învețe ceva».

Dacă o teză admite o parte ori alta dintr-o enunțare, adică afirmă ori existența, ori neexistența unui lucru, atunci ea este o «ipoteză».

În sfârşit, postulatul este o propoziție care este considerată ca adevărată fără să fie evidentă.

Instrumentul deductiv, prin care, dându-se unele lucruri ajungem la altele, este silogismul, căruia Aristotel i-a acordat un studiu larg, dedicându-i în întregime *Primele analitice.*

Aceasta este structura axiomatică a unei teorii ştiințifice – επιστήμη αποδεικτική – aşa cum o găsim la Aristotel. Dar, pentru a nu exista nicio îndoială că el a avut o idee clară şi explicită despre construcția axiomatică a unei teorii, iată textual modul în care rezumă el însuşi această structură: «într-adevăr, orice ştiință demonstrativă presupune trei elemente:

1) ceea ce ea pune de la început ca existent (adică genul ale cărui atribute esențiale ea le examinează);

2) aşa-numitele axiome, care sunt premisele prime ale demonstrației sale;

3) atributele al căror înțeles îl acceptă ştiința. Totuşi unele ştiințe pot foarte bine să treacă cu vederea, fără neajunsuri, unele din aceste elemente».

Demonstrația prin care se dezvoltă ştiința apodictică este silogismul.

În termeni moderni, adică de logică matematică, teoria ştiinței la Aristotel este redată de E. W. Beth (*The Foundations of Mathematics* (Amsterdam, 1965) astfel:

O teorie deductivă este un sistem S de propoziții, care satisfac următoarele postulate (semnul $\in$ este semnul de apartenență).

I. Orice propoziție care aparține lui S $(p \in S)$ trebuie să se refere la un domeniu specific de entități reale.

II. Orice $(p \in S)$ trebuie să fie adevărată.

III. Pentru orice consecință q a lui p avem $q \in S$ dacă $(p \in S)$.

IV. Există un număr (finit) de termeni în S, astfel încât:

a) sensul acestora este evident prin el însuşi;

b) orice alt termen din S este definibil cu ajutorul acestor termeni.

V. Există în S un număr (finit) de propoziții, astfel încât:

a) adevărul acestor propoziții este evident prin el însuşi;

b) adevărul oricărei alte propoziții care aparține lui S poate fi stabilit prin inferență logică, plecând de la aceste propoziții.

Postulatele (I), (II) şi (III) sunt numite de Beth, respectiv, *realitatea*, *adevărul* şi postulatul de *deductibilitate*. Postulatele (IV) şi (V) împreună constituie aşa-numitul *postulat de evidență*; termenii de bază şi propozițiile din postulatele (IV) şi (V) sunt numite *principiile* ştiinței respective.

Ceea ce vom sublinia însă este că, în descrierea unei ştiințe, Aristotel consideră indispensabilă existența unor termeni și propoziții cunoscute altfel decât ceilalți termeni și propoziții din *S*.

Trebuie să ne oprim undeva – ανάγκη στημαι – pentru a putea începe, și această exigență, indispensabilă pentru construirea unei teorii, ne obligă să ne oprim la termeni care nu sunt definiți și la propoziții care nu sunt demonstrate. Ele trebuie cu necesitate *să fie cunoscute*, spune Aristotel, altfel decât prin demonstrație.

Cu alte cuvinte, putem preciza discuția de mai sus după cum urmează. Axiomatica lui Aristotel descrie structura unei științe *S* astfel:

1. *Partea axiomatică*

   a) termenii *cunoscuți* prin ei înșiși;

   b) propoziții *adevărate* prin ele însele.

2. *Partea derivată*

   a) termeni definiți (cu ajutorul celor deja cunoscuți);

   b) propoziții demonstrate ca adevărate în *S*, în baza celorlalte propoziții deja admise.

3. *Metoda de demonstrație*

Aceasta este silogismul.

