SEPARABILITATE LINIARĂ ÎN REȚELE NEURONALE ARTIFICIALE

Nicoleta Liviana Tudor

Catedra de Informatică,

Universitatea de Petrol şi Gaze din Ploieşti, România

LTudor@upg-ploiesti.ro

Rezumat: Puterea şi utilitatea rețelelor artificiale neuronale au fost demonstrate în aplicații care includ probleme de diagnoză, medicină, finanțe, controlul roboților, procesarea semnalelor şi a imaginilor şi alte probleme de recunoaştere a formelor.

Un prim val de interes în rețele neuronale a apărut după introducerea neuronilor biologici de către McCulloch şi Pitts. Aceşti neuroni au fost prezentați ca modele de componente conceptuale pentru circuite care realizează anumite calcule. Rosenblatt a propus perceptronul, un model mai general decât unitățile de calcul McCulloch–Pitts. Ideea esențială era introducerea ponderilor numerice şi a unui model special de interconectare. Perceptronul clasic este o rețea neuronală ce poate rezolva probleme de recunoaştere a formelor, putând reprezenta numai funcții liniar separabile.

Acest articol prezintă câteva metode de testare a liniar-separabilității. Pentru crearea unui model de clasificare, pentru funcții liniar separabile, se poate folosi o rețea neuronală cu un strat de perceptroni. Complexitatea liniar-separabilității punctelor din spațiul de intrare este definită de rezolvarea unei probleme de optimizare liniară.

Cuvinte cheie: liniar separabilitate, rețele neuronale, perceptron, model de clasificare, optimizare liniară, spațiu de intrare.

Abstract: The power and usefulness of artificial neural networks have been demonstrated in several applications including diagnostic problems, medicine, finance, robotic control, signal and image processing and other problems of pattern recognition.

A first wave of interest in neural networks emerged after the introduction of biological neurons by McCulloch and Pitts. These neurons were presented as conceptual components for circuits that could perform computational tasks. Rosenblatt proposed the perceptron, a more general computational model than McCulloch–Pitts units. The essential innovation was the introduction of numerical weights and a special interconnection pattern. The classical perceptron is in fact a neural network for the solution of certain pattern recognition problems and it can only compute linearly separable functions.

This article presents some of the methods for testing linear separability. A single layer perceptron neural network can be used for creating a classification model, when the functions are linearly separable. The complexity of linearly separating points in an input space is defined by the complexity of solving linear optimization problem.

Keywords: linear separability, neural network, perceptron, classification model, linear optimization, input space.

1. Introducere

Cercetările din domeniul Inteligenței Artificiale au vizat dezvoltarea conceptului de calcul neuronal, un instrument folosit în generarea de sisteme cu inteligență artificială. Calculul neuronal încearcă să dezvolte sisteme instruibile pentru scopuri generale, folosind o cantitate mică de cunoştințe inițiale [3]. Astfel de sisteme se mai numesc rețele neuronale sau sisteme conexioniste [1].

McCulloch şi Pitts au pus bazele calculului neuronal, prin definirea modelului neuronului. Rosenblatt a propus un tip de rețea bazată pe perceptroni, obținută prin interconectarea unei mulțimi de neuroni, definind astfel primul model de rețea neuronală artificială [2]. Conform teoriei lui Rosenblatt, perceptronul conține cinci elemente de bază: un vector cu intrări, ponderile (conexiunile dintre neuroni), funcția de însumare, dispozitivul de detecție a pragului şi o ieşire. Rețelele neuronale cu mai multe straturi de perceptroni propuse de Rosenblatt, erau capabile sã rezolve probleme simple de clasificare, prin modificarea ponderilor conexiunilor dintre neuroni. Minsky şi Papert [6] au prezentat o serie de demonstrații matematice şi utilizări ale perceptronului, dar şi limitările referitoare la calculul anumitor predicate sau la reprezentarea funcției booleene XOR.

Perceptronul propus de Rosenblatt este un model mai general decât unitățile de calcul McCulloch–Pitts [4]. Ideea esențială constă în introducerea ponderilor numerice şi a unui model special de interconectare. Perceptronul clasic este o rețea neuronală folosită pentru soluționarea problemelor de recunoaştere a formelor şi realizează decizii bazate pe liniar separabilitatea spațiului de intrare. Deci perceptronul poate procesa numai funcții liniar separabile.

