DEFINIȚIA (II)

Paul Sfetcu

psfetcu@yahoo.com

Institutul Național de Cercetare - Dezvoltare în Informatică, ICI, Bucureşti

Rezumat: În acest articol evidențiem faptul că definiția în matematică nu este unică, aşa cum voia Aristoteles în definiția prin *genus proximum* şi *differentia specifica*, prin care surprindea *estența* unui lucru, ci ea este făcută printr-o funcție propozițională, care lasă creației intelectuale toată libertatea de mişcare.

Cuvinte cheie: definiție, demonstrație.

Abstract: In this article we point out that the mathematical definition is not unique, as Aristotle created it, by *genus proximum* and *differentia specifica*, pointing to the *essence* of a thing. It consists in a functional proposition, allowing the intelectual act of creation all its liberty of movement.

Key words: definition, proof.

1. Pluralitatea definiției

1.1 Libertatea de alegere a caracterelor definitorii

În articolul precedent dedicat definiției am văzut importanța acesteia într-o teorie matematică. Dar, în acelaşi timp, ne dăm seama că nu există o definiție unică a definiției, ceea ce înseamnă că nu ştim exact cum definim. Aristoteles face din definiție nervul ontologic al demonstrației silogistice.

Logicianul Louis Liard, (în lucrările *Logique* şi *Des définitions géometriques et des definitions empiriques*) care s-a ocupat în mod special de definițiile matematice, conchide că axiomele sunt principiile comune ale unui număr indefinit de demonstrații, iar definițiile sunt principiile proprii ale fiecărei demonstrații particulare.

Pentru unii dintre cei care s-au ocupat de progresul matematicilor – Hobbes şi Leibniz – am văzut că toate propozițiile primitive sunt definiții. Vom arăta mai departe motivul de ordin pur teoretic pentru care nu se poate să fie altfel. Întreaga problemă pivotează însă mai întâi în jurul întrebării: cum definim? Să considerăm definiția triunghiului dreptunghic: un triunghi dreptunghic este un triunghi care are un unghi drept. Cei care sunt obsedați de specii, de genuri – fie că le concep sau nu în mod metafizic –, spun că avem aici o definiție de tip clasic prin *genus proximum* (triunghi) şi *diferentia specifica* (unghi drept).

Acest fel de a vedea lucrurile acordă o existență specială triunghiului dreptunghic printre toate triunghiurile, adică înăuntrul genului triunghi şi printre speciile de triunghiuri. Triunghiul dreptunghic este depozitarul unor legi enigmatice care îl individualizează, celelalte triunghiuri fiind cu totul anonime şi neinteresante. Ceea ce nu are nimic de-a face cu realitatea. Să presupunem că luăm toate triunghiurile posibile; dacă vrem să le individualizăm prin valoarea determinată a unui unghi, vom putea identifica fiecare triunghi în felul următor:

- triunghiuri cu un unghi de un grad;
- triunghiuri cu un unghi de două grade;
- triunghiuri cu un unghi de trei grade;

. . . .

- triunghiuri cu un unghi de n grade ($n < 180°$).

În general, să scriem triunghiul cu unul dintre unghiuri de n° în felul următor: $\Delta_{n°}$, unde n poate fi un număr întreg ($n < 180°$), fracționar sau chiar irațional. Fixarea lui n printr-o particularitate, anume prin valoarea numerică a unghiului (unghi drept, adică de 90°), nu îi dă nici un fel de existență preeminentă printre toate triunghiurile. Aceeaşi situație o are orice triunghi; şi triunghiul cu un unghi de un grad, de exemplu, $\Delta_{1°}$, este definit exact ca şi triunghiul dreptunghic, printr-o particularitate care îi este proprie şi care îl individualizează. Putem să obţinem o serie de teoreme geometrice specifice triunghiului cu unghiul de1°, tot aşa cum am obţinut o serie de teoreme specifice pentru triunghiul cu un unghi de 90°. Ele vor fi tot atât de interesante ca şi acelea relative la triunghiul dreptunghic.

Într-adevăr, în orice triunghi avem relaţia:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Dacă A este de 90°, cosA = 0, aşa că relaţia se reduce la teorema lui Pythagoras:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Dacă A = 1°, cosA este un număr foarte puţin diferit de 1 (mai mic ca 1); în fapt el este, calculat cu cinci zecimale, 0,99985. Aşadar, avem teorema referitoare la triunghiurile cu un unghi de un grad. În orice triunghi cu un unghi de un grad, pătratul laturii care se opune acestui unghi este egal cu suma pătratelor celorlalte doua laturi minus de două ori produsul lor cu numărul 0,99985.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot 0{,}99985\ bc.$$

Această teoremă este tot atât de importantă ca şi teorema lui Pythagoras pentru triunghiul dreptunghic, dar din punct de vedere teoretic nu reprezintă nici un interes mai mare decât cealaltă. Dacă, din punct de vedere practic, teorema lui Pythagoras este mai simplă, mai simetrică decât cealaltă teoremă (sau celelalte teoreme, dacă ne referim la aplicarea acesteia la fiecare valoare numerică pe care poate să o ia n < 180°), aceasta este o problemă de preferinţă şi nu de valoare matematică.

Prin ceea ce am spus până acum am voit să arătăm că definirea triunghiului dreptunghic prin unghiul drept face parte dintr-o identificare generală a tuturor triunghiurilor prin valoarea particulară pe care poate să o ia unul dintre unghiuri. Această fixare a fiecărui triunghi înseamnă definiţia lui şi ea utilizează o particularitate, cazul particular propriu care îl fixează sau îl defineşte. În felul acesta, se poate spune că o definiţie se face prin *proprium* – prin ceea ce este caracteristica lui dintr-un anumit punct de vedere. Dar punctul acesta de vedere este absolut la libera alegere, căci cu elementele pe care le oferă figura triunghiului putem face o altă individualizare a triunghiurilor. Fie, de pildă, punctul următor de vedere: raportul dintre un unghi şi suma celorlalte două. Într-o identificare mult mai generală decât prima, vom avea următoarele cazuri (A, B şi C fiind cele trei unghiuri):

1° $A > B + C$

2° $A = B + C$

3° $A < B + C$

Am obţinut în modul acesta trei tipuri de triunghiuri: triunghiuri care au un unghi mai mare decât suma celorlalte două; triunghiuri care au un unghi egal cu suma celorlalte două; triunghiuri care au un unghi mai mic decât suma celorlalte două.

Se vede că în cazul al doilea am definit chiar triunghiul dreptunghic: acesta este triunghiul care are un unghi egal cu suma celorlalte două. Presupunem că am fi vrut să definim prin acelaşi procedeu toate celelalte triunghiuri. Atunci ar fi trebuit să ne referim tot la o relaţie precisă, de raport dat între unul dintre unghiuri şi suma celorlalte două. Fiecare triunghi ar fi definit prin valoarea raportului $(B + C)/A$. În cazul în care acest raport are valoarea 1, adică $(B + C)/A = 1$, avem triunghiul dreptunghic. În cazul în care acest raport are alte valori, avem alte triunghiuri.

Am putea defini triunghiurile şi din alt punct de vedere, anume luând în considerare laturile şi raporturile dintre acestea, adică $a/(b + c)$ şi să vedem cum variază raportul acesta pentru fiecare triunghi particular. Deoarece $a < b + c$, avem: $a/(b + c) < 1$.

Cum însă, atâta timp cât triunghiul există, nici una dintre laturi nu poate fi zero, raportul acesta este mai mare ca zero, aşadar avem:

$$0 < a/(b + c) < 1.$$

Pentru fiecare valoare a raportului de mai sus – rațională sau irațională –, cuprinsă între 0 şi 1, vom avea definit un triunghi.