Remarcăm că niciun moment Aristotel nu admite că este posibil să plecăm de la termeni necunoscuți (dar acceptați ca fiind cunoscuți, ceea ce nu le conferă absolut nimic) și nici de la propoziții al căror adevăr nu este evident (dar acceptate ca adevărate, ceea ce, de asemenea, nu le conferă nimic). La fel, Aristotel acordă termenilor inițiali o «dignitate» deosebită, ei fiind la începutul unei serii ireversibile care se dezvoltă în ordine cosmologică și logică, de aici rezultând imposibilitatea ca axiomele – termenii inițiali – să fie înlocuite cu termenii dezvoltați din ele.

13. Câteva observații generale asupra metodei axiomatice

Vom face observația că metoda axiomatică, care s-a impus astăzi în orice cercetare matematică, nu poate face mai mult decât să *descrie* o știință, să îi arate articulațiile logice, dar ea nu poate depăși această limită. Într-adevăr, pentru a se putea desfășura, metoda axiomatică are nevoie de cineva din afara ei care să gândească și să îi dea impulsul devenirii ei; o știință este axiomatizată nu din interiorul ei, ci din afara ei. Metoda axiomatică a devenit indispensabilă matematicianului, dar în ea însăși, fără matematicianul care gândește și care o dirijează, ea nu reprezintă decât o schemă moartă. Analiza spectrală a unei științe prin metoda axiomatică este foarte interesantă și, după cum am spus, indispensabilă; dar ea nu este suficientă. «Mulți matematicieni – spune Bourbaki (*L'architecture des mathématiques*, în volumul *Les grands courants de la pensée mathématique*, *Cahiers du Sud*, 1918) – nu au vrut să vadă în axiomatică altceva decât subtilități logice inutile, incapabile să fertilizeze vreo teorie». Bourbakiștii cred însă că acest reproș se poate aduce numai primelor axiomatizări (axiomatizarea aritmeticii de către Dedekind și Peano, a geometriei euclidiene de către Hilbert), care erau teorii *univalente*, cu alte cuvinte erau construite de așa natură, încât sistemul global al axiomelor lor le determina în întregime, și acest sistem nu mai era susceptibil de a fi aplicat după aceea la nicio altă teorie decât la aceea din care fusese extras. «Dar axiomatica a demonstrat mișcarea umblând», încheie Bourbaki.

Această concepție nu neagă faptul că reproșul de sterilitate nu ar fi justificat (dacă o știință ar fi determinată complet de sistemul ei de axiome), dar neagă faptul că acest mod de a axiomatiza este modul general de a proceda în matematici. O anumită axiomatizare se poate aplica mai multor domenii diferite, și în aceasta constă «mișcarea» gândirii axiomatice în concepția bourbakistă. Totuşi se adaugă: «Matematicianul nu lucrează în mod mecanic, ca lucrătorul la banda rulantă; nu se poate insista suficient de mult asupra rolului fundamental pe care îl joacă în cercetările sale o anumită *intuiție*, care nu este intuiția senzorială obişnuită, ci mai curând un fel de ghicire nemijlocită (anterioară oricărui raționament)». Dacă este aşa – şi oricine a practicat matematica ştie că acest lucru este un adevăr de fapt –, atunci partea axiomatică a unei ştiințe nu este suficientă pentru a ne da seama de ordinea completă care structurează o ştiință şi nici mai cu seamă de modul ei de desfăşurare.

Putem spune atunci, pe scurt, că metoda axiomatică, deşi ne oferă un *modus procedendi*, indispensabil în orice ştiință, nu este suficientă din următoarele motive:

1) Dacă partea axiomatică a teoriei, cu regulile de derivare respective, rămâne o dată pentru totdeauna, completă şi intangibilă, atunci ştiința respectivă este cuprinsă de la început în această parte axiomatică şi nu este decât explicitarea conceptelor şi propozițiilor cuprinse în această parte. O bogăție de idei şi de adevăruri ar fi conținută în mod misterios în această parte inițială, care urmează să fie extrase prin metode simple din ea. Ceea ce este inadmisibil, fiindcă totul ar trebui să se reducă la cele câteva noțiuni şi adevăruri inițiale.

