PARADOXUL LUI GÖDEL ŞI IMPLICAȚIILE LUI

Paul Sfetcu

psfetcu@yahoo.com

Institutul Național de Cercetare - Dezvoltare în Informatică, ICI, Bucureşti

Rezumat: În acest articol evidențiem faptul că acest paradox este formulat fără respectarea regulilor definiției şi ca atare nu implică nimic nici pentru matematici, nici pentru sistemele formale care vor să dea seama de progresul matematicilor.

Cuvinte cheie: paradox, definiție, demonstrație.

Abstract: In this article we point out that Gödel's paradox is obtained regardless the rules set out for definitions adn as such in cannot imply anything neither for mathematics, or the formal systems that tend to account for their progress.

Key words: paradox, definition, proof.

1. Introducere

Succesul ştiinței moderne, obținut prin mularea aparatului matematic pe lumea fenomenelor lumii materiale, a pus în discuție fundamentele ştiinței, deci şi ale matematicilor. Pentru aceasta, ştiința trebuia studiată pe cadrul logico-formal al sistemelor simbolice, care voiau să dea seama de progresul ştiinței şi de dezvoltarea fără precedent a matematicilor (pentru oamenii de ştiință aceste sisteme fiind garanția obiectivității supreme). Dar chiar în acest stadiu, apariția paradoxelor logico-matematice a pus la îndoială speranța că vom putea găsi, la nivel formal, soluția acestei dezvoltări uimitoare a matematicilor şi implicit a ştiinței. Gödel a fost cel care, prin paradoxul pe care l-a construit, a declanşat ceea ce s-a numit o criză a ştiințelor, dar de fapt criza este a formalismului şi a modului în care noi percepem actul gândirii matematice.

2. Limitele sistemelor formale

Sistemele pur formale, destinate să înlocuiască teoriile matematice, prin eliminarea completă a intuiției din schema simbolică a teoriilor deductive, s-au izbit, încă de la început, de mari dificultăți. Una din aceste dificultăți este limitarea intrinsecă a acestor sisteme formale. Această limitare a fost demonstrată prima oară în 1931, de către Kurt Gödel, într-un articol devenit celebru – *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme*, *I*, („Monatshefte für Mathematic und Physik", vol. 38, 1931). Gödel şi-a publicat cercetările sale în 1931, dar el nu a fost primul care a întrevăzut acest paradox. Înaintea lui, P. Finsler a pus deja problema în studiul său *Formale Beweise. Entscheidbarkeit* („Mathematische Zeitschrift", vol. 25, 1926).

Gödel a demonstrat că, dacă avem un sistem formal *S* (care satisface unele condiții), este posibil să se construiască în interiorul lui, cu ajutorul semnelor acestui sistem, a regulilor de inferență precum şi al axiomelor, o expresie *E* care nu este nici demonstrabilă, nici nedemonstrabilă în cadrul sistemului. Raționamentul matematic este neputincios în raport cu unele expresii formulabile în sistem şi există cel puțin o expresie *E*, corect formată în cadrul sistemului, față de care regulile de deducție sunt neputincioase.

Faptul că formalismul nu poate exprima absolut toate ideile logice a fost sesizat chiar de Russell, cu mult înaintea lui Gödel, la începutul cercetărilor sale. Într-adevăr, regula de substituție, de exemplu, care aparține oricărui sistem formal, nu este formalizabilă şi astfel, de la început, tentativa de a exprima orice teorie matematică exclusiv cu ajutorul simbolurilor şi a relațiilor dintre ele s-a izbit de o imposibilitate de fapt, care afectează chiar principiul de formalizare.

Credința conform căreia simbolismul are o virtute creatoare şi că el ajută efectiv procesul de deducție este exprimată de către Russell astfel (*Principia mathematica*): „Adoptarea regulilor simbolismului în procesul de deducție ajută intuiția în unele regiuni prea abstracte pentru imaginație [...] și astfel inteligența este condusă în cele din urmă să găsească șiruri de raționamente în regiuni ale gândiri în care imaginația ar fi incapabilă să se susțină fără un ajutor simbolic. Limbajul obişnuit nu oferă un astfel de ajutor".

Această idee a fost ridicată la rangul de principiu şi există matematicieni care nu cred că ar fi posibil să se exprime ceva în mod exact şi obiectiv în alt mod decât într-un limbaj formalizat.

Pentru Hilbert şi şcoala lui, esența matematicilor este acest joc reglementat de simboluri, acestea nefiind un ajutor pentru memorie, ci definind un fel de spațiu abstract cu tot atâtea dimensiuni câte grade de libertate există în operația concretă şi imprevizibilă a combinației.