Am putea să utilizăm şi o altă caracterizare a triunghiurilor: să considerăm valoarea metrică a laturilor şi să luăm pătratele lor, comparând pătratul uneia cu de suma pătratelor celorlalte. Astfel va trebui să examinăm raportul

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc}.$$

Fiecare valoare a acestui raport ne va defini un triunghi. Limita superioară a acestui raport va fi uşor de stabilit. În cazul particular în care raportul

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc}$$

este nul, avem definiția triunghiului dreptunghic. Pentru triunghiul cu un unghi de un grad, va corespunde valoarea aproximativă (cu cinci zecimale)

$$(b^2 + c^2 - a^2)/2\ bc = 0{,}99985.$$

Şi aşa mai departe se vor putea lua cuburile laturilor sau puterile patru etc., iar cu aceste valori se va putea stabili un raport sau raporturi între expresii ale acestor puteri care, pentru fiecare valoare particulară, va defini un tip de triunghi.

Se vede astfel că definiția nu priveşte «esența» sau caracterul esențial al unui lucru, al unei entități matematice; fixarea imaginației noastre asupra unui triunghi, care se impune atenției noastre prin faptul că a fost studiat mai de aproape, îi atribuie un caracter magic şi special, deşi din punct de vedere teoretic atât definiția lui, cât şi proprietățile lui, sunt absolut analoage cu ale celorlalte triunghiuri.

În alegerea elementului definitoriu, noi nu surprindem un caracter esențial al triunghiului dreptunghic, ci un element caracterizant pentru toate triunghiurile, pentru tot genul şi acest caracter implică o individualizare, după acest criteriu, a tuturor unghiurilor.

În concluzie, punctul de vedere din care definim o entitate geometrică este ales liber, în cadrul datelor care oferă o serie infinită de posibilități de alegere a criteriilor definitorii. Dacă totuşi voim să utilizăm genul, vom spune că o definiție constă din alegerea unui element sau a unor elemente comune întregului gen, capabile să fie particularizate la toate spețele lui. Aceste elemente se comportă ca o variabilă (când se referă la gen) şi valorile ei posibile ne oferă toate spețele care îi aparțin.

Libertatea matematică constă în alegerea elementelor definitorii, dar mai ales în raporturile posibile pe care ni le imaginăm că pot fi formate cu aceste elemente şi care vor constitui factorul definisant propriu-zis.

Să considerăm cercul. Această figură geometrică a izbit imaginația celor vechi, care au considerat-o ca având un loc special nu numai în geometrie, dar şi în cosmos.

Era una dintre figurile perfecte alături de pătrat, triunghi echilateral, sferă si tetraedru regulat. Nu este de mirare dar că oamenii l-au conceput ca pe o entitate enigmatică, dotată cu virtuți magico-teosofice.

Dacă definim cercul ca fiind linia curbă închisă ale cărei puncte sunt toate egal depărtate de un punct interior numit centru, avem impresia că am creat o entitate misterioasă care, o dată surprinsă de definiție, ne va oferi o serie de proprietăți încă şi mai misterioase. Adevărul este că nici astăzi nu am izbutit să ne despărțim total de imaginea pe care şi-au făcut-o cei antici despre cerc, dacă această imagine rămâne în umbră şi nu ghidează direct cercetările asupra proprietăților cercului.

Să considerăm toate curbele plane închise. Ele formează un gen de curbe. Dacă am putea găsi un element permanent comun acestor curbe şi să îl punem în evidență, variind acest element, vom obține toate curbele plane. Acest lucru este mai dificil.

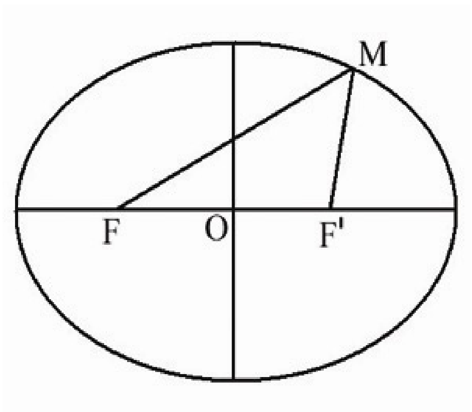
Să restrângem însă cercetarea noastră la curbele foarte apropiate de cerc şi care sunt elipsele.

Să definim elipsa: curba plana închisă care are toate punctele astfel încât suma distanțelor fiecărui punct la două puncte fixe date, numite focare, este constantă. Să însemnăm această sumă constantă cu 2c.

$$FM + F'M = 2c$$

(c reprezentând distanta OF).

Variindu-l pe c, vom obține toate elipsele posibile (c poate lua toate valorile, raționale sau iraționale, mai mari sau egale cu zero). Pentru c = 0, focarele se confundă cu punctul O (centrul elipsei), iar razele vectoare FM şi F'M se confundă în una singură, raza cercului. Aşadar, dând diverse valori lui c, obținem pentru fiecare valoare o elipsă. De pildă, pentru c = 1 vom avea o elipsă particulară, care va avea proprietățile elipsei particularizate; pentru c = 0 avem cercul, care este o elipsă cu proprietăți particularizate. Pentru a pune în evidență lucrul acesta, să notăm elipsa corespunzătoare valorilor lui c cu E_c; variabila c trece prin toate valorile, începând de la 0 (raționale sau iraționale). Am identificat astfel fiecare caz particular, fiecare elipsă corespunzătoare unei valori numerice a lui c. Dacă studiem elipsa E_1, vom găsi proprietăți particulare ale acestei curbe, nici mai puțin interesante, nici mai interesante decât ale cercului, adică pentru E_0. Acestea pot fi mai simple sau mai simetrice dar, din punct de vedere teoretic, nu au nimic deosebit de E_1, sau de oricare E_c.

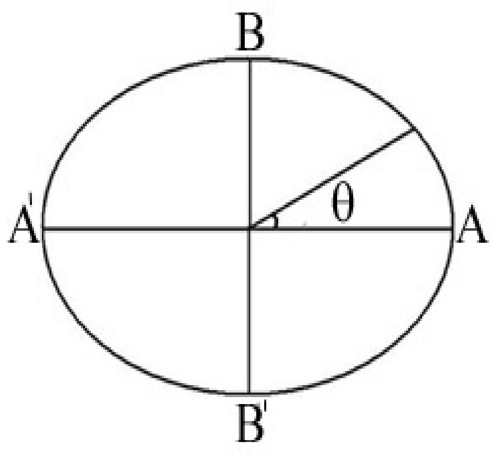


Se vede că avem aceeaşi identificare, ca şi în cazul triunghiului, a tuturor elipselor în care am ales un element c caracteristic şi am identificat pentru toate valorile lui c toate elipsele particulare.

Putem însă să procedăm liber şi în alt mod; fie reprezentarea parametrică a elipsei, în care a = OA, b = OB:

$$x = a \cos \theta$$

$$y = b \sin \theta$$



Se pot varia semiaxele a şi b şi astfel se pot obține toate elipsele posibile. Putem să le considerăm după raportul dintre semiaxe: a/b. Pentru fiecare valoare numerică a acestui raport, avem o elipsă. Pentru valoarea 1, obținem cercul, în care semiaxele devin egale şi reprezintă raza: a/b = 1, sau a = b.

Şi aşa mai departe, să ne imaginăm liber orice combinație, orice expresie formată cu elementele care intră în joc şi fiecare valoare numerică particulară va identifica o elipsă particulară.

Dacă am putea pune în evidență caracterul de curbă închisă în general, considerând variația acestui caracter, am putea atunci să considerăm şi să identificăm elipsa ca un caz particular al acestui caracter.

În rezumat, ceea ce cei vechi numeau *differentia specifica* este de fapt expresia aleasă liber a unui caracter sau a unor caractere ale ceea ce numeau *genus proximum*, particularizate în fiecare caz, iar alegerea combinației este liberă. Cu alte cuvinte, *differentia specifica* este un caracter comun al genului, capabil să fie particularizat la fiecare individ al genului, pentru a păstra limbajul clasic, iar ideea care conduce de la elementul ce intră în joc în definiția genului, la fiecare individ, este aleasă liber.

