DEFINIȚIA (I)

Paul Sfetcu

psfetcu@yahoo.com

Institutul Național de Cercetare - Dezvoltare în Informatică - ICI Bucureşti

Rezumat: În acest articol se readuc aminte condițiile logice ale definiției, arătând că ignorarea acestora sau introducerea unei concepții nominaliste au făcut ca matematica să fie plină de noțiuni care doar în aparență au aerul unor enunțuri riguroase.

Cuvinte cheie: definiție, demonstrație.

Abstract: In this article the logical conditions of a definition are reminded, pointing aut that their being ignored and the nominalist conception opened the way to the introduction of many concepts that only apparently convey a rigurous sense.

Key words: definition, proof.

1. Ce este definisabil şi ce este gândibil

Când luăm contact pentru prima dată cu noțiunile matematice – fie că este vorba de aritmetică, de geometrie sau algebră – o facem prin definiția obiectului pe care îl studiem. Prin definiție, punem existența unei entități, pe care apoi o vom studia sub fațetele ei, adică prin proprietățile pe care le deducem cu ajutorul demonstrației din definiția inițială şi din axiomele care stau la baza domeniului matematic respectiv.

Acest mod logic de a aborda conceptele gândirii a fost folosit pentru prima dată de Sokrates în discuțiile pe care le-a purtat cu cetățenii Athenei în Agora, el fiind primul care a pus problema realității ştiinței şi a gândirii, pe care sofiştii le desființaseră.

Deci cum definim şi ce realitate au conceptele pe care noi le introducem în raționamentele matematice? Există mai multe feluri de definiții: nominale, reale, implicite, explicite, prin recurență, definiții *in use* etc. Acestea pot fi găsite în lucrarea lul W. Dubislav, *Die Definition* (Leipzig, 1931). Vom insista aici în special asupra *condițiilor* definiției, aşa cum le găsim menționate în tratatele de logică tradițională. Iată aceste condiții:

1) Definiția trebuie să se facă prin *genus proxitmus* şi prin *differentia specifica*.

2) Definiția se face prin caractere esențiale şi nu prin accidente.

3) În orice definiție trebuie să existe posibilitatea de a substitui definisantul prin ceea ce este definit – *definiens* prin *definiendum* (aceasta este condiția pascaliană a definiției).

4) Definiția trebuie să convină întregului definit şi numai definitului – *toto et soli definito*.

5) O definiție nu trebuie să fie construită *idem per idem*, ea nu trebuie să fie tautologică. Nu se poate defini definitul prin definit – *definiendum per definiendum.* O formă mai dezvoltată a definiției *idem per idem* este *circulus in definiendo* sau *diallela*: un lucru este definit printr-un altul, dar acesta din urmă este definit prin elementele celuilalt.

6) O definiție nu trebuie să conțină o contradicție, nici o *contradictio in terminis*, nici o *contradictio in adjecto*.

Vom spune de la bun început că aceste condiții sunt necesare, dar nu şi suficiente pentru ca să avem într-adevăr o definiție. Este posibil, de exemplu, ca o propoziție prin care vrern să definim să nu fie construită *idem per idem* sau să nu fie o contradicție şi totuşi să nu fie o definiție.

Sunt două feluri de definiţii eronate care nu respectă regulile necesare (dar nu suficiente) pentru construirea unei definiţii:

1. *Definiţiile eronate*, *prin care noi gândim ceva*, *dar acest ceva nu este specific şi propriu conceptului definit* (*deşi îi convine*).

De exemplu, propoziţia «cercul este o curbă plană» este o definiţie eronată, ea nerespectând regula nr. (4), şi în consecinţă nu convine *toto et soli definito*. Ea este o propoziţie adevărată, dar ca definiţie este eronată pentru că nu identifică cercul printre celelalte curbe plane.

2. *Definiţiile eronate prin care noi nu gândim nimic.* De exemplu, definiţia *idem per idem* «numărul 2 este ceea ce noi gândim prin cifra 2» nu spune absolut nimic, fiind o tautologie. Prin aşa-zisa definiţie precedentă noi nu am gândit absolut nimic. Şi în acest caz propoziţia enunţată este adevărată, ea fiind identitatea: «2 = 2», dar ca definiţie ea nu spune nimic şi noi nu gândim nimic în momentul în care credem că am enunţat într-adevăr o definiţie. Acelaşi lucru se întâmplă cu definiţia «4 nu este 4»; această propoziţie este falsă, dar, dacă o considerăm ca definiţie, noi nu gândim nimic asupra naturii numărului 4.

Ne vom ocupa mai de aproape, în cele ce urmează, de a doua categorie de definiţii eronate, acelea care sunt absolut nule ca definiţii.

Pentru început, vom observa că logica simbolică a considerat inutile regulile clasice ale definiţiei. În *Principia mathematica*, Bertrand Russell spune că «definiţia nu este definisabilă şi nu este nici măcar un concept definit». «O definiţie, spune el, este o declaraţie că un oarecare simbol sau combinaţie de simboluri nou introduse trebuie să însemne acelaşi lucru ca şi o oarecare altă combinaţie de simboluri al cărei sens este deja cunoscut». În continuare, mai găsim şi următoarea explicaţie: «Trebuie să observăm că o definiţie nu este, strict vorbind, o parte a subiectului în care ea apare, căci o definiţie se referă în întregime la simboluri şi nu la ceea ce acestea simbolizează». Ce sunt atunci definiţiile? Pentru Russell, definiţiile nu sunt necesare, din punct de vedere teoretic, *definiens* putând întotdeauna fi utilizat în locul lui *definiendum*. «Definiţiile sunt, strict vorbind, (...) simple convenţii tipografice», spune el. Cu toate acestea, deşi din punct de vedere teoretic le găseşte «superflue», Russell crede totuşi că definiţiile aduc adeseori mai multe informaţii decât conţin propoziţiile în care ele sunt folosite.

Unii autori au căutat să controleze într-o oarecare măsură definiţia şi să elimine arbitrariul ei, care apare în sistemele logico-formale. De exemplu, R. Carnap a dat câteva reguli pentru definiţii (în *Logical Syntax of Language,* New York, 1937). Dar dacă definiţia rămâne o abreviere (*Abküzung*), cum susţine şi Carnap, toate aceste reguli sunt, în realitate, numai mijloace auxiliare care ajută la simplificarea formulelor zise logice, făcându-le intuibile. Nu dorim să intrăm într-un examen mai amănunţit al naturii definiţiei în logica matematică. Ceea ce ne interesează aici este faptul că, aşa cum este ea concepută, definiţia nu ţine cont de condiţiile amintite. Vom mai cita totuşi un matematician francez, Arnaud Denjoy. În *L'enumération fransfinie* (vol. IV, *Notes sur les sujets controversés*), A. Denjoy distinge: ceea ce poate fi gândit, ceea ce poate fi definit, ceea ce există. El analizează ideea de «a gândi» şi concluzionează: «A gândi un obiect concret înseamnă să preluăm din propria noastră memorie, să fixăm în atenţia spiritului nostru una sau mai multe imagini relative la acel obiect şi, prin ea singură sau prin reuniunea lor, să îl caracterizăm pentru cunoaşterea noastră. A gândi o specie înseamnă să gândim unul sau mai multe exemplare cunoscute de noi, desprinzând imagini sintetice care să identifice pentru spiritul nostru aceşti indivizi, trăsăturile desprinse arătând incluziunea lor în specie». În sfârşit, Denjoy analizează ce înseamnă «a gândi o operaţie». După ce a considerat în toată generalitatea operaţia de a gândi, autorul trece la examinarea a ceea ce poate fi gândit în matematici. El ajunge la o primă concluzie pe care o enunţă astfel: «în toate studiile al căror subiect se referă la aritmetică, algebră sau analiză, şi în ciuda iluziilor contrare pe care le poate crea folosirea simbolismului în teoriile generale, materialul elementelor numerice efectiv gândite de către om se compune numai şi se va compune totdeauna dintr-un număr finit de numere întregi».

