MATEMATICA GPS - RAFINAREA TRACKING-ULUI LA TELESCOAPELE DIGITALE FOLOSIND CORELAȚII DE ŞIRURI ŞI TEORIA RELATIVITĂȚII

Gabriel Octavian Corban

Institutul Național de Cercetare – Dezvoltare în Informatică, ICI - Bucureşti

gabycorban@yahoo.com

Corneliu Avram – Mănescu

G.S.T. Ploieşti

avram050652@yahoo.com

Rezumat: Calculul cu foarte mare precizie a coordonatelor unui punct pe suprafața terestră nu poate fi făcut prin folosirea rețelei de sateliți orbitali, decât ținând seama de teoria relativității a lui Einstein, în esență, de curbarea spațiului în vecinătatea unui corp de masă apreciabilă şi dilatarea timpului la viteze mari.

Această teorie are mari implicații în calculul riguros al poziției telescoapelor digitale profesionale dotate cu module computerizate specializate în urmărirea obiectelor din Univers.

Mai exact, realizarea de către aceste telescoape a funcției de urmărire (tracking) într-un mod atât de precis încât obiectul urmărit să pară nemişcat prin ocularul telescopului în ciuda mişcării de rotație a Pământului sau deplasărilor relative față de corpurile din cadrul sistemului solar.

Lucrarea prezintă sumar modul de funcționare a GPS şi teoria matematică utilizată de către sistem, ca o aplicație în acest domeniu. Sunt analizate aspectele practice şi corecțiile care trebuie implementate pentru a obține rezultate concludente. Influențele prezise de teoria relativității, prin dilatarea timpului la viteze mari şi curbarea spațiului în vecinătatea unui corp cu masă apreciabilă, sunt verificate experimental în cadrul sistemului. Sunt descrise şi alte aplicații ale GPS, iar anexa conține câteva date de natură tehnică.

Lucrarea se adresează celor interesați de aplicațiile practice ale ştiinței şi evidențiază tocmai această legătură strânsă dintre ştiință, tehnologie şi viața cotidiană.

Cuvinte-cheie: telescoape digitale, tracking digital, sistem general de poziționare (GPS), coordonate carteziene, coordonate geografice, corpuri finite, polinoame ireductibile, corelații de şiruri, teoria relativității, ceas atomic.

Abstract: Calculating precisely the coordinates of a given point on the Earth's surface using the orbiting satellites network, can be done only by taking into account Einstein's theory of relativity, thus the curved space in the vicinity of a body of considerable mass and time dilation at appropriate speeds.

This theory has great implications in accurately calculating the position of digital telescopes with computerised modules specialised in tracking objects throughout the Universe.

More exactly, tracking so precisely to the extend that the object seems to "freeze" in the eyeglass of the telescope, in spite of Earth rotation or relative motion to other bodies in the solar system.

The paper summarises the functions of the GPS module and the mathematical theory used by the system as an application in this domain. The practical aspects and corrections that are to be implemented in order to obtain conclusive results are also analysed. Influences predicted by the theory of relativity, such as time dilation at great speeds and curving of space in the vicinity of a body of considerable mass are verified through experiments within the system. Other applications of the GPS are also described and the Annex contains some technical data.

The paper is aimed to those interested in practical applications of science and highlights the close bond of science, technology and everyday life

Key words: digital telescopes, digital tracking, GPS, Cartesian coordinates, geographical coordinates, finite body, irreducible polynomial, string correlations, theory of relativity, atomic clock

1. Telescoapele cu urmărire digitală

Calculul exact al poziției unui telescop are o importanță crucială atunci când se folosesc telescoapele digitale cu poziționare şi urmărire automată (tracking digital). Cele mai mici erori de calcul ar putea altera grav procesul de urmărire computerizată a diverselor obiecte cereşti (Planete, galaxii, nebuloase, comete, asteroizi).

Telescoapele profesionale dotate cu module computerizate specializate în urmărirea pe categorii a obiectelor cereşti sunt dotate cu sisteme GPS în sensul de a se stabili cu foarte mare precizie poziția exactă a receptorului (telescop) pe suprafața Pamântului şi de a se calcula pe baza acestei poziții, tipul de mişcare controlată a telescopului (tracking-ul) astfel încât imaginea obiectului observat să rămană fixă în obiectivul instrumentului.