2) Dacă partea axiomatică este parțială, urmând să se introducă fie noi concepte în interiorul ştiinței respective, fie noi axiome, atunci ştiința considerată nu este reprezentată de partea axiomatică şi ea se completează, făcându-se.

Cu alte cuvinte, cu necesitate trebuie să păstrăm atunci o ordine naturală a prezentării teoriei, arătând în fiecare etapă cum şi de ce intervine o nouă axiomă. În acest caz, o ştiință nu mai poate fi dată de la început în întregime prin partea ei axiomatică.

3) Dacă, pe de altă parte, admitem rolul de ghid al intuiției, aşa cum susține şi Bourbaki, rezultă că tocmai ceea ce face dinamica unei ştiințe se datoreşte unei intervenții providențiale a intuiției, care nu este, în nici un caz, un rezultat derivat din axiome.

Problema este următoarea: dacă partea axiomatică determină în mod suficient întreaga ştiință respectivă, atunci această ştiință nu este decât această parte axiomatică şi cu necesitate poate fi redusă la ea; dacă partea axiomatică nu determină în mod suficient întreaga ştiință căreia îi serveşte de bază, atunci ştiința nu mai este axiomatizată de această parte.

În acest sens, se poate aduce un exemplu sugestiv din matematici, în speță din algebră. Soluțiile unei ecuații pătrate cu termen liber pozitiv nu sunt numere reale, şi atunci s-a introdus numărul $i = \sqrt{-1}$, fapt care constituie axioma prin care am introdus şi construit numerele imaginare. Aşadar, demersurile gândirii în procesul de rezolvare a ecuațiilor ne-a dus la introducerea acestei axiome, care face posibilă găsirea soluției în corpul numerelor complexe.

14. Concluzii

Analiza modului de axiomatizare, pe care am făcut-o în ceea ce precede, ne-a condus la precizarea câtorva caractere ale acestei metode moderne de a construi un sistem deductiv. Este atunci evident că metoda axiomatică nu mai examinează structura conceptuală efectivă a unei teorii deductive, ci un schelet mort; mai mult încă, pluralitatea modelelor posibile ca interpretări pentru un acelaşi sistem arată că «osatura» formală exprimată de un sistem, fiind «osatura» unei serii infinite de modele, nu aparține esențial nici unuia din aceste modele şi reprezintă astfel o structură atât de generală, încât nu mai are nimic specific. Este o analiză spectrală atât de nespecifică, încât ar putea fi comparată cu o cercetare anatomică care şi-ar pune probleme numai de felul acesta: Ce este comun din punct de vedere anatomic între toate viețuitoarele? Ce este comun din punct de vedere anatomic între toate plantele? etc.

Asemenea probleme, fără să susținem că sunt eronate, sunt lipsite de orice specificitate; ele sunt definite, dacă ne putem referi la o comparație cu modul de definiție clasic, numai prin genul proxim şi nu prin diferența specifică.

Un asemenea sistem formal este, în fond, un limbaj matematic, în care trebuie exprimat un domeniu de fapte şi propoziţii despre aceste fapte. Este un limbaj matematic în care se poate vorbi despre un domeniu special; fabricarea acestui limbaj este însă o problemă absolut independentă de domeniul la care se va putea aplica. Acesta a fost idealul axiomaticii moderne dar, după cum s-a văzut, el ridică probleme foarte grele, de cele mai multe ori insolubile; subliniem însă că *aceste probleme nu sunt ale domeniului care va fi exprimat în limbajul axiomatic*, *nu sunt probleme reale*, *ci artificial create*.

În acest sens, A. Mostowski (*The Present State of Investigations on the Foundations of Mathematics*, 1955) scrie: «Sub influența lucrărilor lui Hilbert şi a ideilor filosofice ale şcolii neopozitiviste s-a imaginat, în deceniul al treilea al acestui secol, că cea mai importantă problemă a fundamentelor matematicilor este să se construiască limbaje „artificiale", cu reguli sintactice precis definite şi că printre acestea va exista un limbaj universal şi perfect care va putea fi identificat cu matematica [...]. Am insistat asupra acestor fapte, pentru a sublinia că încercarea de a stabili fundamentele matematicilor cu ajutorul unui limbaj construit, lipsit de orice interpretare (sau a «limbajului» a cărui interpretare devine posibilă numai în cursul utilizării lui) este considerată în ziua de astăzi ca un eşec complet».