Trecând la analiza definisabilului, Denjoy remarcă: «Multe paradoxe din cele mai cunoscute din teoria mulţimilor se bazează, de fapt, când pe echivalenţa diverselor accepţiuni acordate cuvintelor ca *a defini*, *numerabil* etc., când pe premisa, pusă ca evidentă, a unui postulat fals».

Analizând mai departe noţiunea de definiţie, el găseşte o condiţie *sine qua non a* definiţiei: «*Pentru a defini un obiect*, *trebuie mai întâi sa gândim acel obiect* (*adică*, *aşa cum am explicat*, *să reunim în spiritul nostru imaginile al căror ansamblu caracterizează obiectul şi formează o noţiune*)». Consecinţa pe care o trage autorul din această concepţie este următoarea: «Din punctul de vedere arătat, termenii *definisabil şi gândibil* trebuie să fie consideraţi ca echivalenţi» (*op. cit*., p. 942).

Examinând acum a treia distincţie făcută în lumea obiectelor matematice, adică «ceea ce există», Denjoy afirmă că, din punctul său de vedere: 1. ceea ce este gândibil este definisabil şi are o existenţă reală; 2. există entităţi matematice care nu sunt nici gândibile, nici definisabile. Autorul citat se serveşte de aceste distincţii pentru a arăta eroarea fundamentală comisă în construcţia paradoxului lui Richard.

Ideile lui Denjoy sunt deosebit de interesante; ele delimitează noţiunile *gândibil*, *definisabil* şi *existent* şi stabilesc conexiunile dintre ele şi limitele până unde sunt valabile aceste conexiuni. Chiar dacă aceste idei ar trebui să fie completate, orice analiză logică trebuie să plece de la aceste trei idei: gândire, definiţie, existenţă şi orice sistem logico-formal de matematici, care nu ţine cont de faptul că aceste trei noţiuni sunt esenţial legate, riscă să trateze despre altceva decât despre matematici.

Vom reţine în special, din examenul făcut până aici, următorul rezultat: *A defini corect un lucru în magtematici înseamnă a gândi acel lucru şi prin aceasta a afirma în mod matematic existenţa lucrului considerat*.

Dacă, de exemplu, vom da definiţii în mod incorect, *lucrul astfel definit nu este gândit* şi chiar dacă am presupune – ca şi Denjoy – că există obiecte matematice fără a fi definisabile şi ca urmare gândibile, nu este mai puţin corect să tragem concluzia: dacă un lucru este dat exclusiv prin definiţia sa şi această definiţie este dintre acelea pe care noi le-am clasat în a doua categorie de definiţii incorecte, atunci noi nu gândim nimic prin această definiţie şi, în plus, nu avem nici un drept de a presupune că lucrul există.

2. Definiţia «idem per idem»

Să notăm cu D, *defmiendum*, şi cu d, *definiens,* semnul = fiind simbolul definitiei. Definitia lui D prin d se va scrie atunci:

$D =_{\mathrm{Df}} d$.

Condiţia necesară pentru ca această formulă să nu degenereze într-o definiţie *idem per idem* este ca D să nu fie identic cu d, adică $D \neq d$. Altfel am avea o identitate:

$d =_{\mathrm{Df}} d$.

care, *ca identitate*, *reprezintă o propoziţie adevarată*, *dar ca definiţie este eronată şi prin ea nu definim nimic*. Mai mult, noi nu gândim nimic prin această definiţie eronată şi obiectul presupus a fi exprimat prin D şi definit prin $D =_{\mathrm{Df}} d$ nu există.

Să presupunem că avem următoarea definiţie: «mulţimea M este mulţimea tuturor mulţimilor care se conţin ca elemente». Cu alte cuvinte, dacă mulţimea α aparţine mulţimii α, atunci mulţimea α aparţine mulţimei M:

$\alpha \in M =_{\mathrm{Df}} \alpha \in \alpha$ (1)

Condiția unei definiții care nu este *idem per idem* arată că mulțimea α nu poate fi identică cu mulțimea *M*, deoarece am avea atunci definiția:

$\alpha \in \alpha =_{\mathrm{Df}} \alpha \in \alpha$

sau

$M \in M =_{\mathrm{Df}} M \in M.$

Deci, o dată cu definiția (1), afirmăm, în același timp, condiția $\alpha \neq M$, pentru ca ea să nu degenereze într-o definiție eronată *idem fer idem*, prin care nu gândim nimic și, deci, nu afirmăm nimic ca existent.

În consecință, dacă nu avem o altă definiție pentru *M*, alta decât aceea a mulțimii α (pentru că $\alpha \neq M$), atunci *M* nu este definită prin (1). *Aceasta înseamnă că expresia* $\alpha \in \alpha$ *nu este definisantă*, ceea ce se înțelege de la sine: definiția unei mulțimi α și proprietățile care decurg pentru ea din propria sa definiție nu pot fi definisante pentru nici o altă mulțime *M*, ci numai pentru mulțimea α.

Bertrand Russell a crezut că asemenea expresii, ca $\alpha \in \alpha$ sau $\varphi(\varphi)$ nu pot fi formate, neavând sens (pentru că ele nu respectă teoria tipurilor). Concluzia noastră arată că asemenea expresii sunt legitime, dar că ele nu sunt definisante. De exemplu, întrebarea dacă mulțimea numerelor prime se conține sau nu ca element este o problemă legitimă, care are un sens precis și de asemenea un răspuns precis: nu, ea nu se conține ca element. Afirmația are un sens determinat și noi gândim cu adevărat ceva prin această propoziție. Deci, nu putem interzice formarea unor expresii de forma $\alpha \in \alpha$ sau $\varphi(\varphi)$ (în comprehensiune), sau cu negație, $\sim\alpha \in \sim\alpha$, $\sim\varphi(\varphi)$.