Telescoapele electronice moderne, cu urmărire (tracking) bazate pe GPS, sunt înzestrate cu ceea ce este numit montură de tip “GO TO”. O astfel de montură de tip GO TO este un dispozitiv mecanic motorizat şi computerizat care ajustează permanent, în 3 dimensiuni, poziţia telescopului (axa lui) astfel ca el să poată fi orientat exact şi în mod automat, spre corpurile cereşti alese iar privitorul să aibă în câmpul vizual al telescopului imaginea corpului ceresc, mereu în poziţie fixă, neafectată de mişcarea de rotaţie a Pamântului în jurul axei sau de revoluţie în jurul Soarelui în acelaşi timp ţinând seama şi de mişcarea relativă a obiectului faţă de Soare. Telescopul este în mod rigid, cuplat mecanic cu montura GO TO, putând fi astfel orientat de către aceasta, fie manual, cu ajutorul unei telecomenzi, către corpurile cereşti pe care utilizatorul îşi propune să le vizualizeze, fie automat, atunci când controlerul cunoaşte exact poziţia telescopului şi data/ora exactă.

Telecomanda transmite cererea utilizatorului către calculatorul monturii de tip GO TO, acesta beneficiind de un set de informaţii pre-încarcate referitoare la poziţiile corpurilor cereşti. Oricât de exacte şi multe ar fi aceste informaţii pre-încărcate, ele nu capătă o valoare practică până când nu sunt corelate cu poziţia curentă a telescopului precum şi cu ora universală exactă la care este declarată această poziţie. Această corelare poartă numele de ALINIERE.

În acest moment, modulul **GPS** înglobat în montura telescopului furnizează poziţia exactă a telescopului, data şi ora la care s-a făcut cererea poziţiei. Datele GPS, adică latitudine, longitudine, timp, altitudine sunt folosite pentru stabilirea poziţiei pe glob a telescopului. Ştiind poziţia pe glob şi data/ora exactă, telescopul calculează poziţiile pe cer a obiectelor din baza de date corespunzătoare.

Din acest moment se solicită observatorului uman aşa numitul proces de aliniere, adică fixarea manuală foarte precisă a axului telescopului, pe aşa numitele puncte de referinţă care de fapt sunt stele cu magnitudine cât mai mică (foarte strălucitoare), incluse (pre-definite) în colecţia proprie de date a procesorului GO TO.

Alinierea pe stele este necesară pentru a stabili puncte de referinţă congruente cu poziţia din baza de date. De fapt se compară modelul cerului din baza de date cu modelul cerului real: cu cât numărul de stele de comparaţie (adică aliniere) este mai mare, cu atât mai mult erorile de poziţionare a telescopului pe cer se reduc aşa încât printr-o simplă selecţie dintr-o listă de corpuri cereşti, montura telescopului orientează telescopul exact către acel corp ceresc.

Acele puncte de referinţă congruente se folosesc atâta timp cât caut să văd mereu un nou astru, după aliniere, iar ele ajută pentru a compara poziţia reală pe cer cu poziţia din baza de date. Calculele se fac local, în controlerul telescopului. Pe baza acestor date se poate calcula un regim de urmărire (tracking) cu telescopul, a astrului ales, folosind servomotoarele telescopului care îl vor mişca pe acesta incremental, pe gradele de libertate de care acesta beneneficiază funcţie de tipul său (Alt-Azimutal sau Ecuatorial).

Aşadar, o asemenea montură de tip GO TO îndeplineşte 3 funcţii de bază:

- alinierea;
- găsirea automată a obiectului cerut folosind telecomanda (hand-controler) şi direcţionarea mecanică pe acel obiect, a axului telescopului, astfel ca obiectul să apară în câmpul vizual al telescopului;
- urmărirea continuă a obiectului, necesară datorită mişcării de rotaţie şi revoluţie a Pământului prin aşa numitul proces de tracking (incrementarea corespunzatoare într-o mişcare făcută pe gradele de libertate ale telescopului) astfel încât obiectul vizualizat prin telescop să aibă o poziţie virtual fixă.

