DEFINIȚII ŞI TEOREME

Paul Sfetcu

psfetcu@yahoo.com

Institutul Național de Cercetare - Dezvoltare în Informatică, ICI, Bucureşti

Rezumat: În acest articol facem o trecere în revistă a faptelor care au dus la criza matematicilor şi apoi la căutarea fundamentelor acestora, prin care se asigură fundamentele ştiințelor. Se evidențiază faptul că definiția nu este unică şi că ea este nervul motor al matematicii, se face printr-o funcție propozițională, care lasă creației intelectuale toată libertatea de mişcare.

Cuvinte cheie: definiție, funcție propozițională, metamatematică, demonstrație.

Abstract: In this article we review the facts that led to the crisis of mathematics and then to the quest of their fundaments, by which the foundation of sciences is found. We point out that the definition is not unique and that it is the dynamical factor of mathematics, allowing the intelectual act of creation all its liberty of movement.

Key words: definition, propositional function, metamathematics, proof.

1. Criza matematicilor

«Aproape că nu există doi matematicieni ale căror idei cu privire la fundamentele ştiinței lor să fie complet de acord», aşa caracterizează Arend Heyting (*Mathematische Grundlagenforschungen. Intuitionismus*, *Beweistheorie*, Springer, Berlin, 1934) divergența dintre pozițiile din filosofia matematicilor. Şi această afirmație este corectă. În mod paradoxal, cercetarea fundamentelor logice ale matematicilor, în loc să asigure bazele lor, le-a slăbit şi a transformat adevărurile lor în convenții arbitrare. Pe de altă parte, matematicile există în toată strălucirea lor, s-au dezvoltat şi continuă să se dezvolte dincolo de ce se spune despre ele, fără să dea atenție la ceea ce Hilbert numeşte «*metamatematica*».

Toate eforturile de a fundamenta, fie prin logică, fie prin filosofie, natura şi bazele matematicilor, s-au lovit de dificultăți de netrecut şi au creat probleme dificile, ba chiar insolubile. Exemple sunt paradoxele logico-matematice, problema indecidabilității (*Unentscheidbarkeit*) descoperită de Kurt Gödel, problema necontradicției unei teorii etc. Aceste fapte au adus matematicile într-o stare de criză, ceea ce a fost recunoscut deschis de către specialişti.

Pentru a preciza lucrurile, vom spune că, de fapt, nu este vorba de o criză a matematicilor, ci despre o criză a metamatematicii. Problemele paradoxale nu se nasc din dezvoltarea corpului de adevăruri matematice, ci numai din faptul că *vorbim despre* aceste adevăruri.

Unii autori cred că pot găsi şi alte «crize» în istoria matematicilor. De exemplu, A. Fraenkel şi J. Bar-Hillel insistă asupra ideii că secolul al XX-lea nu este prima perioadă în care matematicile au suferit o «criză a fundamentelor». Pentru ei, trei mari crize au zguduit matematicile în cursul istoriei.

1. În secolul al V-lea a. Chr., în timpul în care geometria se dezvoltă ca o ştiință deductivă în mod riguros, au apărut două descoperiri paradoxale: (a) prima constată că două entități geometrice de aceeaşi natură nu sunt comensurabile (de exemplu, diagonala pătratului nu poate fi măsurată cu o parte alicotă a laturii lui); (b) cealaltă descoperire este aceea a şcolii eleate, discipolii acestei şcoli – şi în special Zenon –, au construit o serie de paradoxe pentru a demonstra teza nonconstructibilității mărimilor finite cu părți infinit de mici. Această criză a provocat noi cercetări, şi matematicienii greci au obținut ca rezultate două descoperiri excepționale: *Teoria proporțiilor*, aşa cum apare în cărțile 5 şi 10 ale *Elementelor* lui Eykleides; *Metoda exhaustivă*, inventată de Archimedes, care nu este astfel decât precursoarea riguroasă a teoriilor moderne de integrare.

2. Invenţia calculului infinitezimal în secolele al XVII-lea şi al XVIII-lea a condus la o nouă criză, care s-a definit într-un mod precis la începutul secolului al XIX-lea. Matematicienii au acceptat calculul diferenţial şi cel integral aşa cum fuseseră edificate de autorii lui direcţi, Leibniz şi Newton, fără prea multe precauţii logice, bazându-se mai ales pe intuiţie. Utilizarea mărimilor variabile infinitesimale necesita o teorie riguroasă a limitelor, care nu exista. Această teorie a fost elaborată de Cauchy, după care Weierstrass, a arătat că se poate «aritmetiza» analiza, iar apoi H. Poincaré a crezut că, în sfârşit, s-a ajuns în matematici la «o rigoare absolută».