Din considerațiile anterioare, rezultă că regula definiției *non idem per idem* nu mai permite definiția mulțimii tuturor mulțimilor». Să presupunem că am definit noțiunea *m* de mulțime, sau că o considerăm ca o noțiune primitivă. Sfera noțiunii *m* este multimea tuturor mulțimilor și nu există o altă mulțime în afară de sfera noțiunii *m.* A încerca să definim mulțimea *M* a tuturor multimilor prin mulțimea determinată de noțiunea *m* înseamnă a defini pe *M idem per idem*, adică a nu defini în realitate nimic, a nu gândi nimic și a nu pune nimic ca existent prin *M.*

3. Definiția contradictorie

Să considerăm un exemplu de definiție contradictorie. Să presupunem că avem o definiție a unei mulțimi *N*: «mulțimea *N* este mulțimea tuturor mulțimilor α care nu se conțin ca element». Simbolic putem scrie această definiție astfel:

$\alpha \in N =_{\mathrm{Df}} \alpha \sim\in \alpha.$

Condiția definiției, anume de a nu fi o contradicție, face imposibil ca mulțimea α să fie vreodată egală cu *N*, deci $\alpha \neq N$. În consecință, dacă noi nu avem pentru *N* o altă definiție decât aceea a mulțimii α (sau a mulțimilor α), mulțimea *N* nu este definită. Deci și aici expresia $\alpha \sim\in \alpha$ nu este definisantă, dar ea este legitimă, pentru că putem totdeauna spune, de exemplu, că mulțimea numerelor prime nu se conține ea însăși ca element, ceea ce înseamnă că nu este ea însăși un număr prim. Această expresie nu este însă definisantă, deoarece, dacă nu respectăm condiția definiției $\alpha \in N$, cădem în contradicție:

$\alpha \in \alpha =_{\mathrm{Df}} \alpha \sim\in \alpha$ sau $N \in N =_{\mathrm{Df}} N \sim\in N.$

În consecință, «mulțimea *N* a tuturor mulțimilor care nu se conțin ca elemente» nu este definită, deoarece expresia $\alpha \sim\in \alpha$ nu este definisantă; mulțimea *N* nu este definită, nu este gândită și nu reprezintă nimic existent.

Să luăm acum un exemplu în comprehensiune. Să considerăm, de pildă, paradoxul lui Russell, construit cu *impredicabil*. Orice predicat îşi convine sieşi ca predicat sau nu, *tertium non datur*. Dacă nu îşi convine ca predicat, vom spune că este *impredicabil* (*Imp*). Deci vom avea definiția: Dacă un predicat φ nu are proprietatea φ, atunci el va avea proprietatea *Imp*.

Simbolic, scriem acest lucru astfel:

$$Imp\ (\varphi) =_{\mathrm{Df}} \sim \varphi(\varphi). \tag{2}$$

Conform condiției definiției, (2) nu trebuie să includă cazul în care simbolul *Imp* ar putea fi substituit simbolului φ, fiindcă atunci am avea contradicția:

$$Imp\ (Imp) =_{\mathrm{Df}} \sim Imp\ (Imp).$$

Deci definiția predicatelor φ şi proprietățile lor, care decurg din propriile lor definiții, nu pot să definească un alt predicat *Imp*, ci numai predicatele φ.

Expresia ~φ(φ) poate fi formată, ea are un sens bine determinat, dar ea nu este un termen definisant şi drept urmare predicatul *Imp* (impredicabil) nu este definit printr-o asemenea definiție, nu este gândit şi nu este pus nici ca existent.

Este de menționat aici tentativa lui H. Behmann de a rezolva paradoxele logico-matematice făcând apel la regula pascaliană: în orice definiție trebuie să poți să substitui *definiens* lui *defimendum.* Dar pentru *Imp* nu avem simbol sau expresie simbolică care să poată să-i fie substituită pentru a reveni la simboluri fără *Imp*. De unde regula lui Behmann, pentru a împiedica paradoxele: «Expresiile care conțin semne abreviative sunt permise numai în cazul în care substituirea acestor semne prin semnificația lor simbolică este în întregime efectuabilă» (H. Behmann: *Zu den Widersprüchen der Logik und Mengenlehre*, 1931). Cu alte cuvinte, Behmann constată că nu există expresie definisantă pentru *Imp*, dar în loc să tragă concluzia că *Imp* nu este definit, el dă o regulă prohibitivă şi convențională prin care doreşte să evite apariția contradicțiilor. Cu această ocazie, este interesant de subliniat faptul că dezvoltarea pe care a luat-o ideea lui Behmann în sistemul lui Bochvar (D. A. Bochvar: *Asupra unui calcul trivalent şi aplicațiile lui in analiza paradoxelor calculului functional extins clasic*, în *Matematiceskii sbornik*, nr. 4, 1939). Bochvar a dat o demonstrație pentru condiția formulată de Behmann (care este condiția pascialiană a definiției). El a construit un sistem formal fără teoria tipurilor, care poate să înlocuiască sistemul lui Russell. Neținând însă seama de teoria tipurilor, antinomiile apar imediat. Autorul arată că apariția antinomiilor se datorează admiterii tacite sau explicite a unui postulat formal, care infirmă tocmai exigența lui Behmann. Dacă renunțăm la acest postulat, sistemul lui Bochvar nu mai este contradictoriu.

4. Definiția circulară a numărului

Vom analiza acum despre definiția numerelor cardinale în teoria mulțimilor. În această teorie (expusă în A. Fraenkel, *Abstract Set Theory*, p. 59, Amsterdam, 1961) se afirmă: «Numărul cardinal al unei mulțimi *S* este mulțimea tuturor mulțimilor echivalente cu *S*».

Autorul tratatului citat îşi dă seama de evanescența unei asemenea propoziții, deoarece el scrie în continuare: «Această definiție pare într-un fel paradoxală. Totuşi, asemenea definiții sunt astăzi lucruri comune în matematici». Dar faptul că o eroare este comisă în mod frecvent şi în diverse variante nu constituie pentru nimeni o obligație de a o accepta. Cu atât mai mult cu cât o propoziție circulară nu enunță nimic, este vidă de orice conținut şi, după cum am arătat, dacă în spatele ei se ascunde o propoziție identică (propoziție adevărată), ea nu vehiculează nici o cunoştință. Dacă definiția numărului 2 se reduce la identitatea adevărată 2 = 2, trebuie să recunoaştem că ea nu ne spune nimic despre numărul 2 şi că toate acestea nu servesc la nimic altceva decât să ne ascundă ignoranța. Ea nu introduce nimic fals, dar nici nu introduce nimic adevărat.

Bizareria acestei definiții n-a trecut neobservată şi Russell, de la început, a recunoscut-o, declarând totuşi că el o preferă entității metafizice 2 (*Introduction to Malhematical Philosophy*, trad. fr., p. 31, Paris, 1928). El exprimă acest cerc vicios prin «definiția» (*op. cit.*, p. 32): «*Un număr este ceea ce reprezintă numărul unei clase* (*mulțimi*)». Russell recunoaşte că «o asemenea definiție are, după cum sunt folosite cuvintele, aparența unui cerc vicios», dar în realitate el nu crede că este aşa şi explică acest lucru astfel: «Am definit numărul unei clase date fără a utiliza noțiunea generală de număr; în consecință, putem să definim numărul *în general* în funcție de *numărul unei clase date* fără a comite o eroare de logică». Pentru a explica vidul acestei definiții, el scrie: «Definițiile de acest fel sunt, de altfel, foarte frecvente. Clasa taților, de exemplu, ar trebui să fie definită definind mai întâi ce înseamnă a fi tatăl cuiva; atunci, clasa taților va cuprinde pe toți cei care sunt tații cuiva». Am citat acest exemplu pentru a sublinia că ne-am obişnuit în aşa măsură cu acest fel de a pune problemele încât nu mai reuşim să ne descurcăm în probleme elementare. Din punct de vedere logic, «clasa tuturor taților» este sfera predicatului «tată»; dar Russell doreşte să definească o nouă clasă, a tuturor taților, prin predicatul «tată», care deja a definit (prin sfera sa) clasa tuturor taților! Explicația dată de Russell că «definițiile de acest fel sunt de altfel foarte frecvente», explicație din nefericire adoptată de către mulți matematicieni (am. văzut că Fraenkel şi-a însuşit-o şi el), nu are valoare logică.