Sistemul Global de Poziţionare - GPS a fost completat în 1995 de către Departamentul Apărării al SUA şi a fost autorizat pentru aplicaţii civile. El era compus iniţial din 24 de sateliţi, dintre care cel puţin 21 erau funcţionali 98% din timp. În 2005 el a fost extins la 32 de sateliţi, dintre care cel puţin 24 sunt funcţionali, iar restul sunt de rezervă, pentru a înlocui un eventual satelit defect. Sateliţii se află la 20200 km de suprafaţa Pământului şi sunt distribuiţi în 6 plane orbitale, care fac un unghi de 55° cu planul ecuatorial. Fiecare plan orbital conţine cel puţin 4 sateliţi şi fiecare satelit descrie o orbită circulară în jurul Pământului în 11 h 58 min. Sateliţii sunt distribuiţi astfel încât în orice moment şi în orice loc de pe suprafaţa Pământului pot fi observaţi cel puţin 4 sateliţi.

Cei 24 de sateliţi emit câte un semnal care se repetă periodic şi care poate fi captat de către un receptor special, un echipament care foloseşte informaţia pentru a-şi determina poziţia. În acelaşi timp, receptorul poate determina poziţia absolută a fiecărui satelit în orice moment. Semnalul emis conţine şi un cod corector al inevitabilelor erori de orbită, cod actualizat la fiecare oră. Semnalul emis de către fiecare satelit are o perioadă fixă şi începutul fiecărui ciclu poate fi calculat de receptor. Sateliţii sunt dotaţi cu câte un ceas atomic de mare precizie, sincronizat cu ceasul receptorului. Când receptorul primeşte un semnal de la un satelit, el începe să-l compare cu unul generat de el şi care se presupune că este identic. În general, aceste semnale nu sunt identice, de aceea receptorul îl modifică pe cel generat de el, până când cele două semnale sunt în fază. În acest mod, receptorul poate să calculeze timpul necesar semnalului să ajungă de la satelit la el.

Sistemul GPS descris mai sus este cel standard şi permite calculul poziţiei receptorului cu o precizie de până la 20 m. Această precizie poate fi îmbunătăţită, dar din anul 2000 Departamentul Apărării a introdus în mod intenţionat inadvertenţe în semnalele sateliţilor, pentru a reduce precizia sistemului la 100 m.

Bazele teoretice pentru GPS. Presupunem că ceasurile receptorului şi ale tuturor sateliţilor sunt sincronizate perfect. Receptorul îşi calculează poziţia prin triangulare, al cărei principiu de bază este determinarea poziţiei unui obiect, cunoscând poziţia acelui obiect faţă de nişte obiecte de referinţă, ale căror poziţii sunt cunoscute. Receptorul GPS calculează distanţa la sateliţi cunoscând poziţia acestora.

- Satelitul P_1 emite un semnal care ajunge la receptor în timpul t_1, timp pe care receptorul poate să-l determine. Distanţa până la satelit este $r_1 = ct_1$, unde *c* este viteza luminii. Mulţimea punctelor care se află la distanţa r_1 de satelitul P_1 este o sferă S_1 cu centrul în P_1 şi raza r_1. Într-un sistem cartezian de coordonate, fie (*x, y, z*) poziţia necunoscută a receptorului şi (a_1, b_1, c_1) poziţia cunoscută a satelitului P_1. Receptorul se află pe sfera S_1, deci
$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 = r_1^2 = c^2t_1^2. \quad (1)$$
- Informaţia este insuficientă pentru determinarea poziţiei receptorului, dar acesta primeşte un alt semnal în **timpul** t_2 de la un satelit P_2, care se află la distanţa $r_2 = ct_2$. Ca mai sus, receptorul se află pe sfera S_2 cu centrul $P_2(a_2, b_2, c_2)$ şi raza r_2, deci
$$(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2 = r_2^2 = c^2t_2^2. \quad (2)$$
Intersecţia celor două sfere este un cerc $C_{1,2}$ pe care se află receptorul.
- Receptorul mai primeşte un semnal în **timpul** t_3 de la un satelit $P_3(a_3, b_3, c_3)$ aflat la distanţa $r_3 = ct_3$, deci el este situat pe sfera S_3 cu centrul P_3 şi raza r_3:
$$(x-a_3)^2 + (y-b_3)^2 + (z-c_3)^2 = r_3^2 = c^2t_3^2. \quad (3)$$
Receptorul se află deci la intersecţia cercului $C_{1,2}$ cu sfera S_3. Intersecţia unui cerc cu o sferă poate să conţină două puncte, deci teoretic încă nu putem fi siguri care este poziţia receptorului. Practic, sateliţii sunt poziţionaţi astfel încât una dintre soluţii poate fi eliminată, fiind departe de suprafaţa Pământului. Prin rezolvarea sistemului de ecuaţii (1), (2), (3) se poate deci determina poziţia receptorului.