3. A treia criză a matematicilor s-a datorit teoriei mulţimilor, care a condus la contradicţii şi a pus în discuţie însăşi noţiunea de mulţime şi, în consecinţă, pe aceea de număr (care e definită cu ajutorul noţiunii de mulţime).

Tentativele de a depăşi această ultimă criză sunt multiple. Vom atrage atenţia numai asupra faptului că cele trei crize menţionate sunt de natură diferită: în timp ce primele două au în centrul lor descoperiri matematice surprinzătoare, care au frapat spiritul contemporanilor prin caracterul lor insolit, ultima criză are un caracter particular, deoarece ea constă dintr-o încercare de a reconstrui matematicile într-un limbaj nou, care să le asigure fundamentele. Cu alte cuvinte, crizele anterioare au fost depăşite prin consolidarea rezultatelor noi şi «bizare» *în interiorul matematicilor*; noua criză s-a ivit dintr-un *examen metamatematic* al rezultatelor extraordinare obţinute în epoca noastră, prin încercarea de a se consolida matematicile *din afară*, printr-o reconstrucţie artificială a limbajului lor (care nu este acela în care rezultatele au fost obţinute). Se vede astfel că ultima criză a fost provocată de consideraţii metamatematice şi de aceea aceste ştiinţe nu trebuie să se teamă de aceste speculaţii mai mult sau mai puţin filosofice şi prea specific lingvistice.

După ceea ce a părut un veritabil dezastru al matematicilor, determinate de apariţia acestei crize, gânditori de primă importanţă au început să considere mai îndeaproape ceea ce s-a întâmplat. Astfel s-au ridicat unele voci care au pretins că matematicile nu au nevoie deloc de un «fundament». La acest punct de vedere s-a raliat o voce deosebit de autorizată, aceea a lui Hilary Putnam (*Mathematics without Foundations*, «*The Journal of Philosophy*», LXIV, 1967).

El nu crede: 1) că matematicile nu sunt clare; 2) că sunt într-o criză; 3) că au nevoie de «fundamente».

Problemele ale filosofiei matematicilor sunt, pentru Putnam, probleme interne ale ideilor diverşilor constructori de sisteme. «Aceste sisteme – scrie el – sunt interesante, fără îndoială, ca exerciţii intelectuale; dezbaterile provocate de aceste sisteme vor continua desigur, dar diferitele sisteme de filosofie matematică, fără excepţie, nu trebuie să fie luate în serios».

Filosofia matematică, în încercarea ei de a reconstrui ştiinţele matematice în alţi termeni decât în aceia în care au fost create, adică într-un limbaj artificial, s-a îndepărtat de obiectul matematic şi de procesul real matematic, creând probleme care nici nu se pun pe terenul propriu al acestor ştiinţe. O observaţie de natura aceasta a fost făcută de eminentul gânditor Stephan Körner (*On the Relevance of Post-Gödelian Mathematics to Philosophy*, în «Problems in the Philosophy of Mathematics», Amsterdam, 1967), fiindcă el scrie: «Filosofia matematicilor, în măsura în care analizează structura gândirii matematice, poate să intre în conflict cu matematicile, dar şi să piardă contactul cu subiectul ei sau să rămână în urmă în raport cu dezvoltarea lor actuală».

Lăsând de-o parte toate aceste probleme create de filosofia metamatematică, nu este mai puţin adevărat că există realmente lucruri esenţiale în matematici care au nevoie de o explicaţie mai aprofundată (alta decât încercarea de explicaţie metamatematică) privind în principal două probleme: obiectul matematic şi natura lui; mecanismul ratiocinativ real, prin care se progresează efectiv în aceste ştiinţe.

Problemele generale ale matematicilor, considerate în întregul lor, sunt reduse de A. Mostowski (*The Present Sfate of Investigation on the Foundations of Mathematics*, Polska Akademia Nauk – Instytut Matematyczny, 1955), la următoarele două:

A. Care este natura noțiunilor considerate în matematici? Până la ce punct ele sunt formate de om şi până la ce punct ele sunt impuse din afară şi de unde dobândim cunoaşterea proprietăților lor?