Acest articol prezintă câteva metode de testare a liniar separabilității. O rețea neuronală cu un strat de perceptroni poate fi utilizată pentru crearea unui model de clasificare, în cazul folosirii unor funcții liniar separabile. Lucrarea realizează un studiu de caz ce tratează problema clasificării într-o rețea de perceptroni, formalizată matematic ca o problemă de minimizare.

Reprezentarea funcțiilor booleene cu ajutorul perceptronului conduce după un număr finit de iterații la determinarea unui hiperplan de separare a mulțimii punctelor din spațiul de intrare.

Separabilitatea liniară poate fi privită şi ca o problemă de optimizare liniară sau de programare liniară. Determinarea ponderilor în procesul de antrenare a perceptronului este echivalentă cu găsirea punctelor interne ale poligonului convex [9], delimitat în spațiul ponderilor. Astfel, pentru ca un perceptron să fie antrenat să clasifice forme, trebuie rezolvată o problemă de punct interior, deoarece punctele interne reprezintă toate combinațiile de ponderi posibile ale perceptronului.

Complexitatea liniar separabilității punctelor din spațiul de intrare este definită de rezolvarea unei probleme de optimizare liniară.

2. Separabilitate liniară

Din perspectivă geometrică, două mulțimi de puncte dintr-un spațiu bidimensional sunt liniar separabile, dacă pot fi complet separate de o singură linie. Dacă generalizăm, se poate afirma că două mulțimi de puncte dintr-un spațiu d-dimensional ($d \geq 2$), sunt liniar separabile dacă ele pot fi separate de un hiperplan.

Fie A şi B două mulțimi de puncte dintr-un spațiu d -dimensional ($d \geq 2$). Atunci A şi B sunt liniar separabile, dacă există $d + 1$ numere reale w_0, w_1, w_2, ..., w_d, astfel încât:

fiecare punct $i_j \in A$ ($j = 1,...,d$) satisface relația: $\sum_{j=1}^{d} w_j \, i_j \geq w_0$ (1)

fiecare punct $i_j \in B$ ($j = 1,...,d$) satisface relația: $\sum_{j=1}^{d} w_j \, i_j < w_0$ (2)

Dacă o rețea neuronală foloseşte o mulțime de antrenare liniar separabilă, se impune o anumită arhitectură pentru rețea.

Pentru aceasta, vom considera o unitate singulară, care separă o mulțime d -dimensională de intrare $\{ i_1, i_2, ..., i_d \}$, în două ieşiri distincte.

Fie mulțimea de antrenare H, având elemente de forma:

$(i_1, t_1),\ldots,(i_d,t_d)$,

unde $(i_1, i_2, ..., i_d)$ este vectorul de intrare, iar $(t_1, t_2, ..., t_d)$ este vectorul dorit de ieşire (ieşire de tip target – țintă).

Deci elementele de intrare ale mulțimii de antrenare H, vor fi privite ca puncte din spațiul R^d, fiecare punct fiind reprezentat ca un vector coloana $\underline{i}$ de dimensiune $\underline{d}$, iar vectorul ponderilor va fi notat $\underline{w}$:

$$\underline{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ . \\ . \\ i_d \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ w_d \end{pmatrix}$$

Definim funcția f care determină activarea rețelei pentru o unitate individuală astfel:

$f : \underline{I} \rightarrow net_i$

$$f(\underline{i}) = \sum_{j=1}^{d} w_j \, i_j - w_0 \text{ sau:} \tag{3}$$

$$f(\underline{i}) = \underline{w}^T * \underline{i} - w_0, \tag{4}$$

unde $\underline{I}$ este mulțimea vectorilor de intrare pentru o unitate singulară ($\underline{I} \subset R^d$), net_i este mulțimea semnalelor de activare a unității ($net_i \subset R$), iar $\underline{i}$ este vector de intrare.