Acelaşi lucru se poate observa şi în aritmetică. Să presupunem că acceptăm definitia lui Russell pentru care un număr este numărul unei clase, şi anume al claselor care îi sunt asemănătoare.

Numărul 2 va fi, după această definiție, clasa tuturor cuplurilor. Cu aceasta, Russell a definit variabila număr, care se va particulariza în fiecare caz, oferind numerele naturale.

Alegerea caracterului de clasă ca fiind reprezentativă pentru numărul întreg este liberă, şi cunoaştem şi alte încercări care pleacă de la alt punct de vedere. *Differentia specifica* este caracterul comun variabil, iar variația lui (în cazul nostru, al clasei claselor de asemănare) secretează, ca să spunem aşa, indivizii genului.

Când vorbim de proprietățile cercului ca despre ceva esențial cercului, nu facem decât să spunem, într-un limbaj mai acceptabil, că ne referim la arcanele cercului. Dar el nu are proprietăți care derivă din ființa lui misterioasă, ci tot ce spunem despre el sunt caracteristici particularizate ale caracterului general al genului considerat, capabil să varieze, fiindcă este considerat sub un anume unghi variabil.

Tot astfel, de exemplu, numărul 2 ne apare ca o entitate misterioasă şi însuşi Russell spune că definiția numărului 2, ca fiind clasa cuplurilor, este uşor de înțeles, pe când numărul 2, dimpotrivă, este o entitate metafizică, a cărei existență nu ne pare sigură.

1.2 Pluralitatea definițiior unui aceluiaşi obiect matematic

Prin cele afirmate anterior, am constatat faptul că o definiție pleacă de la un punct de vedere ales liber, care va oferi posibilitatea de a individualiza fiecare individ al genului considerat. Acest rezultat implică o consecință imediată, care de altfel a şi fost pusă în evidență în paragraful precedent, şi anume că putem defini un acelaşi obiect matematic în diverse moduri.

Fie obiectul general triunghiul. Acesta este o figură plană cu trei laturi şi trei unghiuri. Putem alege în mod liber orice expresie în care intră combinația laturilor sau unghiurilor, capabilă să ne individualizeze toți indivizii care intră în sfera acestui gen. Astfel, dacă aleg *mărimea unui unghi* drept caracter comun variabil, triunghiul dreptunghic va avea definiția: «triunghiul dreptunghic este un triunghi care are un unghi drept».

Să luăm, cum am văzut mai sus, expresia

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

în care intră laturile, ca element comun variabil. Am văzut că pentru $b^2 + c^2 - a^2 = 0$ avem triunghiul dreptunghic. Deci avem defnția: triunghiul dreptunghic este triunghiul pentru care expresia $b^2 + c^2 - a^2$ are valoarea zero. Triunghiul este perfect definit, deoarece expresia

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

individualizează pentru fiecare valoare a variabilelor a, b şi c un triunghi determinat.

În felul acesta, vom putea enunța mai departe alte definiții ale triunghiului dreptunghic: triunghiul dreptunghic este triunghiul în care un unghi este egal cu suma celorlalte două etc. Dacă introducem prin definiție elemente noi în legătură cu triunghiul, vom putea imagina liber o altă expresie care să fie capabilă să individualizeze toate triunghiurile şi care, într-un caz particular, ne va da chiar triunghiul dreptunghic. De exemplu, să introducem prin definiție noțiunile de înălțime şi de arie. Vom putea spune: triunghiul dreptunghic este triunghiul în care înălțimea are valoarea $AD^2 = BD \times DC$. Sau, deoarece aria unui triunghi, în general, este exprimată de formula

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$$

(în care s-a mai introdus prin definiție şi noțiunile de linie trigonometrică, sinus, cosinus, etc.), formula care pentru fiecare valoare a unghiului A ne dă aria exprimată în funcţie de laturile b şi c ale fiecărui triunghi individualizat prin valoarea unghiului A, vom putea spune (A = 90°): triunghiul dreptunghic este triunghiul care are aria egală cu bc/2. Se vede dar că toate teoremele geometriei triunghiului pot fi utilizate ca definiţii ale triunghiului. Noi ajungem la ele pe cale de raţionament. Dar ele pot fi inventate ca definiţii, şi aici stă tocmai dificultatea: posibilitatea inteligenţei de a găsi elementul definisant variabil al genului care să ne ofere prin particularizări continue toţi indivizii pe care îi avem în vedere conform punctului de vedere ales liber, astfel ca să găsim determinat, la un moment dat, însuşi individul ales.

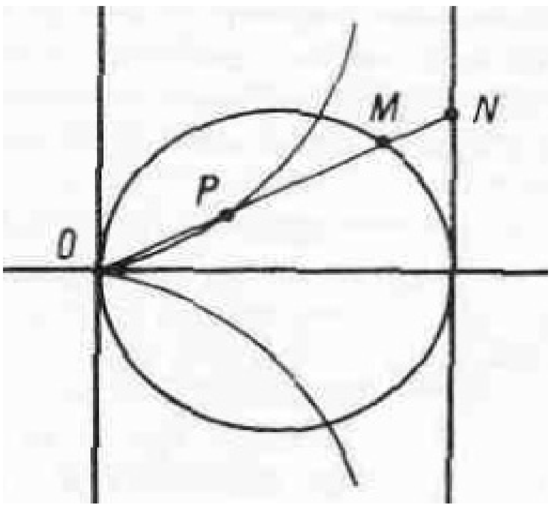
Aceste definiţii multiple ale aceluiaşi obiect matematic se complică tot timpul, atât prin combinaţia elementelor definitorii alese liber, cât şi prin noi elemente ale obiectelor introduse tot prin definiţie. De exemplu, am văzut că, plecând de la definiţia simplă a triunghiului plan (ca fiind figura plană cu trei laturi şi trei triunghiuri), am fi putut scoate o serie infinită de definiţii utilizând numai noţiunile de laturi şi unghiuri şi combinându-le într-un element definitoriu simplu, complicat de cele mai multe ori, dar capabil să identifice fiecare individ, cum a fost expresia $(b^2 + c^2 - a^2)/2bc$. Introducând prin definiţie noţiunile de înălţime şi de suprafaţă, numărul definiţiilor posibile creşte, fiindcă creşte numărul combinaţiilor posibile care dau elemente definitorii. Elementul definitoriu a fost valoarea unui unghi A; valoarea expresiei $(b^2 + c^2 - a^2)/2bc$; valoarea expresiei suprafeţei $(bc \cdot \sin A)/2$ (unde s-a introdus şi noţiunea de sinus) etc.

Dacă am fi în stare să găsim direct de la început elementele definitorii de tipul celor de mai sus, pentru triunghi, teoremele privitoare la triunghi în general şi acelea privitoare la triunghiul dreptunghic în particular ar fi descoperite prin definiţie.

Aceleaşi consideraţii se aplică în orice alt caz; luaţi orice figură geometrică şi veţi vedea că teoremele referitoare la ea nu sunt decât definiţii particularizate la cazul special ales. Aceasta constituie, de altfel, surpriza teoremelor matematice care descoperă definiţia particulară a obiectului individualizat şi ne ascunde tocmai provenienţa ei, ca particularizare a unei definiţii. Şi de aceea s-a susţinut că raţionamentul merge de la general la particular.

Fie cercul: el poate fi definit ca fiind locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix numit centru, sau ca o elipsă cu axe egale etc.