B. Care este natura demonstrației matematice şi care sunt criteriile care ne permit să facem distincția între demonstrațiile corecte şi cele false?

Mostowski adaugă: «Aceste probleme sunt de natură filosofică şi nu putem spera să le rezolvăm în limitele exclusive ale matematicilor şi aplicând numai metode matematice».

Este evident că aceste probleme au dat naştere altor probleme particulare, cum sunt, de exemplu: problemele ridicate de metoda axiomatică, de rolul ei în matematici şi de limitele în care se poate aplica; curentul constructivist în matematici; axiomatizarea logicii; problema deciziei etc.

Fără să intrăm în analiza diverselor concepții care au fost formulate în aceste două probleme, vom spune numai că examenul acestor multiple concepții impune o concluzie surprinzătoare: nu ştim care este natura obiectului matematic şi nu ştim cu exactitate cum procedăm în aceste ştiințe când obținem rezultate extraordinare şi ineluctabile. S-ar părea astfel că Bertrand Russell avea perfectă dreptate când afirma că «matematicile sunt ştiințele în care nu se ştie niciodată despre ce vorbim şi nici dacă ceea ce afirmăm este adevărat».

În ceea ce urmează ne-am propus să urmărim procesul matematic natural, aşa cum se dezvoltă el efectiv în teoriile matematice, şi nu după ce l-am tradus în scheme formale, care se îndepărtează, prin forța lucrurilor, de procesul natural. Analiza noastră nu va fi un examen spectral al teoriilor matematice, ci un examen direct al obiectului matematic şi al procesului deductiv, aşa cum apar m aceste ştiințe.

2. Obiectul matematic

Ca şi în alte probleme ştiințifice, ceea ce a constituit dificultatea unor probleme matematice a fost faptul de a le ataşa tacit şi involuntar un punct de vedere filosofic care a introdus, implicit, fără a o şti, idei străine şi chiar inutile. Concepții mai vechi sau mai noi, dezbătute de-a lungul timpului, au lăsat urme adânci în matematici sau în logică, impunând matematicienilor, fără ca ei să fie conştienți de aceasta, unele imagini sau o anumită terminologie deficitară. «Sunt convins – scrie Einstein în acest sens – că filosofii au avut o influență nocivă asupra progresului ştiințific, transferând unele concepte fundamentale din domeniul empiric, unde sunt sub controlul nostru, la înălțimile inaccesibile ale lui a priori. Fiindcă, deşi se pare că universul ideilor nu poate fi dedus din experiență prin mijloace logice, ci este, într-un sens, o creație a intelectului uman fără de care nu e posibilă ştiința, totuşi acest univers al ideilor este tot atât de puțin independent de experiențele noastre pe cât sunt veşmintele noastre de forma corpului uman» (The Meaning of Relativity, Ed. Methuen, Londra, 1922).

Această observație rămâne adevărată şi în matematici. Să considerăm, de exemplu, un obiect matematic geometric şi anume un triunghi. Este acesta un obiect dat, o «entitate» determinată şi, în caz afirmativ, ce înseamnă existența lui? A pune problema în modul acesta, înseamnă a pune problema în mod eronat. Într-adevăr, problema este, de fapt, aceea pusă de Porphyrios în Isagogé şi ştim că ea a dat naştere la ampla dezbatere din Evul Mediu asupra naturii conceptelor generale: «Prima est quaestio utrum genera ipsa et species vera sint, an in solis intellectibus inaniaque fingantur». Această problemă pusă cu privire la triunghi ia forma: triunghiul există în sine sau numai în intelectul nostru, are el o existență separată sau există numai în lucrurile sensibile?

Dar un lucru este sigur: fie că dăm un răspuns sau altul – sau chiar dacă nu putem da nici un răspuns – ştiințele matematice îşi continuă progresul lor triumfal şi obțin rezultate remarcabile. Ceea ce dovedeşte, într-un chip indiscutabil, că soluția problemei puse de Porphyrios nu influențează cu nimic dezvoltarea matematicilor, ba mai mult, că aceste ştiințe sunt independente de o soluție posibilă a acestei probleme.