Hiperplanul, notat H_i, care defineşte liniar separabilitatea mulțimii de antrenare, este caracterizat de ecuația [7]:

$$f(\underline{i}) = 0 \tag{5}$$

$$\text{sau } \underline{w}^T * \underline{i} - w_0 = 0 \tag{6}$$

În cazul perceptronului, ieşirea rețelei poate fi determinată de funcția *hardlim* (valoarea *hardlim*(f($\underline{i}$))), care oferă perceptronului capacitatea de a clasifica vectorii de intrare, prin împărțirea spațiului de intrare în două regiuni, prin hiperplanul H_i :

hardlim : R → { 0, 1 }

$$hardlim\,(\text{n}) = \begin{cases} 0, \text{ dacă n } < 0 \\ 1, \text{ dacă n } >= 0 \end{cases}$$

Graficul funcției f (sau hiperplanul H_i), separă spațiul R^d în regiunea pozitivă, notată R_+, şi regiunea negativă, notată R_-, după cum urmează:

$$f(\underline{i}) = \underline{w}^T * \underline{i} - w_0 \begin{cases} > 0, \text{ dacă } (i_1, i_2, ..., i_n) \in R_+ \\ = 0, \text{ dacă } \underline{i}^T \in H_i \\ < 0, \text{ dacă } (i_1, i_2, ..., i_n) \in R_- \end{cases} \tag{7}$$

Regiunile R_+ şi R_- se mai numesc şi regiuni de clasificare.

Definiție. Dacă există o regiune de decizie liniară (un hiperplan de decizie) care clasifică (împarte) în mod corect toate mulțimile de antrenare din H, pentru o problemă de clasă c = 2, atunci mulțimile se numesc liniar separabile [10].

Problemele care nu sunt liniar separabile se numesc non-liniar separabile sau complexe din punct de vedere topologic [7].

2.1 Spațiul intrărilor şi al ponderilor

Ieşirile calculate de perceptron pot determina o separare liniară a spațiului de intrare. Însă procesul de calculare a ponderilor corespunzătoare perceptronului, poate fi ilustrat de spațiul ponderilor.

Pentru un perceptron cu d intrări ($d \geq 2$), găsirea unei condiții de liniar separabilitate este echivalentă cu determinarea a $d+1$ parametri, dintre care d ponderi şi o polarizare (sau bias, prag). Aceasta înseamnă că fiecare punct din spațiul de intrare extins $d+1$- dimensional ($d \geq 2$) are corespondent un hiperplan, în spațiul ponderilor $d+1$- dimensional. Şi reciproc: fiecare punct din spațiul ponderilor $d+1$- dimensional ($d \geq 2$) are corespondent un hiperplan, în spațiul de intrare extins $d+1$- dimensional.

Să considerăm un exemplu cu o combinație liniară de d = 3 intrări i_1, i_2, i_3, care reprezintă un punct din spațiul de intrare, R^3, şi defineşte o separare liniară a spațiului ponderilor, prin planul:

$$w_1 * i_1 + w_2 * i_2 + w_3 * i_3 = 0 \tag{8}$$

Analog, un punct din spațiul ponderilor corespunde unui plan din spațiul de intrare, evidențiat în figura 1:

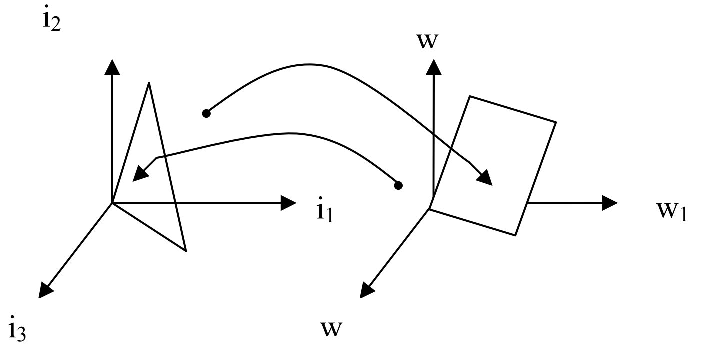

Figura 1. Spațiul intrărilor şi al ponderilor.

2.2 Separabilitate liniară completă (absolută)

Definiție. Fie A şi B două mulțimi de puncte dintr-un spațiu d - dimensional ($d \geq 2$). Atunci A şi B sunt complet (absolut) liniar separabile, dacă există $d+1$ numere reale w_0, w_1, w_2, ..., w_d, astfel încât:

fiecare punct $i_j \in A$ ($j = 1$, ..., d) satisface relația: $\sum_{j=1}^{d} w_j \; i_j > w_0$ (9)

fiecare punct $i_j \in A$ ($j = 1$, ..., d) satisface relația: $\sum_{j=1}^{d} w_j \; i_j < w_0$ (10)

Dacă perceptronul cu prag 0 poate separa liniar două mulțimi finite de vectori de intrare, atunci este necesară o ajustare foarte mică a ponderilor, pentru o separare liniară completă (absolută).