Dar demonstrația lui Gödel atacă această putere extraordinară a formalismului şi subliniază un caracter vicios al esenței sale. Acest caracter precar al formalismului a fost sesizat, după cum am spus, de Russell, care a văzut imposibilitatea de a formaliza principiul substituției: „Acest principiu (de substituție) nu poate avea un tratament formal şi indică un oarecare eşec al formalismului în general". De unde concluzia lui Brunschvicg (*Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, 1929), care analizează acest impas logic: „Logisticienii au contat pe punerea în formă simbolică a legilor logicii pentru a elimina orice urmă de intuiție şi a ajunge la sfera pură a conceptelor; se pare însă [...] că în simbol chiar rămâne totdeauna un oarecare reziduu de intuiție şi că trebuie să depăşim simbolismul pentru a depăşi intuiția".

Teorema de incompletitudine a lui Gödel a schimbat perspectivele formalizării şi sensul ei şi a condus la concluzii foarte grave. Iată, de exemplu, ce scrie A. Mostowski (*The Present State of Investigations on the Foundations of Mathematics* (Varşovia, 1935): „Teorema lui Gödel a avut o influență determinantă asupra concepției privind aşa-zisele *sisteme logico-matematice formalizate*. Noi credem că în prezent aceste sisteme nu au decât o valoare istorică". Tot Mostowski concluzionează: „Am insistat asupra acestor lucruri pentru a accentua că tentativa de a stabili fundamentele matematicilor prin intermediul unui limbaj construit, *lipsit* de orice interpretare (sau al unui limbaj a cărui interpretare devine posibilă numai în momentul în care este utilizat), este considerată astăzi ca un eşec complet".

3. Paradoxul lui Gödel

Gödel a dat o demonstrație a acestei limitări interioare a formalismelor logico-matematice. El şi-a propus să arate că speranța matematicienilor, de a exprima întreaga lor ştiință într-un mod formal, este iluzorie şi că există în principalele sisteme formale (acela al lui Russell şi acela al lui Zermelo-Fraenkel, dezvoltat de von Neumann) sau în cele înrudite, probleme relativ simple care nu pot fi rezolvate. În acest scop, el aritmetizează în primul rând sistemul formal. Iată în ce constă metoda aritmetizării, în principiu: se numerotează elementele primitive ale unui sistem formal, într-o ordine oarecare, dar bine determinată, dându-le un număr întreg (pozitiv) fiecăruia dintre ele; identificarea unui semn se face prin numărul de ordine pe care îl are. În loc să se vorbească de un semn al sistemului formal, se va vorbi de numărul respectiv cu care a fost notat semnul în ordinea aleasă. Expresiile formate cu semne vor deveni astfel şiruri de numere finite şi demonstrațiile vor deveni operații cu şiruri de şiruri finite. În consecință, aritmetizarea unui sistem formal semnifică asocierea într-un mod biunivoc a unor numere naturale (după o anumită regulă dată) cu obiectele sau elementele sistemului.

Trebuie să facem precizarea că demonstrația lui Gödel este interesantă numai pentru anumite sisteme formale; sistemul trebuie să fie necontradictoriu şi destul de vast (prin axiomele sale) pentru a conține aritmetica. Pentru sisteme incomplete, prin construcția lor axiomatică parțială, demonstrația lui Gödel nu are sens.

Iată acum o demonstrație a „teoremei" lui Gödel, expusă într-un mod schematic.

Fie *S* un sistem formal de tipul *Principia mathematica*. Să construim acum enunţul metateoretic:

(1) *Propoziţia care are numărul „n" nu este derivabilă în S*, unde *n* este o variabilă.

Dar acest enunţ, fiind formulat în *S*, care este aritmetizat, va avea şi el un anumit număr *k* (bine determinat). Dacă în enunţul (1) dăm variabilei *n* valoarea *k*, obţinem (punând în evidenţă faptul că propoziţia (1) are numărul *k*):

(2) *(Propoziţia cu numărul „k" nu este derivabilă în S)* $_k$.

Propoziţia *k* a fost construită în *S* şi afirmă propria sa nederivabilitate în *S*.

Hilbert a admis că această construcţie are o analogie cu paradoxul megaric al mincinosului. Într-adevăr, spune Hilbert, dacă cineva declară: „Propoziţia pe care o pronunţ acum nu poate fi rezultatul unei demonstraţii", această propoziţie conduce la un paradox ca şi propoziţia: „Eu mint".