Să examinăm mai de-aproape triunghiul. Să îl definim ca un poligon cu trei laturi. Este clar că nu am definit nici un obiect. Să legăm ideile noastre de experiență, cum o indică Einstein, de data aceasta de experiența cu obiecte matematice. Entitatea numită «triunghi» nu există ca atare. Orice triunghi are trei laturi, bine determinate ca mărimi. Triunghiul, ca gen scolastic, are trei laturi variabile, care pot lua, fiecare, o mărime determinată, dar în definiția generală a triunghiului ele nu au nici o determinare a mărimii lor. Nu îmi pot imagina triunghiul definit prin definiția dată mai sus (poligon cu trei laturi), nu am o imagine, o figură determinată oferită de această definiție. Atunci ce avem prin această definiție, ce reprezintă conceptul de triunghi în mod efectiv în procesul matematic?

Să considerăm problema degajată de orice punct de vedere filosofic (care, după cum am spus, nu intră în nici un fel în procesul matematic). Definiția citată introduce trei variabile: laturile triunghiului. Fie aceste variabile x, y, z. Definiția noastră se enunță în modul următor: «Un triunghi este un poligon cu trei laturi variabile x, y, z». Pe de altă parte, un poligon este definit ca o figură plană cu n laturi variabile. Să notăm deci entitatea matematică pe care o urmărim – triunghiul –, cu T; să notăm poligonul cu n laturi Pn; pentru T singura determinare este numărul variabilelor, n = 3. Putem spune deci: T este Pn unde n = 3, adică cu trei laturi variabile x, y, z. Dar P_3 poartă numele de triunghi: P_3 = T. Aceasta arată că T este o funcție care depinde de x, y, z. Să scriem acest rezultat astfel:

$$T = P_3(x, y, z). \tag{1}$$

Pentru fiecare grupă de trei valori luate pentru variabilele x, y, z, avem în mod real un triunghi determinat. De exemplu, pentru valorile determinate $x = a_0$, $y = b_0$, $z = c_0$,

$$T = P_3(a_0, b_0, c_0).$$

Prin urmare, entitatea T este o variabilă, anume o variabilă dependentă, adică o funcție. Funcția dată este P_3.

Să vedem acum diversele determinări pe care le poate lua această funcție. Să presupunem că lui x i se dă o valoare determinată, $x = a_0$. Funcția (1) devine:

$$T = P_3(a_0, y, z).$$

Aceasta este tot o funcție, pentru că depinde de două variabile. Să o traducem: T reprezintă toate triunghiurile care au o aceeaşi latură dată şi celelalte două (y şi z) sunt variabile. Deci T este, şi în acest caz, o variabilă-funcție şi nu există o imagine geometrică reprezentativă a acestei entități matematice, *tocmai fiindcă ea este o variabilă*. Ce am făcut în fond? Am detaşat din mulțimea tuturor triunghiurilor posibile, reprezentată de valorile funcției (1), submulțimea tuturor triughiurilor reprezentată de $T = P_3(a_0, y, z)$ de aceeaşi latură. În acelaşi mod, ne putem da mărimea celei de a doua laturi, $y = b_0$:

$$T = P_3(a_0, b_0, z).$$

Şi în acest caz nu avem un tnunghi, ci o funcție ale cărei valori formează mulțimea tuturor triunghiurilor posibile care au două laturi date, a_0 şi b_0. În sfîrşit, dacă dăm toate laturile, obținem, într-adevăr un triunghi. Este cazul să observăm că având chiar triunghiul ale cărui laturi sunt perfect determinate,

$$T = P_3(a_0, b_0, c_0),$$

nu este un individ perfect determinat, ci numai mulțimea tuturor triunghiurilor de laturi egale. Dacă vrem să determinăm unul dintre aceşti indivizi, va trebui să introducem un mod relativ de determinare, de exemplu, un sistem de axe de coordonate cartesiene. Laturile triunghiului vor deveni funcții de coordonatele vârfurilor, câte două de fiecare vârf şi, când se vor da aceste variabile, acest triunghi va fi reprezentat în plan în mod complet determinat.

În general, putem lua laturile x, y, z, ca funcţii de alte variabile şi să obţinem clase (mulţimi de triunghiuri) după funcţiile alese pentru coordonate.

Pe scurt, entitatea numită în geometrie «triunghi» este o variabilă-funcţie şi, din punct de vedere logico-matematic, valorile ei posibile (determinate chiar de definiţia ei generală sau particularizată) reprezintă o mulţime (clasă) de indivizi determinaţi sau nedeterminaţi (variabili), după cum s-au dat toate determinările sau numai unele.

Dar cum o mulţime (*sau clasă*) *nu poate fi de aceeaşi natură cu elementele care îi aparţin ca membri*, *rezultă că nici genul triunghi*, *nici speciile lui* (*obţinute prin determinări parţiale*), *pe care le putem defini la infinit într-un mod liber*, *nu sunt triunghiuri*.