Luăm locul geometric rezultat din următoarea problemă: fie un triunghi ABC şi o dreaptă variabilă Δ, care trece prin B; fie C' simetricul lui C faţă de Δ. Cercul este locul geometric al mijlocului segmentului CC'. *Orice teoremă referitoare la cerc poate servi ca definiţie a cercului.*



Fie cisoida lui Diokles. Definiţia ei ca loc geometric este următoarea: fiind dat un cerc, un punct O pe acest cerc şi tangenta în punctul diametral opus A, se duce prin O o dreaptă oarecare, pe care se ia un punct P, astfel încât OP = MN. Locul punctului P este cisoida lui Diokles. Dar o mai putem defini şi ca locul geometric rezultat din următoarea problemă: Fie un cerc fix şi un fascicul de cercuri tangente la cercul fix într-un punct fix O al cercului. Se duc tangentele comune la cercul fix şi la cercurile variabile; locul comun al punctului M de tangenţă este cisoida.

Şi aşa mai departe, se pot găsi oricâte definiţii ale cisoidei ca loc geometric. Unele vor fi considerate teoreme, altele definiţii şi nu sunt deosebite cu nimic în ceea ce priveşte caracterul lor definitoriu.

Ar fi de prisos să multiplicăm numărul exemplelor fie din geometria plană, fie din geometria în spaţiu, fie din geometriile neeuclidiene. Concluzia este aceeaşi: suntem în măsură să construim o serie nelimitată de definiţii ale aceluiaşi obiect geometric.

Dacă acum luăm în considerare *genus proximum* şi *differentia specifica* cu care se construieşte definiția clasică, putem vedea că oricare dintre definițiile – sau teoremele – de mai sus sunt exprimate şi în modul acesta. Triunghiul dreptunghic este triunghiul (*genus*) în care expresia $b^2 + c^2 - a^2$ este egală cu zero (*differentia*); cercul este locul geometric (*genus*) al mijloacelor dreptei CC' (*differentia*, căci celelalte puncte ale dreptei CC' nu descriu cercuri, ci numai mijlocul); cisoida este locul geometric (*genus*) al punctului de tangență M (*differentia*, căci numai punctul M de pe tangentă al tangentei comune cu cercul variabilei descrie cisoida) etc. etc.

Toate teoremele sunt astfel propoziții definitorii.

Se petrece lucrul acesta exact la fel şi în aritmetică? Răspunsul este de la început afirmativ. Într-adevăr, fie definiția divizibilității cu 3: un număr este divizibil cu trei dacă restul împărțirii acestuia la 3 este zero. Aceasta este individualizarea definiției generale a divizibilității pentru cazul numărului 3. Teorema: «un număr este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor lui (scris în sistemul zecimal) adunate ca simple unități este divizibilă cu 3» poate servi ca definiție a divizibilității cu 3. Pentru a pleca de la această teoremă ca definiție a divizibilității cu 3, ar fi trebuit să găsim un element caracterizant (sau combinații de elemente caracterizante), ataşat permanent numărului în general (ca variabilă) şi acest element (sau combinație de elemente) să conțină suma cifrelor sau să se reducă la condiția particulară a divizibilității sumei cifrelor lui cu 3. Tocmai în aceasta constă dificultatea găsirii definițiilor – şi cu aceasta a teoremelor – pentru că nu ne putem imagina de la început toate posibilitățile de definire ale unui aceluiaşi lucru.

Dacă ne referim la teorema lui Fermat, putem spune că un număr care are un factor de forma $K^2 - 1$, unde K este prim cu 3, este divizibil cu 3. Aceasta este iarăşi o definiție a divizibilității cu 3. Pentru a o construi direct de la început ca definiție (nu să o obținem ca teoremă), ar fi trebuit să ne imaginăm o astfel de expresie printre toate combinațiile care ne stau liber la dispoziție şi să o ataşăm ca element definitoriu al divizibilității numărului în general (ca variabilă) cu un număr prim (ca variabilă) şi apoi să arătăm că, în cazul divizibilității cu 3, ea se reduce la expresia de mai sus. Dar acest lucru este destul de greu de făcut.

De altfel, după cum a arătat Hilbert în *Grundlagen der Geometrie*, orice element al geometriei euclidiene se poate înlocui cu elemente aritmetice, astfel încât toate axiomele sau teoremele geometrice se traduc prin relații aritmetice exacte între elementele aritmetice corespunzătoare.

Fie, de pildă, axioma geometrică: Două puncte distincte determină totdeauna o dreaptă şi numai una (mai întâi vom face observația că această axiomă este o definiție; ea spune: două puncte definesc o dreaptă şi numai una). Aceasta revine la a spune în mod analitic (x_1, y_1 şi x_2, y_2 fiind coordonatele celor două puncte) că ecuațiile

$$u\,x_1 + vy_1 + w = 0$$

$$u\,x_2 + vy_2 + w = 0$$

determină totdeauna raporturile dintre cantitățile u, v, w, problemă rezolvabilă prin aritmetică.

În rezumat, orice entitate matematică poate fi definită în mod plural. Definiția unor relații sau proprietăți, făcând să intervină întotdeauna entități matematice, vor fi şi ele capabile să fie definite în mod plural, totul depinzând de elementele definitorii ale acestor entități care intră în joc şi care pot fi alese liber.

1.3 Ce este definiția

Ca şi în alte probleme ştiințifice, ceea ce a constituit dificultatea multor probleme pur logice a fost ataşarea tacită a unui punct de vedere care, fără să o ştim, ne-a îndepărtat de soluție, ridicând noi probleme sau, mai cu seamă, obligându-ne să acceptăm implicit idei eronate.

Concepția platonică a ideilor, discuția interminabilă a Scolasticii asupra naturii conceptelor, au lăsat urme adânci în logică şi chiar în matematică, impunându-ne, fără să fim conştienți, anumite imagini sau o anumită terminologie deficientă. Ceea ce l-a făcut pe Einstein, în *The Meaning of Relativity* (Londra, 1922) să spună: «Sunt convins că filosofii au avut un efect nociv asupra progresului ştiințific, mutând unele concepte fundamentale din domeniul empirismului, unde sunt sub controlul nostru, în intangibilele înălțimi ale aprioricului. Căci, deşi se pare că universul ideilor nu poate fi dedus din experiență prin mijloace logice, ci este, într-un sens, o creație a minții omenești, fără de care nici o știință nu este posibilă, cu toate acestea acest univers al ideilor este tot atât de puțin independent de experiențele noastre, pe cât sunt hainele de forma corpului omenesc».

Să considerăm un concept geometric, de exemplu triunghiul. Este acesta un obiect dat, o entitate dată şi, dacă este, ce înseamnă existența lui? Această întrebare nu este alta decât întrebarea pe care şi-a pus-o Porphyrios în lucrarea sa *Isagogé* şi care a dat loc la întreaga dezbatere medievală asupra naturii conceptelor: «*Prima est quaestia utrum genera ipsa et species vera sint, an in soli intellectibus inaniaque fingantur?*».

Există triunghiul în sine sau numai în mintea noastră, sau are o existență separată sau numai în lucrurile sensibile? Iată-ne în plină metafizică medievală.

Să examinăm însă mai de aproape triunghiul. Să îl definim ca un poligon cu trei laturi. Este evident că nu am definit nici un obiect existent. Să ne legăm de experiență, cum vrea Einstein, de data aceasta de expenența cu entități matematice. Indivizii numiți triunghiuri nu există ca atare numai fiindcă au trei laturi; orice triunghi are trei laturi determinate ca mărime. Triunghiul, ca gen scolastic, are trei laturi variabile, care pot avea fiecare o mărime determinată, dar în definiția generală a triunghiului ele nu au nici o determinare ca mărime. Eu nu pot să îmi închipui triunghiul definit de definiția de mai sus, nu am o imagine determinată pe care să mi-o ofere această definiție. Atunci ce reprezintă conceptul de triunghi? Este el esența comună a tuturor indivizilor numiți triunghiuri, din care inteligența o extrage, dar care nu există decât aristotelic prin şi în indivizi?