Noțiunea de separabilitate liniară completă poate fi generalizată în cazul a m mulțimi (m>2) de puncte astfel:

Definiție. Fie m mulțimi de puncte, notate A_k ($k \leq m$), dintr-un spațiu d - dimensional ($d \geq 2$). Mulțimile A_k ($k \leq m$) sunt absolut liniar separabile dacă există m funcții liniare,

$f_k : A_k \rightarrow R$, ($k \leq m$)

$$f_k\ (\underline{i}) = \sum_{j=1}^{d} w_{kj}\ i_j\ \text{ - } w_{k0},\ \text{unde } \underline{i} \in A_k, \qquad (11)$$

cu proprietatea că $\underline{i} \in A_k$ dacă şi numai dacă $f_k(\underline{i})>0$ şi $f_p(\underline{i})<0$, pentru orice $k \le m$, $p \le m$, $p \ne k$.

Observaţie Mulţimile absolut liniar separabile sunt liniar separabile. În cazul $m=3$ şi $d=2$, separabilitatea liniară se poate ilustra ca în figura 2.

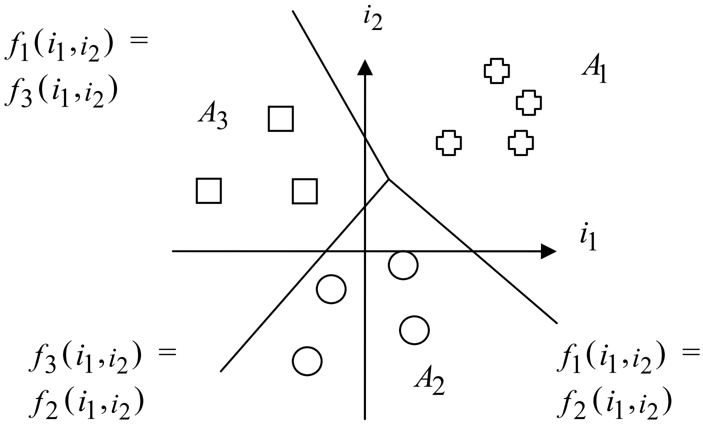

Figura 2. Mulţimi liniar separabile.

3. Reprezentarea funcţiilor booleene

Perceptronul realizează decizii bazate pe liniar separabilitatea spaţiului de intrare. Deci perceptronul poate procesa numai funcţii liniar separabile.

Perceptronul poate reprezenta funcţii booleene $f:\{0,1\}^d \to \{0,1\}$, cu proprietatea că există o transformare liniară.

$$g : R^{d+1} \to R, g\ ,\ (x) = \sum_{j=0}^{d} w_j i_j \qquad (12)$$

cu proprietatea că $f\ (x) = 0$ dacă şi numai dacă $g(x) \le 0$ şi $f(x) = 1$ dacă şi numai dacă $g(x) > 0$.

Se pune problema dacă pentru orice funcţie booleană cu această proprietate, algoritmul perceptronului furnizează o soluţie. Răspunsul este afirmativ şi este demonstrat de următoarea teoremă:

Teoremă. Pentru o problemă liniar separabilă, algoritmul perceptronului conduce după un număr finit de iteraţii la coeficienţii unei funcţii de decizie (deci la reprezentarea unei funcţii booleene cu proprietăţile de mai sus) [9].

O problemă importantă constă în determinarea funcţiilor logice care pot fi implementate cu o reţea neuronală cu un singur perceptron. Numărul de funcţii liniar separabile, cu două argumente, poate varia între 14 şi 16 posibile funcţii booleene.

De exemplu, se pot efectua toate combinațiile posibile de funcții booleene, de două variabile (tabelul 1.), în care funcția f_1 este AND, f_2 este funcția OR, iar f_3 este funcția XOR, ş.a.m.d.

Tabelul 1. Funcții booleene de două variabile.

i_1	i_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

Perceptronul separă spațiul de intrare pentru funcțiile AND şi OR în două regiuni de clasificare (figura 3).