Prin scădere obţinem ecuaţiile:

$$2(a_3 - a_1)x + 2(b_3 - b_1)y + 2(c_3 - c_1)z = A_1, \quad (4)$$

$$2(a_3 - a_2)x + 2(b_3 - b_2)y + 2(c_3 - c_2)z = A_2, \quad (5)$$

unde:

$$A_1 = c^2(t_1^2 - t_3^2) + a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2,$$
$$A_2 = c^2(t_2^2 - t_3^2) + a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2. \qquad (6)$$

Sateliții sunt plasați astfel încât **nu există trei sateliți coliniari**. Acest fapt ne garantează că printre determinanții:

$$\begin{vmatrix} a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \\ a_3 - a_2 & b_3 - b_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & c_3 - c_1 \\ a_3 - a_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \\ b_3 - b_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix}$$

există cel puțin unul nenul. Presupunem că primul determinant este nenul şi găsim cu regula lui Cramer din ecuațiile (4), (5) pe *x, y* ca funcții de *z* :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A_1 - 2(c_3 - c_1)z & 2(b_3 - b_1) \\ A_2 - 2(c_3 - c_2)z & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(b_3 - b_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & A_1 - 2(c_3 - c_1)z \\ 2(a_3 - a_2) & A_2 - 2(c_3 - c_2)z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(b_3 - b_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}} \qquad (7)$$

Înlocuind aceste valori în (3) obținem o ecuație de gradul doi în *z*, cu soluțiile z_1, z_2. Substituind *z* cu z_1 şi z_2 în (7), se obțin cele două soluții căutate $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$, dintre care receptorul o recunoaşte pe cea corectă.

Alegem sistemul cartezian de coordonate astfel ca exprimarea poziției prin latitudine, longitudine şi altitudine să fie cât mai simplă:

- originea sistemului de coordonate este centrul Pământului;
- axa *Oz* este axa polilor şi este orientată spre nord;
- axele *Ox, Oy* sunt conținute în planul ecuatorial;
- partea pozitivă a axei *Ox* trece prin punctul de 0° longitudine;
- partea pozitivă a axei *Oy* trece prin punctul de 90° longitudine vestică.

Raza Pământului este egală aproximativ cu 6365 km, deci o soluție (*x, y, z*) este considerată acceptabilă dacă $x^2 + y^2 + z^2 \approx (6365 \pm 50)^2$. Aproximarea $\pm$ 50 este admisă pentru poziționarea avioanelor şi a altitudinilor montane. Latitudinea *l* şi longitudinea *L* sunt unghiuri exprimate în grade şi pot fi determinate din egalitățile:

$x = R \cos L \cos l, \quad y = R \sin L \cos l, \quad z = R \sin l.$

Cum $l \in [-90°, 90°]$, obținem $l = \arcsin \frac{z}{R}$, ceea ce ne permite să calculăm $\cos l$. Longitudinea *L* este deci unic determinată din egalitățile:

$$\cos L = \frac{x}{R \cos l}, \qquad \sin L = \frac{y}{R \cos l}.$$

Distanța *h* a receptorului față de centrul Pământului este $h = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Putem să înlocuim peste tot pe *R* cu *h* şi să calculăm latitudinea şi longitudinea. Altitudinea la care se află receptorul este egală cu $h - R$.