Dacă admitem că noțiunea generală de triunghi reprezintă o entitate geometrică în sine, am intrat în problema filosofică pe care, chiar dacă nu o punem explicit, stă însă la baza concepțiilor noastre despre natura entităților geometrice.

Să privim însă problema din punctul de vedere al geometriei. Definiția de mai sus introduce trei variabile: laturile triunghiului. Fie acestea x, y, z. Definiția noastră se enunță astfel: Un triunghi este un poligon cu trei laturi x, y, z.

Pe de altă parte, un poligon se defineşte în general ca fiind figura plană cu m (variabil) laturi.

Să notăm entitatea pe care o urmărim, anume triunghiul, cu T; să notăm poligonul cu m laturi cu P_m; să notăm laturile variabile cu x, y, z. Se vede că singura determinare este m = 3. Vom putea spune: T este P_3 cu laturile variabile (x, y, z). Însă P_3 poartă numele de triunghi (P_3 = T). Ceea ce arată că T este o funcție care depinde de x, y, z. Să scriem astfel:

$$(1)\quad T = P_3(x, y, z).$$

La fiecare grup de 3 valori pe care le iau x, y, *z*, avem un triunghi bine determinat. De pildă, pentru valorile $x = a_0$, $y = b_0$, $z = c_0$, avem un triunghi perfect determinat: $T = P_3(a_0, b_0, c_0)$. *Aşadar, entitatea T este o variabilă*. Mai mult, T este o variaibilă dependentă, adică o funcție. Funcția data este P_3.

Să vedem acum diversele determinări pe care le poate lua această funcție. Să presupunem că dăm o valoare determinată pentru x, fie aceasta x = a; funcția (1) devine:

$$T = P_3(a, y, z).$$

Şi aceasta este o funcție, fiindcă depinde de două variabile, y şi z. Să o traducem: T reprezintă toate triunghiurile care au o latură dată a, iar celelalte laturi sunt variabile. Aşadar, T este şi în acest caz o variabilă-funcție, şi *nu există o imagine reprezentativă a ei tocmai fiindcă este o variabilă*.

De fapt, am desprins din grupul tuturor triunghiurilor posibile, reprezentat de funcția (1), clasa tuturor triunghiurilor reprezentate de $T = P_3(a, y, z)$ cu aceeaşi latură. În acelaşi mod putem să dăm şi lungimea laturii a doua, y= b:

$$T = P_3(a, b, z).$$

Aceasta este tot o funcție, care reprezintă clasa tuturor triunghiurilor care au două laturi date a şi b.

În sfârşit, dacă ne dăm toate laturile, avem de-abia un triunghi determinat. Este însă cazul să remarcăm că, chiar triunghiul perfect determinat, de exemplu, cel cu laturile $x = a_0$, $y = b_0$, $z = c_0$,

$$T = P_3(a_0, b_0, c_0),$$

nu este un individ perfect determinat, fiindcă nu ştim locul lui determinat în plan. Aşadar, T_0 este o clasă de triunghiuri identice, care sunt distribuite pe tot planul. Dacă vrem să avem o determinare precisă a unui individ din clasa aceasta, trebuie să mai introducem un mod relativ de determinare, de exemplu fixând un sistem de axe de coordonate, fie acestea cele carteziene.

În felul acesta, laturile triunghiului devin funcţii de coordonatele vârfurilor şi triunghiul însuşi este o funcţie de funcţie.

$$x = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

$$y = g(\gamma, \delta, \mu, \nu)$$

$$z = h(\mu, \nu, \alpha, \beta)$$

$$T = P_3[f(\alpha, \beta, \gamma, \delta), g(\gamma, \delta, \mu, \nu), h(\mu, \nu, \alpha, \beta)].$$

Pentru a avea chiar triunghiul T_0, desemnat pe plan în poziţia lui respectivă, trebuie să dăm valorile a şase variabile independente. Valorile variabilelor x, y, *z* pot fi alese arbitrar, fiind independente una de alta. Putem alege, de pildă, $x = y + z$;

$$T = P_3(y + z, y, z).$$

Variabila T va reprezenta o clasă de triunghiuri care au o latură egală cu suma celorlalte două. Sau $x^2 = y^2 + z^2$.

$$T = P_3(y^2 + z^2, y, z).$$

În general, putem lua $x = f(y)$, $y = f(z)$ sau oricare altă combinaţie şi vom obţine, prin definiţie, o clasă de triunghiuri cu o particularitate aleasă liber.

Pe scurt, entitatea numită în geometrie triunghi este o variabilă, sau din punct de vedere logic reprezintă o clasă de indivizi determinaţi, sau de clase de indivizi (specii), determinate prin alegerea şi fixarea unui caracter comun în mod liber. De pildă, alegem liber clasa de triunghiuri în care avem relaţia $x = y + z$, etc. Combinaţiile acestea, în număr infinit, stau la dispoziţia noastră, şi din punctul acesta de vedere putem spune că putem defini în mod liber aceste clase. Aşa putem să definim, în mod liber, o clasă de triunghiuri, impunând în mod liber de exemplu, condiţia $x^4 = y^3 + z^2$ etc.

Am dat peste o ecuaţie care ne determină valorile uneia dintre necunoscute în funcţie de celelalte două. Dacă mai impunem liber ca x, y şi z să fie întregi, va trebui să rezolvăm ecuaţia diofantică de mai sus şi vom căpăta toate grupele de trei numere întregi care o verifică. Fiecare dintre aceste grupe va defini un individ, iar clasa lor va fi specia aleasă arbitrar din genul reprezentat de $K = T(x, y, z)$. *Cum o clasă nu e de aceeaşi natură cu indivizii care îi aparţin şi cum aceştia sunt triunghiuri*, *urmează că nici genul şi nici speciile lui*, *pe care le putem defini la infinit în mod liber*, *nu sunt triunghiuri*. Într-adevăr, clasa triunghiurilor echilaterale, de pildă, nu este ea însăşi un triunghi. Aşadar, nici:

$$T = P_3(x, y, z)$$

nici

$$T = P_3(a, y, z)$$

sau

$$T = P_3(a, b, z)$$

sau

$$T = P_3(x^4 = y^3 + z^2, y, z) \text{ etc.}$$

nu reprezintă triunghiuri. Aşadar, definiţia generală a unui triunghi reprezintă o variabilă, şi anume o funcţie de mai multe variabile. Atâta timp cât în această definiţie mai rămâne o variabilă nedeterminată, definiţia nu reprezintă o entitate geometrică, ci o clasă de entităţi geometrice; ea este adică o variabilă din punct de vedere matematic şi o clasă din punct de vedere logic. Evident, putem alege alte elemente pentru definirea funcţiei noastre; putem alege, de exemplu, un unghi cuprins între două laturi sau o latură şi două unghiuri etc. etc.

În aceste alegeri, dificultatea constă în stabilirea faptului dacă elementele sunt suficiente pentru definirea funcţiei noastre. Acelaşi lucru se poate spune despre oricare altă noţiune geometrică.