Vom arăta în mod direct lipsa de conținut a acestei definiții a numărului. Să scriem în acest scop definiția simbolică a numărului cardinal. În *Principia mathematica*, *Nc* este numărul cardinal al clasei (mulțimii) adică, în termeni logistici, *Nc'*α este clasa tuturor claselor echivalente cu α. Să notăm relația de echivalență (de similitudine) cu *Sm*, $\overrightarrow{Sm'\alpha}$ înseamnă în acest caz clasa tuturor claselor care au relația de similitudine:

$$Nc'\alpha =_{\mathrm{Df}} \overrightarrow{Sm'\alpha}\,.$$

«numărul cardinal al clasei α este clasa tuturor claselor care au relația de similitudme cu α».

Dar chiar Russell afirmă: „Oricare ar fi numărul termenilor pe care îl posedă o mulțime, mulțimile care îi sînt asemănătoare vor avea acelaşi număr de termeni ca ea». Cu alte cuvinte, construim imaginea abstractă (numărul) a unei clase α şi apoi repetăm clasa α şi spunem că a are relația de similitudine cu ea. *Dar definiția unei clase şi proprietățile care decurg pentru ea şi numai pentru ea*, *din propria sa definiție*, *nu pot fi definisante pentru nici o altă clasă decât pentru* α, *deoarece numai în acest fel putem distinge clasele* (*mulțimile*) *între ele.* Definiția

$$Nc'\,\alpha =_{\mathrm{Df}} \overrightarrow{Sm'\alpha}\,.$$

este deci într-adevăr o definiție *idem per idem*, prin care nu gândim nimic, nu definim nimic şi nu punem nimic ca existent, cu toate că propoziția lui Russell inclusă în această definiție – «Un număr este ceea ce reprezintă numărul unei clase» – este o propoziție adevărată. Dar această propoziție nu spune nimic asupra naturii numărului, nefiind o definiție, ci o identitate.

5. Definiții prin accident

Logicienii matematicieni au evitat să vorbească de esență şi de accident, de teamă ca aceste noțiuni să nu implice teoria metafizică aristotelică. Dar putem vorbi de esență şi de accident din punctul de vedere pur logic, fără a apela la concepții filosofice. Să luăm un tratat de logică clasică, spre exemplu tratatul lui Alexander Bain: *Logique déductive et inductive* (2vol., trad. franc., G. Compayré, Paris, 1894). Iată ce spune autorul despre accident: «Accidentul sau concomitentul, ca predicat, exprimă ceva ce nu aparține esenței sau conotației subiectului şi ceea ce nici nu se poate deduce din ideea subiectului. *Aurul este cel mai prețios dintre metale*; *Aurul esie folosit ca monedă*, iată propoziții al căror predicat poate fi considerat ca un accident sau ca un concomitent». (*op. cit.*, I, 2, 17.) Propozițiile de acest gen nu pot fi considerate ca definiții ale aurului. Dar să îl urmărim mai departe pe Bain: «Cu predicate de felul acesta se formează mai ales propoziția reală, în opoziție cu propoziția verbală, esențială, identică (propoziția analitică a lui Kant). Vom avea atunci propoziția sintetică a lui Kant, propoziție în care predicatul este un adaos pozitiv la subiect, nefiind în nici un fel – nici direct, nici indirect –, cuprins în subiect. Afirmațiile care se referă la concomitență sunt extrem de numeroase în practica de zi cu zi. Întâlnim adeseori în jurul nostru lucruri care se însoțesc, cu toate că ele nu se implică cu nimic unul pe altul. Toate afirmațiile relative la corpuri şi care se referă la situația lor locală, la pozițiile lor, la întrebuințarea lor, sunt afirmații de concomitență; nu putem să întrebuințăm aceste predicate în definiția sau în esența corpurilor».

Logica clasică a făcut o distincție, rămasă tradițională, între accidente *separabile* şi accidente *inseparabile*. Exemplul acestei distincții este dat de propozițiile «Vergilius a locuit la Roma» (accident separabil) şi «Vergilius s-a născut la Mantova» (accident inseparabil). Se vede că dacă spunem că *Virgiliu este cel mai mare poet latin* nu rezultă că el a locuit la Roma şi nici că s-a născut la Mantova, deoarece accidentul nu poate fi dedus analitic din definiția unui lucru, nefiind o notă a acestei definiții. Aşadar, el nu poate fi un caracter definisant.

Să trecem la examinarea noțiuunii de clasă sau de multime, care constituie elementul fundamental al matematicilor moderne.

Cantor a definit, cum se ştie, noțiunea de mulțime astfel: «O mulțime (*Menge*) este o reuniune într-o unitate a unor obiecte bine determinate şi distincte ale intuiției noastre sau ale gândirii noastre, care sunt numite elementele mulțimii». Dar cum cu această concepție a noțiunii de mulțime s-a dat peste contradicții, matematicienii au considerat că este mai convenabil să se ia noțiunea de mulțime nu ca o noțiune definită, ci ca un element primitiv al intuiției noastre. Iată ce scrie Fraenkel în tratatul citat mai înainte: «Timp de mai multe decade tentativa de *a ameliora* definiția lui Cantor a rămas complet fără rezultat şi a trebuit *să renunțăm la definiția conceptului general de* mulțime». Posibilitățile de a remedia situația sunt, tot după Fraenkel, în principal, în număr de trei:

1. Să concepem şi să definim conceptul de *mulțime* într-un sens foarte îngust, dar atunci o mare parte a matematicilor clasice (analiza, geometria, teoria mulțimilor) ar deveni lipsită de sens sau chiar inadmisibilă.

2. Să adoptăm o reformă fundamentală a logicii ca bază a matematicilor.

3. Să recurgem la metoda axiomatică.

În tratatul său, autorul citat alege o cale de mijloc între axiomatica formală şi expunerea intuitivă. Aflăm astfel care este noțiunea de mulțime. Autorul pleacă de la relația de apartenență (*membership*), care se citeşte «*x* este un membru al lui *y*» sau «*x* aparține lui *y*», sau încă «*y* conține pe *x* (ca membru)». Această relație, notată prin semnul «$\in$», este considerată ca o relație primitivă şi este acceptată de Fraenkel ca o relație nedefinită. Ea va fi utilizată atât cât vor permite axiomele pe care le vom alege. Iată acum ce numeşte Fraenkel o mulțime: «Vom considera, în general, un singur fel de obiecte care sunt admisibile ca argumente ale relației de apartenență; aceste obiecte vor fi numite *mulțimi*» (*op. cit*., p. 13).

Pentru a evita pericolul implicat de notiunea de mulțime, alți matematicieni au luat această noțiune ca pe o noțiune primitivă, care se înțelege de la sine. De exemplu, W. Sierpinski nu ne mai spune ce este o mulțime, ci ne indică numai modul de formare al ei:

«*Mulțimi.* Cu obiecte date putem forma multimi. De exemplu, cu literele *a, b, c*, putem forma mulțimea acestor litere». (W. Sierpinski: *Cardinal and Ordinal Numbers*, Varşovia, 1958). Formăm mulțimi, dar nu spunem ce este o mulțime!