Această teorie se aplică într-o lume ideală, dar, din păcate, lumea reală este mult mai complicată. Sateliții sunt dotați cu câte un ceas atomic foarte precis (şi foarte scump!), receptorul este înzestrat însă cu un ceas de duzină, accesibil unui buget modest. Chiar dacă ceasurile sateliților sunt sincronizate perfect, receptorul va calcula nişte timpi fictivi, conform ceasului său. Fie τ = (timpul de sosire a semnalului după ceasul receptorului) $-$ (timpul de sosire a semnalului după ceasul satelitului). Apare astfel o **a patra necunoscută** τ , decalajul ceasului receptorului față de ceasurile sateliților, ceea ce impune considerarea unui al patrulea satelit. Se aplică în mod similar regula lui Cramer pentru determinarea poziției receptorului, ceea ce este posibil, deoarece nu există trei sateliți coplanari vizibili dintr-un punct dat de pe suprafața Pământului.

Dacă receptorul “vede” mai mult de patru sateliţi, atunci se poate arăta că pentru a obţine o aproximare mai bună a poziţiei sale, receptorul trebuie să aleagă acei patru sateliţi care maximizează determinantul

$$\begin{vmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{vmatrix}.$$

Distanţele sunt calculate de către receptor folosind **constanta *c***, care este **viteza luminii în vid**. În realitate semnalul traversează atmosfera şi se refractă, ceea ce îi lungeşte traiectoria şi îi micşorează viteza. Se foloseşte de aceea un receptor auxiliar (staţie de bază) cu poziţie fixă cunoscută, realizându-se astfel un **GPS *diferenţial*** (DGPS), cu o precizie de ordinul centimetrilor.

Pământul nu este sferic în realitate, el este turtit la poli, cu raza de 6356 km, pe când la ecuator raza este de 6378 km, de aceea trecerea de la coordonate carteziene la cele geografice trebuie să ia în considerare acest fapt.

Viteza sateliţilor şi masa Pământului sunt mari, deci conform teoriei relativităţii (confirmată de măsurători) ele vor influenţa mersul ceasurilor sateliţilor. Cu toate că aceste influenţe sunt de sens contrar, ele nu se anulează reciproc, deci trebuie considerate împreună în calcule.

Până acum Statele Unite deţin monopolul pe această piaţă, ceea ce le permite un control exclusiv. În 2002 Uniunea Europeană a creat un fond de dezvoltare pentru Galileo, un sistem de poziţionare alternativ faţă de GPS.

Aplicaţii ale GPS. Sistemul Global de Poziţionare tinde să devină indispensabil, el realizând, printre altele :

- determinarea poziţiei unor persoane izolate (excursionişti, vânători, marinari) prin marcarea unui traseu, inclusive pe o hartă;
- găsirea unei adrese de către conducătorul unui taxi, de exemplu;
- orientarea cu o hartă veche, prin scanarea sau digitizarea ei;
- realizarea de coridoare aeriene pentru avioane, pentru a evita coliziunea lor;
- urmărirea simultană a mai multor autovehicule, de exemplu de către o companie de închirieri, pentru a verifica respectarea contractului;
- determinarea exactă a altitudinilor montane (Everest, K2, Mont Blanc, etc.);
- aplicaţii militare (doar pentru asta a fost creat!).

Sateliţii GPS nu transmit informaţii în legătură cu starea lor sau calitatea semnalului. Spre deosebire de ei, sateliţii Galileo transmit în mod constant astfel de informaţii, ceea ce permite receptorului să ignore semnalele de la sateliţii cu defecte. Acest fapt se realizează prin intermediul unui sistem de staţii de bază, care măsoară poziţia reală a sateliţilor şi o compară cu poziţia antecalculată. Informaţia este transmisă satelitului defect, care o retransmite receptoarelor. Guvernul SUA are în plan o îmbunătăţire asemănătoare a GPS.

2. Semnalul GPS şi registrele cu deplasare liniară

Registrele cu deplasare liniară generează şiruri care permit receptorului să se sincronizeze cu ele. Aceste echipamente simple generează semnale care par în mare măsură aleatoare, cu toate că sunt generate de un algoritm determinist. Un semnal care nu se corelează cu translaţiile lui sau cu alte semnale permite receptorului GPS să identifice semnalul unui anumit satelit şi să se sincronizeze cu el.