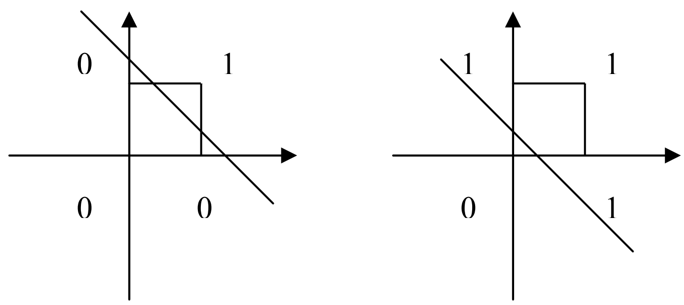

Figura 3. Regiuni de clasificare pentru AND şi OR.

3.1 Exemplu de funcție booleană non-liniar separabilă

Un exemplu de funcție non-liniar separabilă este funcția booleană XOR (sau exclusiv), care nu poate fi reprezentată cu ajutorul unei rețele neuronale de tip perceptron.

Curbele de decizie sunt desemnate de funcțiile utilizate pentru a delimita regiunile spațiului de intrare [8]. Se poate utiliza o combinație de curbe de decizie sau o combinație de mai mulți perceptroni, pentru izolarea regiunilor convexe ale spațiului de intrare.

O separare non-liniară a spațiului de intrare, în cazul funcției XOR, foloseşte o curbă de decizie (figura 4).

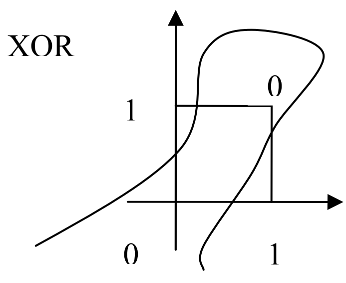

Figura 4. Separare non-liniară a spațiului de intrare.

O rețea neuronală trebuie să învețe să identifice aceste regiuni de clasificare (parametrii curbelor de decizie liniară) şi să le asocieze cu răspunsul corect (ieşirea corectă a rețelei).

Pentru implementarea funcției XOR, să considerăm un perceptron cu două intrări, cu ponderile w_1, w_2 şi polarizarea (pragul) *b*. Se efectuează următoarele calcule analitice:

$$i_1 = 1,\ i_2 = 1 \Rightarrow w_1 i_1 + w_2 i_2 = w_1 + w_2 < b$$

$$i_1 = 1,\ i_2 = 0 \Rightarrow w_1 i_1 + w_2 i_2 = w_1 \geq b$$

$$i_1 = 0,\ i_2 = 1 \Rightarrow w_1 i_1 + w_2 i_2 = w_2 \geq b$$

$$i_1 = 0,\ i_2 = 0 \Rightarrow w_1 i_1 + w_2 i_2 = 0 < b$$

Dacă *b* este pozitiv, w_1 şi w_2 sunt pozitive, atunci inegalitatea $w_1 + w_2 < b$ nu poate fi adevarată întotdeauna. Această contradicție demonstrează că perceptronul nu poate rezolva funcția XOR. Deci nu există nicio dreaptă care să separe spațiul de intrare al funcției XOR.

3.2 Eroarea algoritmului de antrenare pentru funcții booleene

Eroarea algoritmului de antrenare în cazul perceptronului provine de la mulțimea de puncte care nu sunt clasificate corect. Scopul antrenării este minimizarea funcției eroare şi clasificarea corectă a tuturor punctelor.

O soluție de minimizare a erorii [5] poate fi metoda Greedy, care presupune calcularea erorii la fiecare pas, în funcție de un vector pondere (cu valori inițiale aleatoare). Valorile vectorului pondere trebuie ajustate, în raport cu spațiul ponderilor şi eroarea obținută.

4. Clasificare într-o rețea de perceptroni

O mulțime de vectori, ce trebuie clasificați de un perceptron într-o regiune pozitivă şi una negativă, delimitează în spațiul ponderilor un obiect geometric de tip dreaptă, poligon, poliedru (polytope), ale cărui puncte interne reprezintă toate combinațiile de ponderi posibile ale perceptronului.