De îndată ce au apărut contradicțiile în teoria mulțimilor, s-a recurs la metoda axiomatică, pentru a supune noțiunea de mulțime unei serii de restricții axiomatice, unor delimitări matematice riguroase, şi astfel s-a ajuns că nu se mai ştie în cele din urmă dacă ceea ce numim mulţime este totuşi o mulţime! Iată ce scrie în acest sens Bourbaki (*Théorie des ensembles*, p. 60, Paris, 1954): «Din punctul de vedere naiv, multe entităţi matematice pot fi considerate drept colecţii sau mulţimi de obiecte. Nu vom căuta să formalizăm această noţiune şi, în interpretarea formalistă care urmează, cuvântul *mulţime* trebuie considerat ca riguros sinonim cu *termen*; în particular, expresii ca *fie x o mulţime* sunt în principiu cu totul superflue, pentru că orice literă este un termen». Ceea ce seamănă cu un mic joc de logică al celor vechi, care considerau paradoxală propoziţia: «Să vorbim tăcând», în cazul nostru: «să folosim în calcule litere presupuse a fi mulţimi, dar să nu vorbim despre mulţimi».

Să vedem însă cum s-a ajuns la această bizară situaţie. Să revenim la noţiunea intuitivă de mulţime. Mulţimea este o colecţie de obiecte. Toate elementele care au o aceeaşi proprietate formează o clasă sau o mulţime. Sau, altfel spus, o clasă (mulţime) este formată din toate valorile admisibile pentru argumentul unei funcţii propoziţionale $f(x)$.

O funcţie propoziţională $f(x)$ cu un singur argument determină o singură clasă (mulţime) α, care se scrie:

$$\alpha = \hat{x}\,(fx).$$

Toţi aceia care nu verifică o funcţie propoziţională $f(x)$ formeaza clasa contrară lui α (mulţimea complementară), notată cu $-\alpha$, şi care se scrie:

$$-\alpha = \sim \hat{x}\,(fx).$$

Să examinăm mai de aproape aceste idei. Dacă scriem pe o foaie de hârtie numărul 1, numărul π şi ecuaţia lui Pell, am format o clasă sau o mulţime din trei membri, care este perfect determinată. Aceste trei elemente au o proprietate comună: ele figurează pe aceeaşi foaie de hârtie. La fel putem spune şi «mulţimea formată din toate obiectele care se găsesc în camera d-lui Dupin, strada *N,* nr. *n*. Fie aceste obiecte: o masă, patru scaune, o călimară, un stilou, 24 foi de hârtie, 1215 cărţi, un covor şi însuşi d-l Dupin. Mulţimea este perfect determinată, cu toate că aceste elemente heteroclite se află din întâmplare în această cameră. Este clar că, în ambele cazuri, elementele nefiind legate între ele printr-o proprietate comună care să facă parte din conotaţia fiecărui element, rezultă că pentru a determina aceste mulţimi trebuie să indicăm toţi membrii ei. Dar dacă definim clasa mamiferelor, de exemplu, situaţia se schimbă: fiecare element din colecţie este definit prin definiţia generală a predicatului mamifer. Dacă spunem «*x* aparţine clasei mamiferelor», atunci vom şti precis că *x* este un vertebrat, că el are sângele cald, pielea acoperită cu păr, că femelele nasc pui vii etc. Să considerăm unul din cele două cazuri de care am vorbit anterior. Să notăm clasa obiectelor din camera d-lui Dupin, strada *N,* nr. *n*, cu litera *D.* Dacă spunem «*x* aparţine clasei *D*», nu vom şti nimic despre *x*; poate fi chiar d-l Dupin sau unul din scaune etc. Aceasta se întâmplă din cauză că astfel de clase sunt formate prin accident, în timp ce clasa mamiferelor, de exemplu, este formată prin caractere analitice permanente, comune tuturor elementelor sale.

În consecinţă, sunt două feluri de multimi:

1. Mulţimi (clase) formate prin accident, şi care sunt date numai dacă toate elementele sunt efectiv date.

2. Mulţimi (clase) formate prin definiţii construite în mod regulat, cu elemente esenţiale ale conotaţiei conceptului definit, unde nu este nevoie să se dea fiecare element.

Rezultă din cele spuse două concluzii:

A. Pentru mulţimile formate prin accident, teza intuiţionistă este perfect valabilă. O astfel de mulţime nu este dată decât dacă elementele sale sunt date fiecare în parte. Cum pentru Brouwer şi adepţii săi această teză nu este valabilă decât în domeniul finitului şi cum nu putem indica efectiv toţi membrii unei mulţimi infinite, rezultă pentru ei că mulţimea nu există.

Dar aceast lucru nu este adevărat; numai în domeniul colecțiilor construite prin accident este cerută această condiție. Orice colecție, finită sau infinită, dacă este formată prin accident, are nevoie de indicarea fiecărui membru. Cum însă în domeniul infinitului această obligație nu este realizabilă, rezultă că mulțimile infinite definite prin accident nu sunt gândite, nu sunt în mod real definite şi nu există. Am văzut, de altfel, că accidentul apare în propozițiile sintetice ale lui Kant, propoziții contingente, în care predicatul nu este conținut în subiect, având o bază de fapt şi nu una logică. Vom enunța deci teza lui Brouwer astfel: «Toate propozitiile (adăugăm noi, forrnate printr-un accident) care au un conținut, trebuie să indice una sau mai multe stări de lucruri (*Sachverhalte*) bine determinate şi accesibile experienței noastre».

Colecțiile infinite, definite prin accident, cer această condiție, nu fiindcă ele sunt infinite, ci pentru că sunt definite prin accident; fiind infinite, această condiție nu poate fi satisfăcută.

B. În clasele formate prin accident, cuvântul «toți» nu are un sens colectiv, ci unul distributiv; elementele unei astfel de clase nu aparțin colecției ca formând, în mod colectiv, sfera aceluiaşi predicat, ci ele sunt elemente cărora li s-a distribuit prin accident o proprietate care nu face parte din conotația nici unuia din aceste elemente. Într-adevăr, a spune: «clasa *tuturor* obiectelor din camera de lucru a d-lui Dupin» (clasă formată prin accident) înseamnă a indica pe *fiecare* dintre membrii săi, deci toți membrii trebuie dați în prealabil şi individual. În consecință, «clasa *tuturor* obiectelor din camera de lucru a d-lui Dupin» înseamnă efectiv «clasa obiectelor din camera d-lui Dupin» luate obiect cu obiect şi aici *toate* are într-adevăr un sens distributiv.

Observația că particula «*toți*» – *omnes* – are două sensuri, colectiv şi distributiv, a fost făcută de logicienii scolastici, în teoria privind particulele *syncategoremata.*

Să considerăm, de exemplu, *toate* clasele posibile, inclusiv ultima imaginabilă, pe care le vom nota:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \Omega. \tag{1}$$

Nu avem dreptul să presupunem că există o altă clasă în afara *tuturor* claselor (1), altfel nu am fi avut dreptul să spunem că le-am luat pe *toate*.