Registrul poate fi considerat ca o bandă cu r casete care conţin numerele $a_{n-1}, \dots, a_{n-r}$, fiecare dintre ele având valorile 0 sau 1.

Fiecare casetă este asociată cu un număr $q_i \in \{0, 1\}$, cele *r* valori q_i sunt fixe şi distincte pentru fiecare satelit. Se generează un şir pseudoaleator astfel:

- se dau condiţiile iniţiale $a_{r-1}, \dots, a_0 \in \{0, 1\}$, nu toate nule;
- fiind date $a_{n-1}, \dots, a_{n-r}$, registrul calculează $a_n = \sum_{i=0}^{r-1} a_{n-r+i} q_i$ (mod 2);
- se deplasează toate valorile spre dreapta cu o unitate, se omite a_{n-r} şi se inserează a_n în caseta cea mai din stânga;
- se iterează procedura.

Acest algoritm este determinist şi numărul condiţiilor iniţiale este finit, deci şirul generat este periodic. Există 2^r şiruri distincte de lungime *r*, deci perioada este cel mult 2^r.Dacă la un moment dat $a_{n-1} = \dots = a_{n-r} = 0,$ atunci $a_m = 0,$ pentru orice $m \geq n$.

Un şir periodic "interesant" nu conţine *r* zerouri consecutive, deci lungimea perioadei este cel mult $2^r - 1$. Fie $M = 2^r - 1$, $B = (b_1, \dots, b_M)$ şirul finit $(a_n)_{n=m}^{n=m+M-1}$ şi $C = (c_1, \dots, c_M)$ şirul finit $(a_n)_{n=p}^{n=p+M-1}$

De exemplu şirul *B* este transmis de către satelit, iar şirul *C* este o permutare ciclică a lui, generată de receptorul GPS.

Se numeşte ***corelaţia* şirurilor *B* şi *C*,** notată Cor (*B, C*), numărul indicilor *i* pentru care $b_i = c_i$ minus numărul indicilor *i* pentru care $b_i \neq c_i$.

Avem evident :

$-M \leq$ Cor (*B, C*) $\leq M$. Spunem că şirurile sunt slab corelate, atunci când Cor (*B, C*) este apropiat de 0.

Teorema 1. Corelaţia a două şiruri este dată de

$$\text{Cor}(B, C) = \sum_{i=1}^{M} (-1)^{b_i} (-1)^{c_i} .$$

Demonstraţie: Se adună 1 la Cor (*B, C*) dacă $b_i = c_i$ şi se scade 1 dacă $b_i \neq c_i$.

Dacă $b_i = c_i = 0,$ atunci $(-1)^{b_i}(-1)^{c_i} = 1 \cdot 1 = 1$,

iar dacă $b_i = c_i = 1$, atunci $(-1)^{b_i}(-1)^{c_i} = (-1) \cdot (-1) = 1.$

Similar, dacă $b_i \neq c_i$, atunci unul dintre numerele $(-1)^{b_i}, (-1)^{c_i}$ este egal cu 1, celălalt este -1 , deci $(-1)^{b_i}(-1)^{c_i} = 1 \cdot (-1) = -1$.

Orice registru cu deplasare liniară poate fi iniţializat astfel încât să genereze un şir slab corelat cu toate translaţiile lui, aşa cum rezultă din următoarea teoremă:

Teorema 2.[7] Există coeficienţii $q_0, \dots, q_{r-1} \in \{0, 1\}$ şi condiţiile iniţiale $a_0, \dots, a_{r-1} \in \{0, 1\}$ astfel încât şirul generat de registrul cu deplasare liniară corespunzător să aibă perioada de lungime $2^r - 1.$ Dacă *B* şi *C* sunt două "ferestre" de lungime $M = 2^r - 1$ ale acestui şir, $B = (a_n)_{n=m}^{n=m+M-1}$, $C = (a_n)_{n=p}^{n=p+M-1}$, $p > m$ şi *M* nu divide $p - m$, atunci Cor (*B, C*) = -1.