Bazându-se pe această demonstraţie, Gödel crede că poate enunţa teorema următoare: „În orice clasă de formule necontradictorii, există propoziţii indecidabile (*unentscheidbare*)".

De aici s-a tras concluzia că orice formalism deductiv (în condiţiile specificate mai sus) are limitele sale şi că deductibilitatea logică nu poate depăşi anumite margini. Rudolf Carnap (*Die Antinomien und die Unvollständigheit der Mathematik* („Monatshefte für Mathematik und Physik", 1934) a generalizat aceste idei, ajungând la concluzia că „orice aritmetică are lacune şi matematica este un sistem incomplet".

A. Fraenkel and J. Bar-Hillel, în *Foundations of Set Theory* (North-Holland Publishing Company, 1958) au enunţat teorema lui Gödel într-un mod mai riguros sub forma: „Orice sistem logistic, destul de vast pentru a conţine o formalizare a aritmeticii recursive, este inconsistent sau ω-inconsistent, sau altfel el conţine o formulă indecidabilă".

Rezultatul lui Gödel a fost reluat şi demonstrat într-un alt mod, de către Kleene (*General Recursive Functions of Natural Numbers*, în „Mathematische Annalen", 1936) şi de Rosser (*Extensions of Some Theorems of Gödel and Church*, în „Journal of Symbolic Logic", 1937), care au plecat de la alte ipoteze. Teorema lui Gödel a suferit şi unele extinderi, datorate unor probleme puse chiar de către această teoremă. S-au împărţit sistemele formale în două categorii: unele în care deducţia presupune un număr finit de premise şi care sunt numite „sisteme constructive" şi altele în care deducţia presupune o infinitate de premise, nereprezentabile *în mod recursiv*, şi care se numesc „sisteme neconstructive". Însă teorema lui Gödel, aşa cum a fost formulată chiar de el, nu poate fi demonstrată decât într-un sistem constructiv. Rosser a arătat că teorema lui Gödel poate fi extinsă de asemenea la sistemele neconstructive.

Turing (*System of Logic Based on Ordinals*, în „Proceedings of London Mathematical Society", 1937) a elaborat în mod analog „logici neconstructive", utilizând reprezentarea ordinalelor transfinite, cu ajutorul λ-conversiunii a lui Church (*The Calculi of Lambda Conversion*, în „Annals of Mathematical Studies", Princeton, 1941) care, la rândul său, a demonstrat teorema lui Gödel. În sfârşit, Kleene (*Recursive Predicates in the Theory of Constructive Ordinals*, în „American Journal of Mathematics", 1944) a demonstrat o generalizare a teoremei de limitare a lui Gödel.

Proprietăţile metateoretice care conduc la teoreme de limitare sunt: *saturaţia* sistemului formal (în cazul lui Gödel); *rezolubilitatea* (în cazul lui Church).

Kleene a construit o teorie a predicatelor, cărora le-a dat o ierarhie stratificată cu ajutorul căreia el exprimă aceste proprietăţi şi ajunge la o teoremă de limitare generalizată. Vom semnala de asemenea cercetările de natură semantică ale lui Carnap (*Logische Syntax der*

Sprache (Springer, Viena, 1934), Tarski (*Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, în „Studia Philosophica”, Leopoli, 1935) şi Mostowski (*A Stumbling Block in Constructive Mathematics*, în „Journal of Symbolic Logic”, vol. 18, 1935).

Teoremele stabilite de Carnap şi Tarski privesc ideea de adevăr şi definiția sa într-un sistem formal. În aceste teoreme, nu se poate construi o definiție a propoziției adevărate în chiar sistemul *S*, ci într-un metalimbaj. Mostowski a dat o formă mai generală teoremei lui Tarski.

Se vede de aici ce importanță au teoremele de limitare, care au dus la concluzii nu mai puțin extraordinare. Iată în acest sens concluzia lui J. Ladrière (*Les limitations internes des formalismes*): „Dacă sistemul total este irealizabil, aceasta se datoreşte faptului că experiența matematică se desfăşoară pe fondul unui orizont inepuizabil. Acest orizont, fiind condiția de posibilitate a experienței şi a reprezentatului, nu poate fi gândit decât ca o condiție de posibilitate. El nu poate fi deci reprezentat. Ceea ce aparține structurii constructivului, ca atare, nu poate fi atins într-o construcție, căci o condiție nu se poate presupune ea însăşi. Dacă este adevărat că structura constructivului o simbolizează pe aceea a temporalității, imposibilitatea sistemului total se întâlneşte cu imposibilitatea reflexiunii totale”.