Algoritmul de învățare a perceptronului găseşte o soluție când interiorul figurii geometrice nu este vid. Putem exprima această idee astfel: dacă se doreşte ca un perceptron să fie antrenat să clasifice forme, trebuie rezolvată o problemă de punct interior.

Astfel, separabilitatea liniară poate fi privită ca o problemă de optimizare liniară sau de programare liniară.

Presupunem că se doreşte antrenarea unei rețele neuronale cu un perceptron, astfel încât să clasifice corect n puncte din spațiul R^d.

Fie vectorul de intrare $\underline{i} = (i_1,\ i_2,\ ...,\ i_d)^{\mathrm{T}}$ din spațiul R^d. Rețeaua de tip perceptron va avea două ieşiri distincte.

Notăm:

$\underline{w}$ vectorul ponderilor, de dimensiune d : $\underline{w} = (w_k)^T,\ k = 1,...,\ d$

$\underline{i}_j = (i_{j1},\ i_{j2},\ ...,\ i_{jd})^{\mathrm{T}}$, ($j = 1,...,n$), cele n puncte din spațiul R^d

Scopul antrenării rețelei de perceptroni constă în găsirea unui hiperplan de separare a mulțimilor M_k ($k \in \{1, 2\}$) de puncte din spațiul R^d.

Să presupunem că:

dacă $(i_{j1}, i_{j2}, ..., i_{jd}) \in M_1, (j=1,...,p)$, p $\geq$ 1 atunci $\sum_{k=1}^{d} i_{jk} w_k - b_j \leq 0$, (13)

dacă $(i_{j1}, i_{j2}, ..., i_{jd}) \in M_2, (j=p+1,...,n)$, atunci $\sum_{k=1}^{d} i_{jk} w_k - b_j > 0$. (14)

Sistemul de inegalități

$$\sum_{k=1}^{d} i_{jk} w_k - b_j \leq 0, (j=1,...,p), \text{ p} \geq 1 \tag{15}$$

$$-\sum_{k=1}^{d} i_{jk} w_k + b_j \leq 0, (j=p+1,...,n)$$

poate fi scris în mod echivalent:

$$A\,\underline{w} \leq \underline{b} \tag{16}$$

dacă notăm A matricea de tip $n \times d$ cu elementele i_{jk} (j = 1,…, p) şi -i_{jk} (j = p+1,…, n , k = 1,…,d) şi $\underline{b}$ polarizarea (pragul, valoarea bias) – un vector coloana n -dimensional $\underline{b} = (b_1, b_2, ..., b_p, b_{p+1}, ..., b_n)^T$ (la un perceptron este conectată o singură intrare adițională de tip bias).

Sistemul de inegalități $A\,\underline{w} \leq \underline{b}$ reprezintă constrângerile aplicate rețelei neuronale de perceptroni, pentru apartenența punctelor din spațiul R^d la mulțimile de clasificare. Acest sistem de inegalități sugerează ideea rezolvării unei probleme de optimizare liniară, care poate fi o problemă de minimizare.

Un model matematic de optimizare se caracterizează prin următoarele:

- o funcție obiectiv care determină eficiența modelului de optimizare şi realizează o maximizare sau o minimizare;

- o mulțime de variabile de decizie (intrări controlabile), care influențează valoarea funcției obiectiv;

- parametri (intrări necontrolabile);

- o mulțime de constrângeri exprimate sub forma unui sistem de ecuații sau inegalități, care exprimă relații între variabilele de decizie şi parametri.

Algoritmul de antrenare a perceptronului este o procedură de modificare a ponderilor şi a polarizărilor unei rețele neuronale. Deci o problemă de clasificare într-o rețea de perceptroni se poate formaliza astfel:

- fie un sistem de inegalități (în necunoscuta $\underline{w}$) de forma:

$$A\,\underline{w} \leq \underline{b} \tag{17}$$

care poate fi transformat într-un sistem de ecuații, prin introducerea unui vector $\underline{y}$ n- dimensional şi a matricii identitate I de dimensiune $n \times n$:

$$A\,\underline{w} + I\,\underline{y} = \underline{b} \tag{18}$$

Problema de optimizare liniară ce trebuie rezolvată, poate fi exprimată ca o problemă de minimizare:

$$\min\{\sum_{j=1}^{n} y_j \; / \; A\,\underline{w} + I\;\underline{y} = \underline{b},\; \underline{w} \geq 0,\; \underline{y} \geq 0\} \qquad (19)$$

Dacă minimul este negativ, atunci soluția problemei originale este vidă, adică regiunea de clasificare caracterizată de inegalitatea $A\;\underline{w} \leq \underline{b}$ este vidă. Dacă minimul este zero, atunci $\underline{w}$ determinat în timpul optimizării, este un punct intern de pe marginea regiunii de clasificare.