Fie cercul: definiţia lui este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix, numit centru. C este obiectul definit; funcţia definisantă este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix, funcţie pe care o notăm cu L; raza nu e determinată, fie ea ρ. Atunci avem:

$$C = L(\rho).$$

Se vede că pentru diferite valori ale lui ρ obţinem un cerc. C este o variabilă, şi anume o funcţie ale cărei valori depind de valorile lui ρ; pentru $\rho = a$, avem un cerc, un individ al speciei:

$$C_0 = L(a).$$

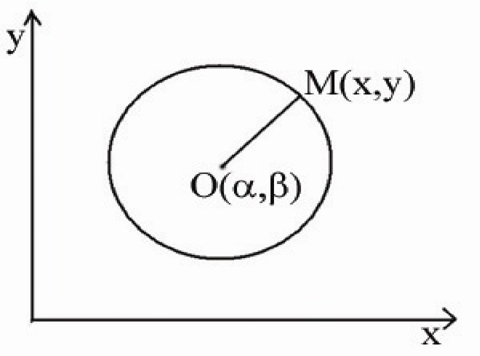
Aşadar, şi aici constatăm că definiţia

$$C = L(\rho)$$

nu defineşte un obiect, ci o variabilă-funcţie, care reprezintă toate tipurile de cerc, adică clasa lor. Clasa tuturor cercurilor nu este însă un cerc, deci definiţia de mai sus nu defineşte un obiect geometric – cercul. Mai putem spune că nici cercul

$$C_0 = L(\rho_0)$$

cu raza determinată nu reprezintă un cerc bine determinat în plan, dacă nu introducem, prin definiţie, şi pozitia lui relativă fie faţă de alte obiecte geometrice date, fie faţă de un sistem de axe carteziene. Poziţia lui va fi definită de poziţia relativă a centrului C_0. Deci, în general, pentru a determina individul geometric C_0, va trebui să dăm valoarea razei, dar şi poziţia relativă a centrului, adică coordonatele acestuia, α şi β. În felul acesta, obiectul nostru e determinat perfect şi atunci distanţa definită de valoarea lui ρ este – în ceea ce priveşte toate poziţiile determinate pe care le poate lua în plan – dependentă de coordonatele centrului. Aşa definim un individ perfect determinat, altfel definim o clasă de indivizi de cercuri identice pentru fiecare valoare particulară a lui ρ. Ceea ce reiese din ecuaţia generală a cercului



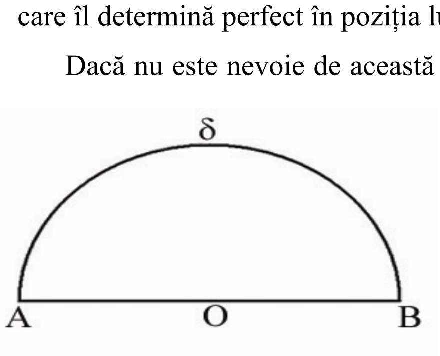
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2.$$

Definiţia generală a funcţiei noastre devine atunci:

$$C = L(\rho) = \rho^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2.$$

Într-adevăr, ρ fiind arbitrar, putem să îi impunem orice condiţie pentru a avea o clasă de cercuri. Am găsit condiţia care determină perfect un cerc şi care este aceea de mai sus, condiţie care îl determină perfect în poziţia lui din plan.

Dacă nu este nevoie de această poziţie relativă, atunci definiţia C = L(ρ) este suficientă pentru determinarea tuturor categoriilor de indivizi numiţi cerc.



Nu numai natura unei figuri geometrice intervine deseori în geometrie, ci şi poziţia relativă a ei. Fie, de pildă, definiţia dreptei: linia dreaptă este drumul cel mai scurt între două puncte. Această definiţie face să intervină diversele linii pe care le putem duce între două puncte şi dintre ele o alegem pe cea mai scurtă. Aşadar, o linie, în general, este un drum între două puncte A şi B. Definiţia liniei drepte arată că am pus în evidenţă distanţa între A şi B pe linia normală.

Aşadar, putem spune că definiția noastră generală face să depindă o linie care trece prin A şi B de lungimea ei. În acest caz, o curbă oarecare va fi definită după lungimea δ a distanței dintre A şi B. Să notăm curba cu C_r, noțiunea de drum (distanța) cu Dis, iar mărimea acestei distanțe, cu D. Avem definiția generală în modul acesta:

$$C_r = \mathrm{Dis}(\delta).$$

Pentru δ minim, obținem definiția dreptei:

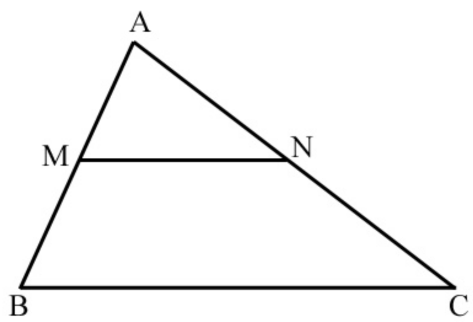
$$D = \mathrm{Dis}(\delta = \text{minimum}).$$

Pentru a putea face lucrul acesta, ar trebui să găsim o expresie generală a distanței pe o curbă între două puncte A şi B şi să îi determinăm minimul.

Vom vedea că definiția liniei drepte nu este o definiție completă şi din această cauză aceasta este mult mai generală, neputând fi legată de plan decât în intuiția noastră.

Eykleidos defineşte linia dreaptă ca fiind identică cu ea însăşi, oricare ar fi poziția ei. Această definiție nu este nici ea mai bună (ea este o definiție *idem per idem*), fiindcă orice figură este identică cu ea însăşi în orice poziție s-ar găsi.

Să identificăm însă o dreaptă pe plan ca individ. Acest lucru îl putem face fie introducând nişte axe de coordonate, fie raportând-o la o figură dată şi definindu-i poziția față de această figură.



De exemplu, dacă avem definit dinainte un triunghi, dreapta MN poate fi definită fixând un punct pe una din laturi, de pildă punctul M pe AB şi un alt punct N pe AC (punctele M şi N fiind în prealabil bine definite în poziția lor). Sau încă se mai pot da punctul M şi direcția dreptei MN – de exemplu, paralela la latura BC. De fiecare dată definim o dreaptă determinată, un individ. Se poate întâmpla să avem numai o singură determinare pentru dreaptă: de pildă, că trece prin punctul M. Cum un punct nu determină o dreaptă prin definiție, urmează că am definit o clasă de drepte. Geometrii sunt obişnuiți să spună că dreptele acestea au proprietatea de a trece prin punctul M. Dar aici intervine o altă definiție: dreapta este determinată de două puncte. Pentru a determina individul rezultat dintr-o astfel de definiție, va trebui să dăm poziția fixă a două puncte. Cum acestea sunt variabile, vom putea spune că dreapta (D) este funcție de pozițiile a două puncte care o determină (notând poziția cu P şi punctele nedeterminate cu M şi N):

$$D = P\,(M, N).$$

Se vede că definiția aceasta conține două variabile în care, pentru a ne conduce la un individ determinat, trebuie să înlocuim variabilele cu constante.

Pe scurt, definiția de mai sus este o funcție de două variabile, iar D nu este o dreaptă, ci o variabilă (o funcție), din punct de vedere matematic, şi o clasă din punct de vedere logic. Evident, cum am mai spus mai sus, cele două elemente definitorii variabile M şi N puteau fi alese şi altfel: de exemplu, un punct şi o direcție etc.

Acelaşi lucru se poate spune despre orice obiect matematic.

În general, un concept K va fi definit de o funcție Ψ de una sau mai multe variabile:

$$K = \Psi(x, y, z...).$$

K nu reprezentă un obiect, ci o variabilă (sau o clasă), anume o funcție care depinde de una sau mai multe variabile. Pentru fiecare valoare constantă a lui Ψ şi pentru valorile constante ale lui x, y, z... vom obține un obiect determinat:

$$K_0 = \Psi_0(x_0, y_0, z_0...).$$

Dacă numai una dintre variabile nu e determinată, nu avem un obiect matematic, ci o clasă.

Un concept matematic este o variabilă, *o funcţie de alte variabile*, *care pot fi independente sau ele însele funcţii de alte variabile*. În el însuşi, el nu reprezintă schema generală a obiectelor, nici «arhetipul» obiectelor care intră în joc, care ar exista în cerul lui Platonos, sau ar fi esenţa tuturor indivizilor, sau ar exista numai în intelectul nostru, care îl formează prin extragerea caracterelor comune. *Definiţia unui concept nu este decât construcţia unei funcţii*.