Vedem deci că incompletitudinea sistemelor formale, adică existența propozițiilor indecidabile în interiorul lor, revine la existența propozițiilor care au reflexie asupra lor însele şi astfel la problema paradoxelor logico-matematice. Trebuie să subliniem că Gödel, însuşi a remarcat analogia dintre paradoxul său şi acela al lui Richard, iar Hilbert a văzut în el o variantă a paradoxului mincinosului. Ideea că edificiul simbolic al lui Gödel nu este decât un nou paradox a fost susținută pentru prima oară de către Ch. Perelman şi ea a fost reluată de către M. Barzin.

4. Construcția Paradoxului lui Gödel

În cele ce urmează vom expune modul de construire al paradoxului aşa cum apare el în articolul din 1931.

Pentru a nota noțiunile, logica simbolică utilizează simboluri. Din punct de vedere formal (punctul de vedere metamatematic) nu are importanță care sunt simbolurile primitive pe care le alegem pentru noțiunile logice. Gödel alege ca semne primitive (*Grundzeichen*) numerele naturale, adică şirul:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

O formulă va fi deci un şir de numere naturale, iar o demonstrație (*Beweisfigur*) va fi un şir finit de şiruri finite de numere naturale. Matematicile vor fi exprimate în acest fel. *Metamatematica* – ştiința care vorbeşte despre propozițiile matematice –, va consta din concepte şi propoziții care se referă la concepte şi propoziții matematice şi care, ca şi acestea din urmă, sunt exprimate prin şiruri finite de numere naturale; rezultă că propozițiile şi conceptele matematice vor fi concepte şi propoziții referitoare la numerele naturale (sau şiruri finite de numere naturale). Gödel numerotează toate noțiunile primitive prin numere întregi pozitive. În loc să spună „noțiunea (sau propoziția) reprezentată prin semnul simbolic n”, el spune „noțiunea (sau propoziția) care are numărul n”. Prin această corespondență Gödel, a creat un sistem izomorf cu *Principia mathematica* în domeniul numerelor naturale.

Să considerăm acum clasele claselor (ele definesc numerele naturale). Fiecare clasă va avea un semn determinat care va fi numit un semn de clasă (*Klassenzeichen*). Semnele claselor vor fi aranjate într-o ordine oarecare – ordinea lexicografică, suma membrilor etc. Fie *R* simbolul care reprezintă ordinea aleasă, adică relația ordonatoare a semnelor claselor. Putem acum să numerotăm aceste semne ale claselor; primul, al doilea, al treilea, ..., al *n-lea*. În consecință, dacă se dă ordinea *R* în care sunt ordonate semnele claselor, vom şti imediat ce număr are fiecare semn de clasă. Vom face notația

$R(n)$

şi acest semn va avea semnificaţia: în ordinea R, semnul de clasă care are numărul n. În *Principia mathematica*, o clasă este definită prin x (fx), f(x) fiind funcţia definisantă. Variabila liberă este x şi trebuie remarcat faptul că în definiţia unei clase nu există decât o variabilă liberă.

Dacă variabila x ia valori de clasă, atunci x (fx) este o clasă a claselor; avem de asemenea o singură variabilă liberă. Fie α un semn de clasa oarecare; se va nota prin

[a; n]

formula care se obţine din semnul clasei când se înlocuieşte variabila liberă prin semnul numărului natural n.

Să definim acum o clasă K de numere naturale după cum urmează:

$n \in K \equiv \overline{Bew}\ [R(n); n]$ (1)

în care *Bew* este prescurtarea cuvântului german *beweisbar* (demonstrabil) şi bara reprezintă semnul negaţiei.

Definiţia spune că un număr natural n aparţine clasei K dacă pentru el nu este demonstrabilă formula $[R(n); n]$. În raport cu aceste definiţii, rezultă că există un număr de clasă S astfel încât formula $[S; n]$ spune că numărul natural n aparţine lui K. Dar cum S este un număr de clasă, urmează că el are un număr de ordine q şi că S este identic – după definiţia semnului de clasă – cu $R(q)$:

$S = R(q)$.