Clasa triunghiurilor echilaterale nu este ea însăşi un triunghi.

Prin urmare, definiţiile:

$$T = P_3(x, y, z).$$

sau

$$T = P_3(\mathrm{a}_0, y, z).$$

sau

$$T = P_3(\mathrm{a}_0, \mathrm{b}_0, z).$$

sau

$$T = P_3(x^2 + y^2, y, z) \text{ etc.},$$

nu reprezintă triunghiuri.

Definiţia generală a «triunghiului» nu reprezintă deci decât o variabilă, anume o funcţie de mai multe variabile. Cât timp în această definiţie rămâne un element variabil, definiţia nu reprezintă o entitate geometrică, ci o variabilă, ale cărei valori posibile, indicate de definiţie, formează o mulţime (clasă) de mulţimi; şi se poate spune acelaşi lucru despre orice «obiect» matematic.

În general, un «obiect» matematic K va fi definit de o funcţie de mai multe variabile:

$$K = \psi(x, y, z, ...).$$

K nu reprezintă un obiect, ci o variabilă dependentă, o funcţie, ale cărei valori posibile constituie o mulţime sau clasă. Pentru toate valorile constante ale variabilelor, se obţine un individ determinat (ca mărime, dar nu ca localizare):

$$K_0 = \psi_0(x_0, y_0, z_0, ...).$$

Dacă o singură variabilă nu este determinată, atunci rezultatul substituţiilor nu este un «obiect», ci o funcţie particularizată.

Putem trage concluzia: *Un concept matematic este o variabilă*, *funcţie de alte variabile*, *care pot fi independente sau ele însele funcţii de alte variabile*. În el însuşi, conceptul nu reprezintă schema generală a obiectelor sau «arhetipul» obiectelor care intră în joc (care ar exista în cerul lui Platon) sau care ar fi esenţa comună a tuturor indivizilor, sau care ar exista numai în intelectul nostru, şi pe care intelectul l-ar forma prin extragerea caracterelor comune. *Definiţia unui concept matematic nu este altceva decât construcţia unei funcţii*. De aceea Ludwig Wittgenstein, în *Tractatus logico-philosophicus* (prop. 6.922), examinând noţiunea de număr, a conchis că «numărul este o variabilă» (*Der Zahlbegriff ist die variable Zahl*). Într-adevăr, oricare ar fi definiţia numărului, ea trebuie să fie generală, adică a oricărui număr natural posibil, deci ea trebuie să reprezinte o variabilă, care devine, de fiecare dată când se dau determinările fixate de definiţie, un număr dat. Dar o asemenea definiţie nu a fost încă găsită, tocmai fiindcă, după cum am văzut, ea a fost căutată pe căi mai mult filosofice. Nu vrem să spunem că cercetările filosofice asupra matematicilor nu sunt legitime, ci dimpotrivă. Dar amestecând explicaţiile filosofice în procesul matematic nu s-a ajuns să se explice nimic.

În matematici s-a impus, de la început, noţiunea de variabilă şi de funcţie şi această idee a făcut posibil imensul progres al acestor ştiinţe; noţiunile de variabilă şi de funcţie au fost introduse prin chiar natura caracterului general al definiţiilor, cu toate că matematicienii nu au avut o idee clară şi explicită de la începutul matematicilor. Dar chiar în realitatea familiară, conceptul este privit ca o funcţie, din punct de vedere logic, ca o funcţie propoziţională care îl defineşte. «O funcţie propoziţională – scrie Bertrand Russel, (*Introduction to Mathematical Philosophy*, Paris, 1926) – este o expresie care conţine unul sau mai mulţi constituenţi nedeterminaţi, aşa că, dacă valorile lor sunt date, expresia devine o propoziţie [...]. Este un vas destinat să primească o semnificaţie, dar nu ceva care are deja o semnificaţie». Definiţiile generale sunt astfel de funcţii propoziţionale şi de aceea ele nu reprezintă ceva semnificativ, nici un obiect, nici arhetipul unei categorii de obiecte.

Rezultă din cele spuse că nu pot fi definite decât genurile şi speciile prin funcţii propoziţionale, dacă apelăm la noţiuni ale logicii tradiţionale. Şi aici suntem total de acord cu Goblot când scrie: «*on ne définit que des espèces*» (*Traité de logique*, Ed. A. Colin, ed. a VI-a, Paris, 1937.