Elipsa este locul geometric al punctelor care au constantă suma distanţelor la două puncte date (focare). Fie E elipsa, L locul geometric astfel definit, F, F' focarele variabile, S suma constantă a distanţelor:

$$E = L(F, F', S).$$

Evident, variabilele F, F' şi S pot fi exprimate în diverse moduri. Locul punctelor al căror produs al distanţelor la două puncte fixe este constant este o curbă, numită curba lui Cassini. Dacă procedăm ca mai înainte, putem scrie:

Curba lui Cassini = L(MF, MF', p).

Dacă în această definiţie luăm în mod liber produsul p egal cu pătratul sumei distanţelor la punctele fixe, avem lemniscata lui Bernoulli:

Lemniscata = $L[MF, MF', p = (MF + MF')^2]$.

Se vede că oricare ar fi definiţia pe care o reprezintă o funcţie, obiectul matematic definit de aceasta este o variabilă dependentă.

De aceea Wittgenstein, examinând noţiunea de număr, a conchis că numărul este o variabilă. Într-adevăr, oricare ar fi definiţia numărului – a oricărui număr –, ea va fi generală, deci ea va reprezenta o variabilă susceptibilă să devină de fiecare dată, când determinările fixate de definiţie sunt date, un număr cu adevărat.

Se vede astfel că afirmaţia făcută la începutul acestui paragraf este ilustrată de exemplele de mai sus care arată că, în concepţia obişnuită, se atribuie definiţiei un caracter filosofic, făcând-o capabilă să definească un arhetip de triunghi, de cerc, de elipsă, de curbă a lui Cassini etc. etc., indiferent de concepţia, mai mult sau mai puţin definită, care stă la baza acestei imagini vagi şi indefinite pe care o sugerează.

În matematici s-au impus noţiunile de variabilă şi cea de funcţie, care au făcut de la început posibil progresul extraordinar al acestei ştiinţe; noţiunile de variabilă şi de funcţie au fost introduse prin însăşi natura definiţiilor, deşi matematicienii nu au avut o idee clară despre lucrul acesta.

Întreaga matematică lucrează cu funcţii, cu variabile, şi acest fapt explică generalitatea rezultatelor ei. Dar chiar în realitatea familiară, conceptul nu poate fi privit decât tot ca o funcţie, iar din punct de vedere logic, ca o funcţie propoziţională.

«O funcţie propoziţională – scrie Russell în *Introduction à la philosophie mathématique* – este de fapt o expresie care conţine unul sau mai mulţi constituenţi nedeterminaţi, astfel încât, atunci când valorile lor sunt date, expresia devine o propoziţie».... «Este un vas destinat să primească o semnificaţie, dar nu ceva care reprezintă deja o semnificaţie». Definiţiile generale sunt astfel de funcţii propoziţionale şi de aceea nu reprezintă ceva semnificativ, nici un obiect şi nici arhetipul unei categorii de obiecte. Rezultă dar că prin funcţii propoziţionale nu se pot defini decât genurile şi speciile, dacă e vorba să apelăm la noţiunile logicii clasice, şi aici suntem de acord cu Goblot când acesta scrie în *Traité de logique*: «*On ne définit que des espèces*».

Definiţia unui individ este o propoziţie (nu o funcţie propoziţională), care rezultă dintr-o definiţie generală, prin înlocuirea tuturor variabilelor prin constante date. Este imposibil să definim un individ prin genuri şi specii, fiindcă atunci l-am defini prin funcţii propoziţionale, adică nu l-am identifica. De aceea, definiţia animalului *Paca* ca fiind un mamifer rozător nu ne spune nimic despre acest animal, ea nu poate să îl identifice, deoarece nu intră în joc decât genul (mamifer) şi specia (rozător); am încerca să definim astfel un individ (*Paca*) printr-o funcţie propoziţională, ceea ce nu are nici un înţeles. Toţi *Paca* la un loc formează o clasă, dacă vreţi, de indivizi identici, răspândiţi în mod variabil în spaţiu, aşa cum triunghiul cu laturile determinate – fie acestea a, b, c – reprezintă un individ nedeterminat în poziţia lui în spaţiu şi, dacă introducem această nouă determinare, putem spune că ea reprezintă o clasă de indivizi identici.

În rezumat, ceea ce se numeşte definiţia unui individ este o propoziţie care rezultă din înlocuirea variabilelor prin constante într-o funcţie propoziţională, care e o definiţie generală, dar această propoziţie nu mai este o definiţie. Acum ne putem da seama mai bine de ce este posibil ca să avem mai multe definiţii pentru aceeaşi entitate matematică.

Mai întâi, variabilele independente pot fi alese liber, ca atare ele fiind obligate să fie legate permanent de entitatea care trebuie definită. Aceasta se poate observa pe un caz oarecare. Să luăm cazul unui triunghi. El are trei laturi şi poate fi definit şi construit dacă dăm lungimea acestor laturi. Definiţia generală a variabilei triunghi (funcţia respectivă) a fost făcută cu laturile x, y, z:

$$T = P_3(x, y, z).$$

Dacă luăm un triunghi dat şi introducem prin definiţie noţiunea de unghi, atunci variabila T poate fi definită ca un unghi variabil având două laturi variabile care îl cuprind:

$$T = P_3(A, y, z).$$

Sau încă putem defini variabila T cu două unghiuri variabile A şi B şi latura adiacentă z:

$$T = P_3(A, B, z).$$

Avem posibilitatea să fixăm în mod infinit un individ T_0 prin diverse elemente definitorii care apoi, fiind luate ca variabile, vor intra în constituirea funcţiei propoziţionale definitorii. Toate aceste definiţii sunt echivalente, definind aceeaşi variabilă T.

$$P_3(x, y, z) = P_3(A, y, z) = P_3(A, B, z) = ...$$

Să considerăm cercul. Elementul definitoriu fiind raza, avem:

$$C = L(\rho).$$

Dar îl mai putem defini ca elipsa cu focarele confundate sau ca locul geometric rezultat din diverse probleme, unde elementele definitorii sunt altele.

Astfel, în general, pentru un concept K, se pot găsi în mod nelimitat elemente definitorii considerate ca variabile. Toate aceste definiţii vor fi echivalente, fiindcă reprezintă acelaşi concept matematic.

Aşadar, pentru K putem avea, în general, o serie de definiţii:

$$K = \Psi_1(x, y, z, ...)$$

$$K = \Psi_2(\alpha, \beta, \gamma, ...)$$

$$K = \Psi_3(\mu, \nu, \xi ,...).$$

Se obţin astfel funcţii propoziţionale echivalente, fiindcă definesc aceeaşi entitate matematică:

$$K = \Psi_1(x, y, z, ...) \equiv \Psi_2(\alpha, \beta, \gamma, ...) \equiv \Psi_3(\mu, \nu, \xi ,...) \equiv ...$$

Fiind dată o definiţie generală a unui concept matematic $K = \Psi(x, y, z, ...)$, dacă se acordă uneia sau unora dintre variabile o valoare constantă, avem definiţia unei clase particularizate a lui K; aceasta se obţine în definiţia generală prin substituirea variabilelor cu valori constante sau a particularizării acestor variabile:

$$K' = \Psi(a, y, z, ...)$$

$$K'' = \Psi(x^2 + y^2, y, z, ...)$$

$$K''' = \Psi[f(y), y, z,...].$$

Aceste funcţii propoziţionale reprezintă echivalenţe parţiale cu definiţia K, fiindcă nici unul dintre conceptele K', K'', K''' etc. nu este egal cu K, luat în totalitatea lui şi, desigur, la acest lucru s-a gândit Leibniz când a vorbit despre echivalenţe totale şi echivalenţe parţiale. În primul caz, al echivalenţelor totale, toate definiţiile unei aceeaşi variabile matematice K sunt substituibile fără nici o restricţie una în locul celeilalte; în cazul al doilea, al echivalenţelor parţiale, substituţia este valabilă, dar restrânsă la particularitatea impusă de definiţia care cuprinde acea particularitate.