Gödel arată că propoziţia

$[R(q); q]$

are un caracter nedeterminat în sistemul lui Russell. Într-adevăr, dacă propoziţia $[R(q); q]$ ar fi demonstrabilă, atunci ea ar fi adevărată, deci q ar aparţine lui K; dar am avea după (1):

$q \in K \equiv \overline{Bew}\ [R(n); n]$,

adică propoziţia $[R(q), q]$ ar fi nedemonstrabilă, în contradicţie cu ipoteza. Dacă $[R(q); q]$ ar fi falsă, atunci negaţia ar fi valabilă, deci q nu ar aparţine lui K, adică propoziţia $q \in K$ ar fi falsă:

$\overline{q \in K} = Bew\ [R(q); q]$

În consecinţă, $[R(q); q]$ este demonstrabilă în acelaşi timp cu negaţia sa, ceea ce este contradictoriu.

V. Formula $T\omega$

Fiind dată definiţia

P (x) = ~ φ (x),

Variabila φ (simbolul predicativ) nu poate avea niciodată valoarea φ = P deoarece ar contrazice una dintre regulile definiţiei care spune că aceasta nu poate fi contradictorie. Într-adevăr, pentru φ = P obţinem P (x) = ~P (x), care este o contradicţie.

Condiția rămâne valabilă şi pentru echivalența generală care rezultă din această definiție:

$(x)\ P(x) \equiv \sim \varphi(x)$.

Şi aici avem $\varphi \neq P$, din cauza condiției pusă definiției. Deci această echivalență implică relația $\varphi \neq P$ şi astfel obținem o implicație tautologică, pe care o notăm cu $T\omega$.

$$T\omega\ P(x) \equiv \sim \varphi(x)\ .\supset .\ \varphi \neq P$$

6. Analiza paradoxului lui Gödel cu ajutorul formulei *Tω*

Definiția lui Gödel, în paradoxul care îi poartă numele, este aşa cum am văzut:

$$n \in K = \overline{Bew}\ [R(n); n] \qquad \text{Def. (1)}$$

Numărul natural n aparține clasei K dacă pentru el nu este demonstrabilă formula $[R(n); n]$. Această definiție ne conduce la echivalența generală:

$$n \in K \equiv Bew\ [R(n); n]$$

Definiția (l) este aceea a paradoxului *izomorf-heteromorf*, care este mai general decât acela al lui Richard. În acest caz, teorema $T\omega$, cu simbolurile respective ale acestei probleme, devine

$$T\omega\ \ n \in K = \overline{Bew}\ [R(n); n] \cdot \supset \cdot [R(n); n] \neq [R(q); q]$$

Vedem că principiul contradicției nu atinge variabila n, ci expresia $[R(n); n]$, care nu poate deveni chiar $[R(n); n]$, căci atunci definiția (1) ar fi inclus propoziția contradictorie: «Dacă $q \in K$ este adevărată, adică dacă $[R(q); q]$ este demonstrabilă, atunci $[R(q); q]$ nu este demonstrabilă». Avem deci următorul *modus ponens* :

$$n \in K \equiv \overline{Bew}\ [R(n); n] \qquad (2)$$

$$n \in K = \overline{Bew}\ [R(n); n] \cdot \supset \cdot [R(n); n] \neq [R(q); q]$$

$$[R(n); n] \neq [R(q); q]$$

Problema este mai generală şi, fără complicațiile introduse de Gödel, ia următoarea formă, care nu este decât una din formele paradoxelor generale construite de Anton Dumitriu: *compatibil-incompatibil*, *izomorf-heteromorf* etc. Fiind dată o clasă de propoziții K într-un formalism logic oarecare, necontradictoriu şi aritmetizat, vom putea totdeauna enunța într-un mod oarecare, dar bine definit, o problemă de genul următor: vom spune că o propoziție p aparține clasei K dacă pentru p nu este demonstrabilă afirmația că p aparține unei alte clase ψ (care poate varia într-un mod bine definit dar, pentru fiecare p, clasa ψ este dată). Această definiție se scrie:

$$p \in K = \overline{Bew}\ [p \in \psi] \qquad \text{Def. (1)}$$

Echivalența corespunzătoare este valabilă pentru orice p:

$$p \in K \equiv \overline{Bew}\ [p \in \psi] \qquad (2)$$

Dar pentru că este variabil, el poate deveni chiar K, astfel că definiția ar fi inclus propoziția pe care o obținem din (2) pentru $\psi = K$:

$p \in K \equiv \overline{Bew}\ [p \in K]$

Cu alte cuvinte, dacă propoziţia „*p* aparţine clasei *K*" este adevărată, atunci propoziţia «*p* aparţine clasei *K*» nu este demonstrabilă, şi dacă propoziţia „*p* aparţine clasei *K*" este falsă, atunci este demonstrabilă propoziţia „*p* aparţine clasei *K*", ceea ce este contradictoriu. Vom scrie $T\omega$ cu simbolurile acestei probleme: echivalenţa (2) şi $T\omega$ ne dă un *modus ponens*.