Exemplul 1. Fie $r = 4$, $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 0, 0)$ şi $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 1).$ Şirul generat are perioada 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1 de lungime $2^4 - 1$ = 15, care coincide cu toate translaţiile sale în exact 7 poziţii, deci corelaţia lui cu orice translaţie este egală cu -1 .

Fie $GF(2^r)$ un corp finit cu 2^r elemente (toate aceste corpuri sunt commutative şi sunt izomorfe între ele), $x \in GF(2^r)$ un element primitiv peste $GF2$ şi $T : GF(2^r) \to GF2$ funcţia "urmă", definită prin

$T(b_{r-1}x^{r-1} + \dots + b_1 x + b_0) = b_{r-1}$, unde $b_i \in GF2$, $0 \le i \le r$ 1. Alegem un polinom primitiv P peste $GF2$ (ireductibil şi cu o rădăcină x element primitiv al lui $GF(2^r)$), $P = X^r + q_{r-1} X^{r-1} +$

$+ \dots + q_1 X + q_0$, $b \in GF(2^r)$ un element nenul şi construim registrul cu deplasare liniară având condiţiile iniţiale $a_i = T(x^i b)$, $0 \le i \le r - 1$.

În exemplul precedent am ales $P = X^4 + X + 1$, polinom care este primitiv, $b = 1$, deci $a_0 = T(1) = 0$, $a_1 = T(x) = 0$, $a_2 = T(x^2) = 0$, $a_3 = T(x^3) = 1$.

Această construcţie funcţionează în general [7]. Dacă dorim să generăm alt şir pseudoaleator de aceeaşi lungime (fiecare satelit are un şir propriu), atunci schimbăm polinomul *P*. Corelaţiile acestor şiruri cu translaţiile lor pot fi calculate folosind teoria lui Galois, în practică se folosesc însă tabele cu valori antecalculate.

Notă. Această scurtă prezentare este realizată după [7], dezvoltări mai ample ale subiectului pot fi găsite în [2] [4] [5] , celelalte lucrări conţin alte aplicaţii interesante ale matematicii în probleme de transport, dar şi în alte domenii.

3. Suportul teoriei relativităţii în Matematica GPS

Nucleul GPS este sistemul militar NAVSTAR (*Navigational Satellite Timing and Ranging*) şi el utilizează sistemul geodezic WGS84, obţinând astfel o precizie foarte mare. GPS este compus din:

a) **Segmentul spaţial**, sateliţii, care sunt alimentaţi cu energie solară şi au baterii care le asigură funcţionarea în cazuri extreme (eclipse). Un satelit GPS cântăreşte aproximativ o tonă şi are o lungime de circa 5,6 m cu panourile solare deschise. Semnalul GPS este o undă radio, puterea transmiţătorului este de 50 W, sateliţii au o durată de viaţă de 7,5 ani şi sunt echipaţi cu câte patru ceasuri atomice (fiecare costând în jur de 50 de milioane de dolari!) şi două emiţătoare în banda D. Semnalul emis de fiecare satelit este unic, deci sateliţii pot folosi aceeaşi frecvenţă fără a se bruia.

b) **Segmentul de control** cuprinde staţia principală de la Baza Aeriană Falcon (Colorado Springs) şi staţii de monitorizare. El anticipează comportamentul orbitei şi ceasurilor fiecărui satelit.

c) **Segmentul de utilizatori**. Receptorul conţine un almanah cu ajutorul căruia poate să calculeze poziţia absolută a fiecărui satelit în orice moment. Perioada semnalului este fixată şi începutul fiecărui ciclu poate fi determinat folosind almanahul. Dacă receptorul se află la nivelul mării, atunci trei sateliţi sunt suficienţi pentru a-i determina poziţia.

Viteza orbitală a unui satelit este de aproximativ 14000 km/h. Ceasul atomic al fiecărui satelit are o precizie de 1 nanosecundă. Observatorul "vede" satelitul în mişcare relativă faţă de el, iar teoria specială a relativităţii prezice o rămânere în urmă a ceasurilor sateliţilor cu 7 microsecunde pe zi, ca efect al dilatării timpului în mişcarea lor relativă.