Constatăm astfel că avem două libertăţi în a defini:

1. Libertatea de a alege elementele definitorii variabile.

2. Libertatea de a impune condiţii arbitrare acestor elemente definitorii, cum a fost faptul că $x^2 = y^2 + z^2$ etc. În cazul acesta, definiţia ne oferă o specie a conceptului K şi trebuie să avem în vedere că astfel definiţia este o particularizare a definiţiei generale.

Echivalenţa subzistă şi în acest caz chiar numai în sfera acestei particularizări.

Se vede că mai cu seamă această a doua libertate definitorie conţine posibilitatea nelimitată de a imagina în mod continuu alte condiţii şi particularităţi.

Într-adevăr, în expresia

$$K = \Psi(x, y, z, ...)$$

putem alege în mod liber ca variabilele independente x, y, z, ... să fie funcţii oricât de complicate (unele de altele sau de alte variabile):

$$x = f(\alpha, \beta, ...)$$

$$y = g(\lambda, \delta, ...)$$

$$z = h(\mu, \nu...).$$

Astfel, K devine:

$$K = \Psi[f(\alpha, \beta, ...), g(\lambda, \delta,...), h(\mu, \nu...), ...].$$

În această libertate stă bogăţia invenţiei matematice.

2. Concluzii

Ideea că un acelaşi lucru poate fi definit în mai multe moduri i-a frapat pe unii gânditori, fără însă ca aceştia să îi atribuie vreo importanţă, deşi ea este fundamentală în explicarea întregului mecanism al demonstraţiei şi cu aceasta al edificiului matematic.

De altfel, logicianul Edmond Goblot a menţionat lucrul acesta într-un mod clar în al său *Traité de logique*: «Există multe definiţii reale ale unui aceluiaşi concept, toate la fel de caracteristice, toate construite cu ajutorul unui gen şi al unei diferenţe. Există atâtea definiţii câte proprietăţi reciproce are un concept. Cercul poate fi definit ca secţiunea unui cilindru sau a unui con printr-un plan perpendicular pe axă; o elipsă de excentricitate nulă; sau ca locul geometric al punctelor de unde se vede o dreaptă sub un unghi dat; şi în general, orice loc geometric care este un cerc este o definiţie a cercului».

Goblot nu a dat însă nici o importanţă acestui fapt. El afirmă că toate aceste definiţii ale unui aceluiaşi concept sunt logic dependente unele de altele, din care cauză ele pot fi aranjate – într-un singur mod sau în mai multe moduri – într-o ordine, astfel încât fiecare să fie consecinţa acelora care o precedă şi condiţia acelora care o urmează. Există astfel o definiţie *iniţială* sau *esenţială*, care este o definiţie nominală. Ce determină însă această ordine?

Goblot o spune singur: «Diferenţa dintre o teorie penibilă, laborioasă, dificilă şi o teorie simplă, clară, elegantă se datoreşte, în general, alegerii mai mult sau mai puţin fericite a definiţiei iniţiale».

Nu trebuie să intrăm în discuţia pe care o comportă afirmaţiile lui Goblot, anume că prima definiţie este o definiţie esenţială şi nominală; voi semnala numai faptul că, dacă există mai multe moduri de a aranja definiţiile, atunci diverse alte definiţii pot trece în capul teoriilor ca definiţii iniţiale, cu care ocazie ele devin definiţii esenţiale şi nominale. Aşadar, toate definiţiile unui aceluiaşi concept sunt esenţiale şi nominale. Mărturisesc că nu înţeleg prea bine ce vor să spună simultan termenii «esenţială» şi «nominală». Într-adevăr, când Goblot constată că una dintre definițiile cercului este, de exemplu, «locul geometric al punctelor de unde se vede o dreaptă dată sub un unghi dat», el nu observă că propoziția aceasta este o teoremă, adică o propoziție stabilită prin demonstrație.

Fiind dată problema: care este locul punctelor de unde se vede o dreaptă sub un unghi dat, se demonstrează – şi cei care au practicat matematicile cunosc bine acest lucru – printr-o serie de raționamente, că acest loc geometric este un cerc.

Întrebarea care nu s-a ridicat pentru Goblot este însă cum e posibil ca o definiţie să devină o propoziție demonstrată? Aceasta arată două lucruri: că teoremele sunt definiţii şi că natura lor nu este deosebită de natura propozițiilor inițiale. Vom vedea în capitolele următoare ce semnificație are acest fapt.

În general, o teorie pleacă de la definiţii mai simple – şi aici suntem de acord cu Goblot că alegerea definiţiilor iniţiale uşurează şi face simplă o teorie, cu o observație însă: numai în prima parte a a ei. După aceasta însă, lucrurile se complică şi teoria poate deveni foarte laborioasă şi penibilă. Relativitatea alegerii definiţiei iniţiale a unui concept dintr-o serie de definiţii posibile arată că, din punct de vedere teoretic, alegerea este liberă şi numai rațiuni de ordin practic sau metodologic impun alegerea unor definiții simple. Această alegere liberă permite introducerea liberă a unui concept printr-o definiție aleasă liber. Din aceasta libertate derivă bogăția rezultatelor matematice.

Kant menționează, în însemnările lui, această libertate pe care o are matematicianul de a defini când spune: «*Der Mathematicus in seiner Definition sagt*: *sic volo sio jubeo*» (Matematicianul spune în definiția sa: aşa vreau, aşa ordon).

Să rezumăm rezultatele la care am ajuns:

1. O definiție este o funcție de una sau mai multe variabile, iar un obiect matematic este introdus liber printr-o definiție.

2. Această definiție se face în mod liber prin alegerea liberă a unui caracter sau a unei combinații de caractere ataşate obiectului introdus ca gen, caracter (sau combinații de caractere) capabil să individualizeze toate elementele (sau grupe de elemente) prin particularizarea caracterului ales (sau a grupei de caractere);

3. Toate teoremele sunt definiții. Dacă am putea inventa de la început toate caracterele (sau grupul de caractere) definitorii, teoremele ar putea fi enunțate ca definiții, fără să mai fie nevoie de demonstrații. Deoarece validarea unui caracter definitoriu, ca atare, nu se poate face totdeauna de la început, prin examinarea lui directă, dificultatea constând din a ne putea da seama dacă acesta este capabil sau nu să fie individualizat pentru fiecare individ al genului caracterizat (sau al unor grupuri de indivizi ale aceluiaşi gen), validarea lui se face pe cale de raționament.

BIBLIOGRAFIE

1. **DUMITRIU, A.:** Mecanismul logic al matematicilor, Editura Academiei Române (1973); Definiție şi existență, în Revue roumaine des sciensces sociales (1967).
2. **EINSTEIN, A.:** The Meaning of Relativity, Ed. Methuen, Londra, 1922.
3. **GOBLOT, ED.:** Traité de logique, Ed. A. Colin, Paris, 1917.
4. **HILBERT, D.:** Grundlagen der Geometrie, în Mathematische Annalen, 1902.
5. **HOBBES, TH.:** Logica, partea I-a, II, 4.
6. **LEIBNIZ, G, W.:** Nouveaux essays sur l'entendement humain, IV, II, 1, Amsterdam, 1765.
7. **LIARD, L.:** Logique, ed. a II-a, Paris, 1888.

8. **PORPHYRIOS:** Eisagogé, I, 3, Ed. Univers enciclopedic, Bucureşti, 2002.
9. **RUSSELL, B.:** Introduction à la philosophie mathématique (trad. franc., Paris, 1928).
10. **SFETCU, P.:** Definiția (I), Revista Română de Informatică şi Automatică, vol. 22, nr. 2, 2002, pp. 49-62.