$p \in K \equiv \overline{Bew}\ (p \in \psi)$

$p \in K \equiv \overline{Bew}\ (p \in \psi) \cdot \supset \cdot \psi \neq K$

Paradoxul nu mai poate apărea. Simbolul ψ nu poate să reprezinte nicio clasă *K*, care să fie dată în formalismul logic considerat în modul indicat.

7. Concluzii

În final, vom face câteva consideraţii asupra acestei probleme şi vom insista şi asupra unui alt aspect al acestei probleme, care ne va explica într-un mod mai complet mecanismul acestui paradox.

Am găsit relaţia $\psi \neq K$. Aceasta înseamnă: clasa *K* nu poate fi identică cu nici o valoare a simbolului ψ (variabil), definiţia sa nu poate fi decisă şi nici nu poate fi identică cu o clasă şi deci expresia $\overline{Bew}\ (p \in \psi)$ nu este definisantă pentru clasa *K* (expresie care nu este formată decât cu clasa ψ, unul din membrii săi *p*, şi ideea că putem demonstra că un element *p* aparţine sau nu clasei ψ).

Să examinăm mai de aproape modul de formare a acestor feluri de clase. Sunt alese într-un mod arbitrar două clase şi se caută să se vadă dacă ele au sau nu o relaţie. Dar aceste feluri de relaţii, cu toate că pot fi constatate într-un mod legitim, există prin *accident*.

Într-adevăr, să considerăm cadrul în care apare paradoxul *izomorf-heteromorf*.

$P_1,\ P_2, P_3, \dots , P_n.$

$a_1,\ a_2, a_3, \dots , a_n.$

Dacă într-o ordine oarecare un predicat din primul şir are proprietatea indicată de predicatul de acelaşi rang din cel de-al doilea şir, el este *izomorf*; dacă nu, el este *heteromorf*. Un predicat are sau nu are proprietatea exprimată de predicatul corespunzător lui din seria paralelă, *tertium non datur*.

Proprietatea numărului a_3, de exemplu, de a fi *izomorf* sau *heteromorf* în raport cu numerotarea noastră relativă şi arbitrară nu are nimic esenţial. Aceasta se vede mai bine din faptul că într-o anumită ordine (pe care o putem alege arbitrar) acelaşi număr a_3 poate fi *izomorf* şi într-o altă ordine *heteromorf*. Aceste proprietăţi pot fi legitim constatate, adică se poate constata că un număr oarecare a_x are sau nu are proprietatea de acelaşi rang P_x, dar această coincidenţă, consecinţă a unei ordini arbitrar stabilită, nu este decât un accident. Faptul că predicatul P_x se găseşte în acelaşi rang cu numărul a_x este un accident.

Logica tradiţională a cunoscut bine aceste feluri de proprietăţi. Accidentul este o proprietate care exprimă ceva care nu aparţine conotaţiei subiectului unei judecăţi şi nu poate fi dedus analitic din ideea subiectului. Dar toate tratatele de logică tradiţională interzic construirea unei definiţii prin accident. Accidentul nu este definisant şi expresiile care exprimă proprietăţi accidentale nu sunt definisante. În sistemele logico-formale se folosesc permanent astfel de expresii. Într-adevăr, logica simbolică, operând cu simboluri vide de orice conținut, este obligată, în general, să privească relația de definiție fără nicio legătură între *definiens* şi *definiendum*. Deființiile apar astfel ca simple abrevieri convenționale ale expresiilor simbolice, sau, aşa cum spune Russell, ca „simple comodități tipografice" (*typographical conveniences*).

Vedem dar că aşa-zisele predicate introduse de către noi în paradoxul *izomorf-heteromorf* sunt predicate definite prin accident, deci deloc definite. Să subliniem încă o dată că o astfel de proprietate poate fi constatată, dar ea nu este definisantă.

Acelaşi lucru se petrece în paradoxul lui Gödel. Într-adevăr, Gödel alege o ordine arbitrară R şi în acest cadru defineşte o clasă K, bazată exclusiv pe această ordine. Dar tocmai această idee este exprimată de către condiția găsită prin formula Tω: $\psi \neq K$; clasa K nu poate fi identică cu ψ semnifică faptul că clasa K nu este definită de ψ. Această definiție a clasei K este numită de Poincaré „definiție nepredicativă". Noi vrem să accentuăm ideea că astfel de definiții nu există, fiind făcute prin accident: accidentul poate fi constatat, dar nu este definisant.