Modul în care oamenii de ştiinţă moderni (în special matematicienii) au conceput axiomatica a căutat doar să imite structura unei ştiinţe veritabile, aşa cum a văzut-o Aristotel în *Organon*. Fără îndoială că această structurare a datelor ştiinţifice are un rol ordonator în explozia informaţională de date (care cresc exponenţial într-o ştiinţă care are la bază empirismul materiei), dar ea nu poate aduce nici un aport de ordin teoretic în ceea ce priveşte fundamentele matematicii şi ale gândirii.

BIBLIOGRAFIE

1. **ARISTOTEL**: Analitica priora, Analitica posteriora; Metaphysica.

2. **BETH, E. W**.: The Foundations of Mathematics (Amsterdam, 1965).

3. **BOURBAKI**: L'architecture des mathématiques (în volumul Les grands courants de la pensée mathématique, Cahiers du Sud, 1918, trad. rom., în Logică şi filosofie, Bucureşti, 1966).

4. **CARNAP, R.**: Abriss der Logistik (Viena, 1929).

5. **CAVAILLÈS, J.**: Axiomatique et système formel, (Paris, 1938).

6. **CURRY, H. B.**: Some Aspects of the Problem of Mathematical Rigour («Bulletin of the American Mathematical Society», 1941).

7. **DUMITRIU, A.**: Soluţia paradoxelor logico-matematice (Bucureşti, 1966); Mecanismul logic al matematicilor (Bucureşti, 1968); Eseuri (Ştiinţă şi cunoaştere, Ed. Eminescu, 1987).

8. **FRAENKEL A.** şi **BAR-HILLEL, J.**: Le problème des antinomies («Revue de métaphysique et de morale», 1930).

9. **GLUŞKOV, V. M.**: Probleme automatizării proceselor de creaţie ştiinţifică (în Logică şi filosofie, 1960).

10. **GÖDEL, K.**: Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme («Monatshefte für Mathematik und Physik», 1930).

11. **GRZEGORCZYK, A.**: Schiță istorică (trad. rom. în vol. Logică şi filosofie, Bucureşti, 1966).

12. **HERBRAND, J.**: Recherches sur la théorie de la démonstration (Varşovia, 1930).

13. **HEYTING, A.**: Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik (Berlin, 1930).

14. **HILBERT, D.**: Über die Grundlagen der Geometrie («Mathematische Annalen», 1902); Neubegründungen der Mathematik (Hhamburger Seminars Einzelschriften», 1928); Axiomatisches Denkens (în lucrarea «Logică şi filosofie», Bucureşti, 1966).

15. **LADRIERE**: Les limitations internes des formalismes (Louvain-Paris, 1957).

16. **LAMBERT, J. H.**: Theorie der Parallellinien («Magazin für reine und angewandte Mathematik», 1786).

17. **ŁUKASIEWICZ, J.**: Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls (Varşovia, 1930).

18. **MOSTOWSKI, A.**: The Present State of Investigation on the Foundations of Mathematics (Varşovia, 1955).

19. **PASH, M.**: Vorlesungen über die moderne Geometrie (Leipzig, 1882).

20. **POINCARÉ, H.**: La science et l'hypotèse (Paris, 1909).

21. **REYMOND, A.**: Les principes de la logique et la critique contemporaine (Paris, 1932).

22. **RUSSEL, B.**, şi **WHITEHEAD, A. N.**, Principia mathematica (Cambridge, 1910-1913).

23. **VUILLEMIN, J.**: Problèmes de validation dans les axiomatiques d'Euclide et de Zermelo, (Varşovia, 1965).

24. **WANG, HAO:** A Survey of Mathematical Logic (Pekin, 1964).