Să formăm acum o clasă *U* cu *toate* clasele posibile din (1). Este posibil? Am ajuns la o contradicție: există încă o clasă *U* în afara *tuturor* claselor posibile indicate în (1). Dacă ținem cont de sensul al doilea al *syncategoremei omnes*, propoziția: «Să considerăm *toate* clasele posibile ω_1, ω_2, ω_3, ... , Ω» trebuie să fie înțeleasă în sensul său distributiv: «Să considerăm fiecare clasă ω_1, ω_2, ω_3, ... , Ω». În acest caz, sensul colectiv a fost deja utilizat şi epuizat în formarea daselor (1) şi nu mai este nici o contradicție, pentru că nu mai existâ o clasă *U*.

6. Pseudoclasa non-A

În teoria mulțimilor, ca şi în calculul claselor, întâlnim frecvent o clasă oarecare *A* şi clasa contrară non-A (complementul lui *A.* din teoria mulțimilor).

De asemenea, se consideră în calculul predicatelor un predicat φ; dacă o entitate logică *x* nu are acest predicat φ, atunci i se acordă un alt predicat P.

În acest capitol ne vom ocupa de clasele de forma non-A, sau – considerând problema în comprehensiune – să vedem dacă non-atribuirea unui predicat unei entități logice *x* exprimă într-adevăr o predicație.

Definiția unei clase este: «Toți aceia care verifică o funcție propozițională (*xf*)». Sau mai simplu spus: «O clasă (mulțime) este o colecție de elemente care admit toate acelaşi predicat». Calculul claselor a acceptat încă o clasă în raport cu un predicat dat *f*: funcția propozițională f(*x*) defineşte clasa $\hat{x}\,(fx)$, dar ea defineşte în acelaşi timp şi clasa tuturor elementelor care nu verifică funcţia $f(x)$. O funcţie propoziţională (cu un singur argurnent) determină astfel două clase, clasa A şi clasa non-A, non-A fiind formată din «toţi aceia care fac falsă funcţia $f(\ x)$»:

$$A = \hat{x}\,(fx)$$

$$\text{non-}A = \hat{x}\,(\sim fx).$$

Russell şi Carnap au spus mai simlplu: «O clasă este extensiunea unui predicat», ceea ce face din noţiunea de clasă sau de mulţime noţiunea logică tradiţională de sferă a unui concept (*Umfang*).

Clasa A este extensiunea predicatului f; dar atunci clasa non-A este extensiunea cărui predicat? Care este predicatul comun tuturor elementelor care nu admit acelaşi predicat f? Am ajuns astfel la dilema următoare: Dacă non-A este o clasă, atunci definiţia dată: «Toţi cei care verifică $f(x)$» nu este definiţia clasei; dacă păstrăm cu rigurozitate aceasta definiţie, atunci non-A nu poate fi o clasă. Această lipsă de precizie în ceea ce priveşte conceptul de clasă – şi în mod special aşa-zisa clasă non-A –, poate fi regăsită în toate tratatele de logică sau de matematică. Citim, de exemplu, într-un tratat de algebră de o valoare incontestabilâ ca acela al lui B. L. Van der Waerden, *Moderne Algebra*: „Gândim, ca punct de plecare al tuturor consideraţiilor matematice, unele obiecte reprezentabile, ca de exemplu semne de numere, litere sau combinaţii ale acestora. O proprietate pe care fiecare din aceste obiecte o are în mod particular, sau nu o are, defineşte o mulţime sau o clasă; elementele mulţimii sunt obiecte cărora această proprietate le convine». Iată deci confuzia despre care am vorbit: o proprietate, pe care fiecare din aceste obiecte nu o are, defineşte o mulţime sau clasă; elementele acestei mulţimi sunt obiectele carora această proprietate le convine. Care?

Desigur, matematicienii au libertatea să aleagă noţiunea de mulţime sau de clasă cum cred; dar ea trebuie aleasă şi, o dată aleasă, ea nu poate fi altceva decât ceea ce este. Putem chiar spune că $\hat{x}\,(fx)$ şi $\hat{x}\,(\sim fx)$ reprezintă fiecare o clasă; dar, în acest caz, clasa $\hat{x}\,(fx)$ *şi* clasa $\sim \hat{x}\,(fx)$ nu mai pot fi definite printr-o definiţie unică «toţi acei care verifică $f(x)$», ci trebuie să introducem încă o definiţie pentru clasa $\hat{x}\,(\sim fx)$ şi anume «toţi cei care nu verifică funcţia $f(x)$», ceea ce nu este acelaşi lucru. Vedem dar că, în general, dacă luăm în considerare o funcţie cu un singur argument $f(x)$, ambele clase, $\hat{x}\,(fx)$ şi $\hat{x}\,(\sim fx)$, nu pot fi constituite bazându-ne pe o definiţie unică a noţiunii de clasă, şi, ca urmare, colecţiile $\hat{x}\,(fx)$ şi $\hat{x}\,(\sim fx)$ nu pot fi caracterizate ambele prin acelaşi concept de «clasă», cu acelaşi sens.

Să considerăm o clasă determinată, de exemplu, clasa «om»; un element x aparţine acestei clase dacă putem scrie pentru el:

$$x \in \text{om}.$$

Toţi x care fac adevărată această funcţie propoziţională formează clasa om: ($x \in$ *om*). Clasa non-om nu exprimă sfera nici unui predicat. Când scriem $x \in$ non-om, nu am indicat nici o totalitate de elemente care pot fi reunite împreună ca bazându-se pe o proprietate comună. Clasa non-om – şi în general clasa non-A – nu exprimă nimic în plus, decât faptul că există elemente care nu au proprietatea comună elementelor clasei om. *Dar cum să afirmăm că toate aceste elemente au o proprietate comună prin faptul că ele nu au o proprietate comună?* După cum a observat Aristoteles, clasa *non-A* nu este definită. Iată ce scrie acesta în *De interpretatione* (2,16 a): «Numele este un sunet care are un înţeles prin convenţie ...». Şi mai departe: «Expresia non-om nu este un nume. Într-adevăr, nu există nici un termen determinat care să o desemneze, căci ea nu este nici vorbire, nici negaţie. Putem spune că este numai un nume nedefinit» (pentru că aparţine la orice, la ceea ce este şi ceea ce nu este).

În consecinţă, luând ca atare expresia «*non-A*», ea nu este o clasă, pentru că nu există nici un element comun care aparţine conotaţiei fiecăruia din elementele acestei colecţii care să autorizeze reuniunea lor într-o clasă. Să luăm diferite obiecte care nu sunt «om»: peştele nu este om, numărul

π nu este om, Luna nu este om, ecuația lui Pell nu este om etc.; pentru toate aceste elemente care nu au predicatul om, acesta, neavând nici un raport cu conotația lor, este un accident iar noi constatăm numai că ele nu au acest accident. Deci clasa non-A este definită prin accident şi anume tocmai prin faptul că aceste elemente nu au un anumit accident. Din punct de vedere logic, ea nu este definită, deoarece o definiție nu poate fi construită prin accident şi cu atât mai puțin prin lipsa unui accident. Este adevărat că în unele cazuri particulare şi bine determinate, dacă în interiorul unei clase date A există numai două clase – *a si b* –, în mod expres definite fiecare, putem construi clasele a şi non-a, care sunt de data aceasta precis definite. A spune în acest caz că «x aparține clasei non-a» înseamnă că «x aparține clasei b». Deci, numai în cazul unor determinări precise o clasă non-a, în interiorul unei alte clase A, poate avea o semnificație definită, iar elementele sale sunt reunite într-o colecție pentru că au o proprietate comună. În cazul general, clasa non-A nu are nici o semnificație, nefiind decât un «nume nedefinit», după cum a afirmat Aristoteles.