Determinarea ponderilor în procesul de antrenare a perceptronului este echivalentă cu găsirea punctelor interne ale poligonului (polytop) convex [9], prin utilizarea de algoritmi de programare liniară.

Interpretarea geometrică a soluției problemei de clasificare, într-o rețea de perceptroni cu două intrări, $\underline{i} = (i_1,\, i_2)^T$ din spațiul R^2 constă în reprezentarea grafică a funcției care va fi optimizată (figura 5).

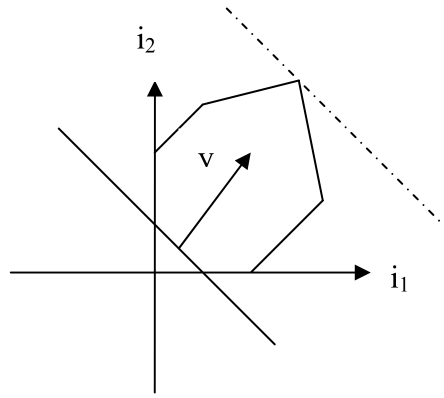

Figura 5. Spațiul soluțiilor problemei de optimizare liniară.

Problema de optimizare liniară poate avea una sau mai multe soluții reprezentate de dreapta normală la vectorul $\underline{y}$, asociat funcției minimizate, sau o dreaptă paralelă cu normala şi incidentă cu poligonul convex.

5. Concluzii

Acest articol prezintă detaliat conceptul de liniar separabilitate utilizat în rețele neuronale.

Pentru rezolvarea problemelor de clasificare, poate fi utilizată o rețea neuronală cu un strat de perceptroni, care permite determinarea unui hiperplan de separare a mulțimii punctelor din spațiul de intrare.

Această lucrare evidențiază faptul că separabilitatea liniară poate fi privită şi ca o problemă de optimizare liniară, deoarece determinarea ponderilor în procesul de antrenare a perceptronului este echivalentă cu găsirea punctelor interne ale poligonului convex, delimitat în spațiul ponderilor. Este prezentat un studiu de caz ce tratează problema clasificării într-o rețea de perceptroni, formalizată matematic ca o problemă de minimizare.

BIBLIOGRAFIE

1. **ANDERSON, JAMES.** Neural models with cognitive implications. In LaBerge & Samuels, Basic Processes in Reading Perception and Comprehension Models, Hillsdale, Erlbaum, 1977, pp. 27-90.
2. **DENNING, PETER**. The science of computing: Neural networks. American Scientist, nr. 80, 1992, pp. 426-429.
3. **DUMITRESCU, HARITON COSTIN.** Rețele neuronale. Teorie şi aplicații. Editura Teora, Bucureşti, 1996, 460 p.
4. **FELDMAN, BALLARD.** Connectionist models and their properties. Cognitive Science, nr. 6, 1982, pp. 205-214.
5. **KRÖSE, BEN; PATRICK VAN DER SMAGT.** An introduction to Neural Networks. University of Amsterdam, Netherlands, 1996, 135 p.
6. **MINSKY, MARVIN; SEYMOUR PAPERT.** Perceptrons: An lntroduction to Computational Geometry. MIT Press, Cambridge, Mass., 1969.
7. **MOISE ADRIAN.** Rețele neuronale pentru recunoaşterea formelor. Editura MATRIX ROM, Bucureşti, 2005, 309 p.
8. **NILSSON, NILS; MORGAN KAUFMANN.** Learning Machines. San Mateo, CA, New Edition, 1990, pp. 37-42.
9. **ROJAS, RAÚL**. Neural Networks A Systematic Introduction. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
10. **SCHALKOFF, ROBERT**. Pattern Recognition Statistical, Structural and Neural Approaches. John Wiley & Sons, New York, 1992.