Vom insista însă aici asupra unui alt punct al problemei în raport cu definițiile făcute prin accident. Să examinăm mai de aproape predicatele introduse de Gödel în această problemă, anume predicatele *demonstrabil-nedemonstrabil.* Aceste predicate sunt de asemenea definite prin accident. Într-adevăr, Gödel alege o ordine arbitrară R, în care el defineşte predicatele *demonstrabil* şi *nedemonstrabil*, adică exact în acelaşi mod în care au fost definite predicatele *izomorf-heteromorf:* prin accident. Acest caracter al predicatelor *demonstrabil-nedemonstrabil* poate fi mai bine observat într-un sistem logic formal ca *Principia mathematica*. O propoziție adevărată este o tautologie în logica lui Russell, adică ea este adevărată în ea însăşi. Demonstrarea unei tautologii este accesorie şi nu este necesară pentru a stabili adevărul său, tautologia fiind adevărată în mod independent de demonstrația sa. Cum spune Wittgenstein (*Tractatus logico-philosophicus*, prop. 1262, Londra, Paul Kegan, 1933), referindu-se chiar la ideea de demonstrație: „Demonstrația în logică este numai un mijloc auxiliar mecanic pentru a recunoaşte mai uşor tautologia acolo unde ea este complicată". Natural, această manieră de a arăta că propozițiile sunt tautologii este absolut neesențială pentru logică. Tocmai prin aceea că propozițiile de unde începe demonstrația trebuie să arate fără demonstrație că ele sunt tautologii. Astfel deci, predicatele *demonstrabil* şi *nedemonstrabil* nu sunt în mod esențial legate de o propoziție, ceea ce ar face ca simplul său enunț să conțină, ca predicat, fie predicatul *demonstrabil*, fie predicatul *nedemonstrabil* (ca elemente esențiale ale definiției sale) şi ceea ce ar face propoziția adevărată sau falsă în ea însăşi, adică fără demonstrație, ceea ce este contradictoriu.

Este de remarcat faptul că şi alți logicieni s-au lovit de aceeaşi dificultate, căutând o definiție a demonstrabilității în raport cu adevărul unei propoziții. Iată ce scrie Tarski în legătură cu aceasta (*Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*): „Extensiunea celor două concepte considerate (adevăr şi demonstrabilitate) nu este identică; toate propozițiile demonstrabile sunt fără îndoială – din punctul de vedere al conținutului lor – propoziții adevărate, dar definiția propoziției adevărate pe care noi o căutăm trebuie să cuprindă de asemenea propozițiile care nu sunt demonstrabile". Şi el adaugă ceva mai departe: „Trebuie să luăm în considerare aici circumstanța că – în opoziție cu conceptul de propoziție adevărată –, conceptul de propoziție demonstrabilă în aplicarea unor ştiințe deductive posedă un caracter pur fortuit". Vedem deci că predicatele *demonstrabil-nedemonstrabil* sunt legate accidental de propozițiile din sistemul *Principia matematica* (sau de sistemele înrudite) şi din acest motiv se pot construi astfel de definiții, ca aceea a lui Gödel, care conduce la un paradox, exact cum lucrurile se petrec în cadrul altor paradoxuri.

Vor formula acum concluziile noastre după cum urmează:

1. Ordinea în care Gödel numerotează semnele sistemului este arbitrară. Deci orice expresie formată regulat în sistem, dar definită exclusiv de şirul arbitrar al numerelor atribuite simbolurilor din care ea este formată (având reflectare asupra ei însăşi) este definită prin accident.

2. Orice proprietate a unei astfel de expresii, care ar rezulta pentru ea numai din poziția sa relativă şi arbitrar fixată în interiorul sistemului, prin şirul de numere ale acestor simboluri, este o proprietate accidentală. De exemplu, se poate defini clasa tuturor expresiilor sistemului ale cărui şiruri de numere întregi corespunzătoare conțin fiecare numărul 33; dar o astfel de proprietate, stabilită pe baza acestei particularități, este o proprietate accidentală şi ea nu poate fi definisantă prin condițiile definiției logicii tradiționale.