Enunţul prin care un individ este determinat este o propoziţie (şi nu o funcţie propoziţională), care rezultă dintr-o funcţie prin înlocuirea tuturor variabilelor prin constante.

3. Importanţa definiţiilor în matematici

Am văzut că obiectul matematic este o funcţie care este introdusă prin definiţie.

Importanţa definiţiilor nu a scăpat matematicienilor şi logicienilor. Fără a intra în metafizica lui Aristoteles, ci examinând doar rolul pur logic al definiţiilor în demonstraţii, putem spune că definiţia este pentru marele Stagyrit nervul motor al ştiinţei apodictice. Într-adevăr, el scrie textual (*Analiticele secunde*, I, 8, 75 b): «O definiţie este sau un principiu sau o demonstraţie care diferă numai prin ordinea termenilor». O demonstraţie începe printr-o definiţie şi se sfârşeşte printr-o definiţie, dar nu este numai atât; diferenţa dintre definiţie şi demonstraţie este de altfel pusă în evidenţă de însuşi Aristoteles. Iată ce scrie el (II, 3, 90 b): «Motivul pentru care există o diferenţă între demonstraţie şi definiţie este că a avea o cunoaştere a demonstraţiei este identic cu faptul de a poseda o demonstraţie; de aceea urmează că, dacă demonstraţia unei concluzii este posibilă, este evident că nu poate exista o definiţie pentru ea. Dacă ar fi altfel, am putea avea o concluzie de natura aceasta în virtutea definiţiei ei, fără demonstraţie; deoarece nimic nu ne împiedică de a avea una fără cealaltă. Este evident atunci că nu se poate defini tot ceea ce poate fi demonstrat». Dar Aristoteles ne spune că, invers, nici tot ceea ce poate fi definit nu poate fi şi demonstrat. Argumentarea lui este următoarea: «Principiile demonstraţiei sunt definiţiile şi s-a dovedit anterior că acestea [principiile] sunt nedemonstrabile; astfel sau principiile sunt demonstrabile şi vor depinde atunci de principii anterioare şi regresul va merge la infinit; sau primele principii vor fi definiţii indemonstrabile» (II, 3, 98 b).

În rezumat, ştiinţa apodictică se bazează în întregime, la Aristoteles, pe aceste două idei:

1. Definiţiile sunt principiile demonstraţiei şi sunt nedemonstrabile prin natura lor.

2. Demonstraţia şi definiţia nu sunt identice.

Această diferenţă dintre demonstraţie şi definiţie este explicată de Stagyrit în modul următor: definiţia ne arată ce este un lucru, dar nu îl explică; explicaţia aparţine demonstraţiei.

Dacă vom considera acum mecanismul demonstrativ la Aristoteles, vom vedea că problema cea mai importantă pentru construcţia unui silogism este termenul mediu. Acesta era privit de el ca fiind cauza determinantă a concluziei şi întreaga ştiinţă apodictică se bazează pe determinarea termenului mediu, determinare care este o definiţie. Definiţia este astfel expresia conceptului creator – a esenţei –, şi prin ea ştiinţa apodictică îşi atinge scopul (*Metaphysica*, V, 1017 b, 22).

Ştiinţa definiţiei este mult mai mult decât partea formală a silogismului; silogismul – este adevărat – este agentul definiţiei, căci cu ajutorul lui şi prin el se pot forma definiţii; dar funcţia silogismului – şi prin urmare a ştiinţei demonstrative –, este, din punct de vedere ontologic, definiţia. Silogismul serveşte definiţia şi, pe de altă parte, definiţia este, în ultima analiză, punctul de plecare al silogismului.