Aceeaşi observație poate fi făcută şi în problema predicatelor negative. Aristoteles s-a ocupat pe larg de această problemă (*Analytica priora*, I, 46). El scrie, examinând termenii definiți şi termenii nedefiniți: «În stabilirea sau respingerea unei concluzii, există o diferență după cum considerăm ca identică sau ca diferită semnificația expresiilor *a nu fi acesta* şi *a fi non-acesta*; de exemplu, *a nu fi alb* şi *a fi non-alb.* Într-adevăr, sensul nu este acelaşi iar, pe de altă parte, negația lui *a fi alb* nu este a fi non-*alb,* ci *a nu fi alb*». Simpla afirmație «x nu are predicatul P» nu îi atribuie lui x un predicat deoarece, din faptul că x nu verifică funcția propozițională $P(x)$, nu rezultă pentru x o proprietate. Avem exact problema precedentă văzută în comprehensiune.

Vedem acum clar care este eroarea în aceste probleme: a fost introdusă o proprietate P, pe care o entitate logică x ar avea-o ca urmare a faptului că x nu are o altă proprietate. Dar a avea pur şi simplu o proprietate nu înseamnă a avea o altă proprietate şi nici a nu avea pur şi simplu o proprietate nu înseamnă a avea o altă proprietate. Acelaşi lucru se poate spune şi pentru clase: simplul fapt de a aparține unei clase nu constituie prin el însuşi o altă proprietate – de a aparține unei alte clase –, şi nici simplul fapt de a nu aparține unei clase nu constituie prin el însuşi o altă proprietate, de a aparține unei alte clase.

Dacă din simplul fapt că un lucru oarecare x nu admite un predicat P rezultă că x admite un predicat Q, atunci, deoarece x nu admite un număr imens de predicate, ar rezulta că x, oricare ar fi el, admite un număr imens de predicate, ceea ce este absurd.

7. Submulțimile unei mulțimi şi teorema lui Cantor

Să considerăm acum noțiunea de submulțime (sau subclasă). Să luăm definiția de submulțime din cartea lui Fraenkel, *Abstract Set Theory* (p. 13): «*Submulțimi. Definiție.* Dacă fiecare membru al unei mulțimi S este de asemenea membrul unei alte mulțimi E (adică, de exemplu, dacă $x \in S$ implică $x \in E$), atunci S este numită o submulțime a lui E».

Vom observa mai întâi că orice submulțime nu este constituită ca mulțime decât în funcție de o mulțime deja dată; submulțimea S a mulțimii E nu are o definiție independentă de mulțimea E, a cărei definiție se presupune că a fost dată anterior. Nu există submulțimi în sine, nu există decât mulțimi. Submulțimile sunt create numai în interiorul unei mulțimi date. Submulțimile nu sunt definite prin însăşi definiția unei mulțimi E; ele nu derivă direct şi analitic din noțiunea de mulțime. Din faptul că s-a dat definiția sau chiar ideea de mulțime nu rezultă că există submulțimi. În consecință, submulțimile unei mulțimi, considerate ca noi mulțimi, sunt construite convențional, iar din punct de vedere logic ele sunt definite prin accident. Din definiția dată mai înainte rezultă că fiecare mulțime este de asemenea propria sa submulțime.

Fie mulțimea $E = \{a, b, c\}$; putem alege toate elementele lui E şi să formăm submulțimea E a lui E; putem să alegem aceste elemente două câte două şi vom obține o nouă submulțime a lui E: $S_1 = \{a, b\}$, $S_2 = \{a, c\}$, $S_3 = \{b, c\}$ etc.

Dar aceste submulțimi sunt definite prin convenție şi ele nu există decât în interiorul mulțimii date. A le scoate din universul lor particular, unde convenția noastră le-a creat, înseamnă a le anihila, pentru că nici o convenție nu există în sine. Dar tocmai aceasta este tentativa pe care o facem când credem că gândim că numărul submulțimilor unei mulțimi date există în afara mulțimii însăşi care le serveşte de bază. O mulțime poate să aibă o definiție propriu-zisă ca mulțime, dar ca submulțime nu este definită decât prin accident. Este adevărat că este legitim să formăm prin accident submulțimile unei mulțimi date *E*; eroarea constă în faptul că voim să considerăm submulțimile lui *E* definite şi existând numai în funcție de *E*, ca definite şi existând independent de *E*, şi în acest caz nu mai definim nimic şi nu afirmăm nimic ca existent.

În rezumat, dacă se dă o mulțime α, putem forma submulțimi cu elementele lui α, dar aceste submulțimi nu pot fi date decât în interiorul lui α; a presupune că ele există fără α, cu ajutorul căruia ele sunt definite prin accident, înseamnă să suprimăm singurul lor element care le defineşte, adică accidentul, şi atunci submulțimile nu sunt deloc definite. Cu alte cuvinte, submulțimile trebuie să rămână submulțimi şi nu să devină mulțimi.

Această concluzie apare şi mai evidentă dacă utilizăm notațiile simbolice. Se notează clasa subclaselor unei clase α prin Cl'α (mulțimea puterilor din teoria mulțimilor); printre subclasele lui α se găsesc chiar clasa α şi clasa vidă. Avem în *Principia mathematica* definiția:

$\mathrm{Cl}'\alpha =_{\mathrm{Df}} \beta\ (\beta \subset \alpha)$.

«Clasa tuturor subclaselor lui α» este definită ca fiind «toate clasele care verifică funcția propozițională $\beta \subset \alpha$» (care sunt incluse în α). Dar clasa β nu este definită ca subclasa lui α decât prin definiția lui α; deci β presupune clasa α iar funcția propozițională $\beta \subset \alpha$ nu este definisantă. Avem aici un exemplu de definiție *idem per idem* din categoria a doua, numită diallela: clasa Cl'α a tuturor subclaselor lui a este definită cu ajutorul clasei α şi al claselor β, definite ca subclasele lui α prin clasa α.

Să presupunem, în general, că formăm o clasă *G* luând toate clasele β care au o relație *R* cu o clasă dată α. Vom avea prin definiție:

$G =_{\mathrm{Df}} \beta\ (\beta\ R\ \alpha)$.

Dar, pentru ca o definiție să nu degenereze într-o definiție nulă *idem per idem* condiția este, cum am arătat deja, $\beta \neq \alpha$. Deci β nu poate fi o clasă egală cu α şi nu poate fi nici definită cu ajutorul lui α. Dar tocmai această condiție nu este îndeplinită şi din acest motiv clasa subclaselor nu este definită.

Să observăm că subclasele unei clase pot fi formate şi ele sunt formate prin accident (şi aceasta este posibil numai dacă toate dementele sunt date), dar *clasa* tuturor subclaselor nu este definită decât prin accident şi pentru aceasta ea nu este corect definită; noi nu gândim nimic prin această definiție şi nu punem nimic ca existent prin ea. Formarea subclaselor unei clase are un caracter empiric, de fapt; colecția acestor subclase poate fi realizată numai în cazuri practic date, dar ea nu este realizabilă prin definiție. Rezultă că în domeniul claselor infinite problema nu este realizabilă şi exigența lui Brouwer găseşte prin aceasta o explicație pur logică.