Curbura spaţio-temporală la nivelul orbitelor sateliţilor este mai mică decât la suprafaţa Pământului, datorită masei relativ mari a Pământului. Teoria generală a relativităţii prezice o accelerare a ceasurilor sateliţilor faţă de observatorul terestru cu 45 microsecunde pe zi. Se deduce de aici o accelerare a ceasurilor sateliţilor faţă de observatorul terestru cu 45 - 7 = 38 microsecunde = $38 \cdot 10^3$ nanosecunde pe zi.

Dacă aceste informaţii nu ar fi luate în considerare, atunci după numai 2 minute rezultatele furnizate de GPS ar deveni inutilizabile, iar erorile s-ar acumula cu o rată de 10 km pe zi [11].

Aceste efecte relativiste au fost luate în considerare atunci când a fost conceput GPS. Ceasurile sateliților sunt date înapoi înainte de emiterea semnalului, astfel încât să fie sincronizate cu ceasul receptorului, iar receptorul are, la rândul lui, un microcalculator capabil să execute corecțiile necesare conform teoriei relativității atunci când își calculează poziția.

La DGPS distanța dintre receptorul mobil şi stația de bază nu trebuie să depăşească 30 km. Receptorul-referință primeşte acelaşi semnal, dar în loc să-l folosească pentru a-şi calcula poziția, el îşi foloseşte poziția pentru a calcula sincronizarea.

Exemplul 2. Polinomul $Q = X^4 + X^3 + 1$ este primitiv peste $\mathbb{F}_2$. Avem (q_0, q_1, q_2, q_3) = (1, 0, 0, 1) şi $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (T(1), T(x), T(x^2), T(x^3))$, unde $x \in \mathbb{F}_{16}$ este o rădăcină a lui Q. Şirul generat de registrul cu deplasare liniară corespunzător are perioada principală de lungime 15.

Exemplul 3. Polinomul $R = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ nu este primitiv peste $\mathbb{F}_2$. Avem (q_0, q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 1, 1) şi $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (T(1), T(x), T(x^2), T(x^3))$, cu x rădăcină a lui R în $\mathbb{F}_{16}$. Şirul generat de registrul cu deplasare liniară corespunzător are perioada principal de lungime mai mică decât 15.

BIBLIOGRAFIE

1. **BOLT, BRIAN:** Mathematics meets Technology. Cambridge University Press, Cambridge New York Port Chester Melbourne Sydney, 1991.
2. **FRENCH, GREGORY T.:** Understanding the GPS. GeoResearch, Inc., 1996.
3. **BOSSLER, JOHN D. (ed.):** Manual of Geospatial Science and Technology. Taylor and Francis, Inc., London New York, 2002.
4. **BEIDLEMAN, SCOTT W.(Lt. Col. USAF):** GPS versus Galileo, Balancing for Position in Space. Air University Press, Maxwell Air Force Base, Alabama 36112− 6615, 2006.
5. **KAPLAN, ELLIOTT D., HEGARTY, CHRISTOPHER J. (eds.):** Understanding GPS, Principles and Applications. Artech House, Inc., Boston London, 2006.
6. **HEYDECKER, BENJAMIN (ed.):** Mathematics in Transport (Selected Proceedings of the 4th IMA International Conference on Mathematics in Transport). Centre for Transport Studies, University College London, UK, Elsevier Ltd., 2007.
7. **ROUSSEAU, CHRISTIANE, SAINT-AUBIN, YVAN:** Mathematics and Technology. Springer, 2008.
8. **LIDL, RUDOLF, NIEDERREITER, HARALD:** Finite Fields. Cambridge University Press, 1997.
9. **ROTHENSTEIN, B. F.:** Teoria relativității speciale. Editura “FACLA”, 1976.
10. **BĂRBULESCU, NICOLAE:** Bazele fizice ale relativității einsteiniene. Editura ştiințifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1979.
11. **HAUSTEIN, MARIO:** Effects of the Theory of Relativity in the GPS. Chemnitz University of Technology, 2009, osg.informatik.tu.chemnitz.de/lehre/old/ws0809/sem/online/GPS.pdf