Fără a putea face aici o istorie a problemei raportului dintre definiţie şi demonstraţie, vom mai menţiona concepţia lui Leibniz. Pentru autorul calculului infinitezimal, sarcina ştiinţei constă din: 1) analiza conceptelor; 2) analiza adevărurilor. Conceptele sunt compuse din elemente simple, şi reducerea conceptului la elementele lui simple ne permite să îi construim o definiţie perfectă. Această teză este dezvoltată de Leibniz în *De arte combinatoria*. Pentru el, dificultatea constă în găsirea elementelor simple din care se compune un concept. Pentru a răspunde la o observaţie făcută de Pascal (*De l'esprit géometrique*) –anume că «nu se poate demonstra nimic dacă trebuie să urcăm din principiu în principiu fără a găsi niciodată primul principiu» –, Leibniz arată că în orice propoziţie adevărată predicatul trebuie să fie conţinut în subiect. În felul acesta, pentru a ne asigura de adevărul unei propoziţii, nu este necesar să descompunem complet subiectul şi predicatul, descompunere pe care Pascal nega că ar fi total posibilă; e de-ajuns să se constate că subiectul conţine ca factor predicatul, ceea ce se poate face de la început (Leibniz făcuse o «aritmetizare» a conceptelor). Prin urmare, chiar dacă analiza conceptelor nu poate fi urmărită într-o manieră completă, demonstraţia nu rămâne mai puţin posibilă şi fructuoasă.

Astfel, analiza se aplică noţiunilor şi propoziţiilor. Analiza conceptelor este definiţia, analiza propoziţiilor – sau a adevărurilor exprimate de ele – este demonstraţia lor. De aceea Leibniz înlocuieşte toate regulile lui Descartes prin una singură: «Să nu se admită nici un cuvânt fără definiţie şi nici o propoziţie fără demonstraţie». Dar demonstraţia se reduce, în fond, la descoperirea incluziunii predicatului în subiect, deci la analiza termenilor, care se face printr-o definiţie. Astfel, demonstraţia se reduce, până la urmă, la analiza conceptelor, deci la definiţie. De unde teza lui Leibniz: «Demonstraţia este un lanţ de definiţii» – *demonstratio est catena definitionum*.

Această teză este aceeaşi cu teza lui Thomas Hobbes (dacă se face abstracţie de ideile filosofice adiacente, care nu schimbă cu nimic partea pur logico-formală a teoriilor lui Leibniz şi Hobbes). Pentru autorul lucrării *Leviathan*, ştiinţa demonstrativă pleacă de la câteva propoziţii prime sau principii, dar aceste principii nu sunt altceva decât definiţii, sau cum o spune el însuşi: *Sunt primae autem nihil aliud praeter definitiones*, *vel definitiones partes*, *et hae solae principia demonstrationis sunt* (Thomas Hobbes, *Computatio sive logica*, III, 9). Această idee va găsi continuatori, mai mult sau mai puţin fideli, dar care rămân ataşaţi ideii aristotelice conform căreia nervul motor al oricărei demonstraţii – deci al întregii ştiinţe deductive –, este definiţia. Astfel, H. Poincaré va spune că «axiomele sunt definiţii deghizate».

Credem însă că am arătat suficient importanţa acordată de către unii gânditori foarte mari rolului definiţiei în ştiinţele deductive, pentru a mai fi necesar să mai insistăm.

4. Pluralitatea definiţiilor

Se poate defini unul şi acelaşi obiect prin mai multe definiţii diferite. Această observaţie a fost făcută de unii logicieni fără însă a îi da vreo semnificaţie, cu toate că ea este fundamentală pentru explicația mecanismului logico-matematic. În adevăr, Russell scrie: «Există totdeauna numeroase caracteristici care permit să se definească o clasă. Oamenii pot să fie definiți ca bipezi fără pene, sau ca animale dotate cu rațiune, sau, mai corect, prin trăsăturile prin care Swift l-a descris pe Yahaos» (*Introduction to Mathematical Philosophy*).

Logicianul Edmond Goblot a subliniat această posibilitate într-un mod foarte clar în al său *Traité de logique:* «Există multe definiții reale ale unuia şi aceluiaşi concept, toate la fel de caracteristice, toate construite cu ajutorul unui gen şi al unei diferențe. Există atâtea definiții câte proprietăți reciproce are conceptul. Cercul poate fi definit ca: secțiunea unui cilindru sau a unui con printr-un plan perpendicular pe axă, o elipsă a cărei excentricitate este nulă, sau locul geometric al punctelor de unde se vede o dreaptă dată sub un unghi dat; în general, orice loc geometric care este un cerc este o definiție a cercului» (E. Goblot, *Traité de logique*). Dar Goblot nu a dat nici o importanță faptului. El afirmă că toate aceste definiții ale unuia şi aceluiaşi concept sunt logic dependente unele de altele; de exemplu, fiecare definiție a cercului are un raport logic mai mult sau mai puțin direct cu toate celelalte proprietăți ale cercului şi acestea pot fi deduse, unele ca fiind consecințe, prin demonstrație, altele ca fiind condiții, prin analiză.