Fiind dată o mulțime M, submulțimile lui M pot fi formate numai dacă toate elemenlele lui M sunt date. În domeniul numerelor este suficient să dăm efectiv numărul de elementelor unei mulțimi M pentru a calcula numărul de submulțimi şi în consecință să formăm mulțimea submulțimilor sale. Dar, dacă mulțimea este infinită, numărul elementelor sale nu este dat şi, în consecință, nu putem determina efectiv toate submulțimile, numărul lor sau mulțimea lor.

Matematicienii au simțit, de la primele cercetări axiomatice asupra teoriei mulțimilor, că este ceva în neregulă în problema submulțimilor unei mulțimi, pentru că Zermelo s-a văzut obligat să introducă mulțimea submulțimilor unei mulțimi printr-o axiomă de existență: *Fiind dată o mulțime* *oarecare*, *mulțimea submulțimilor ei există*. Pentru a îi da singurul sens pe care îl poate avea, această axiomă trebuie să fie enunțată după cum urmează: *Fiind dată o mulțime finită*, *indicând efectiv toate elementele sale*, *putem forma mulțimea tuturor submulțimilor sale.* Am spus că «putem forma» şi nu ca în axioma lui Zermelo «există», deoarece submulțimile, ca şi mulțimile lor, nu există prin definiție, adică înaintea formării lor, ci numai după construirea lor efectivă, fiind formate prin accident şi nu definite prin accident (ceea ce nu are sens). Numai după construirea prin accident a mulțimii tuturor submulțimilor unei mulțimi date poate aceasta să fie efectiv gândită, şi nu înainte.

Acum, dacă luăm în considerare paradoxul lui Cantor, privind numărul cardinal cel mai mare, putem uşor să descoperim eroarea. Fie *M* mulțimea tuturor mulțimilor şi *Nc* numărul său cardinal: *Nc* este cel mai mare număr cardinal posibil. Pe de altă parte, Cantor demonstrează că dacă o mulțime are *n* elemente, numărul submulțimilor sale este 2^n şi $2^n > n$. De unde teorema bine cunoscută: numărul cardinal al mulțimiii tuturor submulțimilor unei mulțimi *M* este mai mare decât numărul cardinal al mulțimii *M.* În consecință, dacă *M* este mulțimea tuturor mulțimilor, numărul său cardinal *Nc* este cel mai mare posibil; numărul cardinal al tuturor submulțimilor sale are însă un număr cardinal mai mare decît *Nc*.

Dacă ținem seama de analiza precedentă, vedem că paradoxul lui Cantor nu este posibil din două motive: 1) El presupune formarea mulțimii *M* a tuturor mulțimilor posibile (şi am arătat că această mulțime nu este definită şi deci nu gândim nimic prin *M* şi nici nu punem nimic ca existent prin el). 2) Submulțimile unei mulțimi *M* nu pot fi formate prin definiție (ca rezultat al considerațiilor pe care le-am făcut), ci numai dacă elementele lui *M* sunt date şi indicate efectiv, ceea ce nu este cazul în paradoxul lui Cantor. Aceasta ne conduce însă la o examinare mai de aproape a teoremei lui Cantor amintită: *Puterea* (*numărul cardinal*) *al mulțimii tuturor submulțimilor unei mulțimi date este superioară puterii* (*numărului cardinal*) *al acestei mulțimi.* Conform acestei teoreme, nu ar putea exista o ultimă mulțime (clasă), adică o mulțime universală, pentru că mulțimea submulțimilor acestei mulțimi (presupusă universală) ar fi mai extensivă. Această teoremă a permis lui Cantor să definească mulțimile infinite din ce în ce mai extensive, adică din ce în ce mai puternice, care formează seria numerelor transfinite, seria *Alephi*-lor. Dar, din analiza făcută, rezultă că pentru mulțimile infinite noțiunea de submulțime nu este aplicabilă. Într-adevăr, în domeniul infinitului condiția cerută de mulțimile construite prin accident nu este realizabilă, deoarece nu putem indica toate elementele unei astfel de mulțimi sau numărul lor efectiv. În consecință, *Aleph*-ii lui Cantor sunt definiți prin accident, adică nu sunt definiți, nu sunt gândiți şi nu avem dreptul să îi punem ca existenți.

8. Concluzii

Credem că am arătat, prin analiza precedentă, că trebuie neapărat să respectăm condițiile definiției pentru a defini cu adevărat ceva, în consecință pentru a gândi ceva şi, în fine, pentru a pune ceva ca existent.

Toate definițiile care introduc simple cuvinte, *definițiile prin abreviere*, *definițiile convenționale*, *definițiile semnelor sau ale simbolurilor sunt definiții construite prin accident şi trebuie să fie utilizate cu prudență*.

În sistemele logico-formale, ca şi în matematici, sunt utilizate continuu astfel de definiții. Logica simbolică, manipulând simboluri vide de orice conținut, este, în general, obligată să privească relația dintre *definiens* şi *definiendum* ca o relație arbitrară. Sunt introduse astfel definițiile prin accident care, dacă permit abreviații utile, nu exprimă în schimb nici un concept nou; nu gândim nici o idee şi nu punem nimic ca existent logic. Pentru a evita unele consecințe ale acestor definiții nule, trebuie să ținem seama de condițiile definiției, după cum am văzut.

În general, putem crede că s-au definit probleme care sunt complet iluzorii tocmai pentru că ele nu sunt definite. În cele câteva exemple date, am văzut că unele concepte şi probleme erau (şi sunt) inexistente. Ceea ce este frapant este că aceste probleme sunt dintre cele mai dificile în filosofia şi logica epocii noastre. Ar părea astfel că cele mai mari dificultăți de care se izbeşte inteligența umană nu ar consta în problemele insolubile, ci în probleme inexistente. Este oare acesta cazul tuturor marilor dificultăți? Wittgenstein a afirmat în general (*Tractatus*, prop. 4.003); «*Und es ist nicht verwunderlich dass die tiefsten Probeme eigentlich keine Probleme sind*» (Şi nu este de mirare că problemele cele mai profunde nu sunt în realitate probleme).

BIBLIOGRAFIE

1. **ARISTOTELES:** De interpretatione; Analytica priora.
2. **BAIN, A..:** Logique déductive et inductive (Paris, 1894).
3. **BEHMANN, H.:** Zu den Widersprüchen der Logik und Mengenlehre (1931).
4. **BOCHVAR, D. A.:** Asupra unui calcul trivalent şi aplicațiile lui in analiza paradoxelor calculului functional extins clasic (1939).
5. **BOURBAKI:** Théorie des ensembles (Paris, 1954).
6. **CARNAP, R.:** Logical Syntax of Language (New York, 1937).
7. **DENJOY, A.:** L'enumération fransfinie (vol. IV, Notes sur les sujets controversés).
8. **DUBISLAV, W.:** Die Definition (Leipzig, 1931).
9. **DUMITRIU, A.:** Soluția paradoxelor logico-matematice (1966); Istoria logicii (vol. IV).
10. **FRAENKEL, A.:** Abstract Set Theory (Amsterdam, 1961).
11. **RUSSELL, B.**: Principia mathematica (vol. I, 1910); Introduction to Mathematical Philosophy (trad. fr., Paris 1928).
12. **SIERPINSKI, W.:** Cardinal and Ordinal Numbers (Varşovia, 1958)
13. **VAN DER WAERDEN, B. L.:** Moderne Algebra