3. Demonstrația unei expresii într-o teorie deductivă nu este o „proprietate" a acestei expresii; „demonstrabil" nu este un predicat care poate fi atribuit unei expresii *înaintea* demonstrării sale, examinând numai structura sa; dacă acest lucru ar fi posibil, atunci o propoziție căreia îi putem atribui „predicatul" *demonstrabil* înaintea demonstrării sale, ar fi demonstrată fără demonstrație, ceea ce este absurd. Dar demonstrarea unei expresii într-o teorie deductivă nu este un caracter izolat al acestei expresii. Demonstrația nu este o proprietate, ci o operație. Fiind date unele reguli, se stabileşte o conexiune între o expresie şi celelalte expresii deja admise în corpul teoriei. Demonstrația posedă astfel un caracter operațional constructiv. Goblot a exprimat această idee de mai demult în formula: *A demonstra înseamnă a construi*. Şi mai înaintea lui, Kant a făcut o teorie complexă a caracterului constructiv al demonstrației (pentru a nu cita şi alți logicieni care au avut aceeaşi concepție asupra naturii demonstrației). Acesta este motivul pentru care predicatul „demonstrabil" nu poate fi atribuit unei expresii într-un mod izolat, ca predicat al acestei expresii, pentru că demonstrația sa nu depinde exclusiv de expresia considerată, ci şi de toate expresiile teoriei care servesc demonstrația sa.

4. Expresiile al căror accident este constatat nu pot fi „decise" teoretic în sistemul în care ele sunt formate, deoarece nicio expresie nu poate fi definită exclusiv prin accident, care rămâne o constatare de fapt.

5. Expresia construită de Gödel, formulată mai simplu („Propoziția care are numărul k nu este decidabilă în sistemul S") a ieşit din cadrul relativ unde ea a fost formulată şi numerotată şi este considerată în afara accidentului care a creat-o; iată de ce nu este definită. Propoziția numerotată cu numărul k, pe care ea îl poartă prin accident, este definită numai prin acest accident k şi nimic mai mult, nu apare în ea niciun alt număr care ar determina raportul relativ şi convențional cu celelalte propoziții din sistemul S; deci propoziția notată prin numărul k, fiind definită prin accident, nu este deloc definită şi nu pune nimic ca existent.

Pentru a ajunge la această concluzie, credem că nu era nevoie de demonstrația utilizată în teoremele de limitare. Credem că era suficient să ținem cont de condițiile definiției şi să considerăm că prin accident nu se poate defini nimic.

Concluzia lui Gödel, enunțată mai prudent, ar suna astfel: *într-o ordine relativă şi arbitrară R există o propoziție P_k dintr-o clasă de propoziții necontradictorii, care nu este decidabilă.*

Vom încheia această prezentare cu constatarea pe care o face Ludwig Wittgenstein în lucrarea sa *Tractatus logico-philosophicus*: „Şi nu este de mirare că cele mai multe probleme sunt de fapt false probleme".

BIBLIOGRAFIE

1. **ARISTOTELES.** Organon, trad. franc., J. Tricot, Ed. J. Vrin, Paris, 1941.

2. **BRUNSCHWICG, L.** Les étapes de la philosophie mathématique, Alcan, Paris, 1929.

3. **CARNAP, R.** Logische Syntax der Sprache, Springer, Viena, 1934;

4. **CARNAP, R.** Die Antinomien und die Unvollständigheit der Mathematik, în „Monatshefte für Mathematik und Physik", 1934.

5. **DUMITRIU, A.** Soluția paradoxelor logico-matematice, Ed. ştiinţifică, 1966.

6. **DUMITRIU, A.** Limitele sistemelor formale, în lucrarea „Eseuri", 1987.

7. **FRAENKEL A.; J. BAR-HILLEL.** Foundations of Set Theory, North-Holland Publishing Company, 1958.

8. **GÖDEL, K.** Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und werwandter Systeme I, în „Monatshefte f. Math. und Physik", 1931.

9. **LADRIÈRE, J.** Les limitations internes des formalismes, Paris, 1938.

10. **MOSTOWSKI, A.** The Present State of Investigations on the Foundations of Mathematics, Varşovia, 1955.

11. **MOSTOWSKI, A.** A Stumbling Block in Constructive Mathematics, în „Journal of Symbolic Logic", vol. 18, 1935.

12. **RUSSELL, B.; WHITEHEAD, A.** Principia mathematica, Cambridge University Press, vol. I, 1910; vol. II, 1912; vol. III, 1913.

13. **TARSKI, A.** Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, în „Studia Philosophica", Leopoli, 1935.

14. **MOSTOWSKI, A.** A Stumbling Block in Constructive Mathematics, în „Journal of Symbolic Logic", vol. 18, 1935.

15. **WITTGENSTEIN, L.** Tractatus logico-philosophicus, Ed. Paul Kegan, Londra, 1922.