Lăsând deoparte alte afirmații ale lui Goblot în legătură cu această problemă, putem considera total surprinzător faptul că un logician de talia lui nu a observat că, dacă un acelaşi obiect poate fi definit în mai multe feluri, dintre care unele definiții sunt teoreme, nu toate propozițiile matematice intră în grupul propozițiilor definite. Într-adevăr, când Goblot afirmă că una din definițiile cercului este, de exemplu, «locul geometric al punctelor de unde se vede o dreaptă dată sub un unghi dat», el nu vede că această propoziție este o teoremă, adică o propoziție stabilită prin demonstrație. Constatarea noastră arată două lucruri: *că teoremele sunt definiții şi că ele nu sunt de natură diferită de natura propozițiilor inițiale*, concluzie acceptată de Leibniz într-un mod general. Într-adevăr, în fruntea teoriilor el a pus definițiile, la care se reduc, în ultimă analiză, toate propozițiile primitive. Arta de a demonstra, adică arta de a obține propoziții adevărate, constă din două procedee: arta de a defini, care este analiza, şi arta de a combina definițiile, care este sinteza. De unde teza lui Leibniz, deja citată, că *demonstrația nu este decât un lanț de definiții* (*Ego semper putavi, demonstrationem nihil aliud esse quam catenam definitionum*, *vel*, *pro definitionibus*, *propositionum jam ante ex definitionibus demonstratarum aut certe asumptarum*. *Analysis autem nihil aliud est quam resolutio definiti in definitionem aut propositionis in suam demonstrationem*).

5. Mecanismul logico-matematic

Teza lui Leibniz poate fi acum complet demonstrată. În adevăr, putem să ne dăm seama, prin considerațiile precedente, pentru ce este posibil, într-un mod teoretic, să avem mai multe definiții pentru acelaşi obiect. Am văzut că definiția este construcția unei funcții propoziționale de una sau mai multe variabile independente. Să reluăm exemplul dat, triunghiul: el are trei laturi. Dacă cele trei laturi sunt date, el poate fi construit. Definiția generală a variabilei «triunghi» (funcția respectivă) cu laturile x, y, z este:

$$T = P_3(x, y, z).$$

Dacă introducem, prin definiție, noțiunea de unghi, atunci variabila T poate fi definită cu unghiul variabil A şi două laturi variabile y şi z:

$$T = P_3(\hat{A}, y, z).$$

Sau încă, putem defini variabilă T cu două unghiuri variabile $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ şi o latură adiacentă:

$$T = P_3(\hat{A}, \hat{B}, z).$$

Avem posibilitatea să fixăm un individ dat T_0 prin unele elemente ale sale în moduri numeroase. Dacă luăm aceste elemente ca variabile, ele vor fi elemente constituente ale funcțiilor definitorii diverse ale variabilei *T.* Dar toate aceste funcții-definiții sunt echivalente, definind aceeaşi variabilă *T.* De exemplu, pentru definițiile «triunghiului», menționate mai sus, avem:

$$T = P_3(x, y, z) = T = P_3(\hat{A}, y, z) = T = P_3(\hat{A}, \hat{B}, z) = ...$$

În general, fie un aşa-zis concept matematic *K*; acesta nu este decât o variabilă, după cum am arătat. Se pot găsi pentru *K* elemente definitorii variabile într-un mod aproape nelimitat. Toate aceste definiții vor fi echivalente, pentru ca reprezintă acelaşi «concept» matematic. Prin urmare, putem avea pentru *K* o serie de definiții:

$$K = \psi_1(x, y, z)$$

$$K = \psi_2(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$K = \psi_3(\mu, \nu, \xi)$$

. . . .

Se obțin astfel diverse funcții propoziționale echivalente, fiindcă reprezintă aceeaşi entitate matematică:

$$\psi_1(x, y, z) = \psi_2(\alpha, \beta, \gamma) = \psi_3(\mu, \nu, \xi) = ...$$

Fiind dată o definiție generală a unui «concept» matematic, $K = \psi_1(x, y, z)$, dacă se acordă uneia sau mai multor variabile o valoare constantă sau o oarecare determinare, obținem o particularizare a lui *K*; această definiție se obține prin substituirea în definiția generală a valorii constante (sau a determinării date variabilei care o particularizează):

$$K' = \psi(a, y, z)$$

$$K'' = \psi(x^2 + y^2, y, z)$$

$$K''' = \psi[f(x), y, z, ...)$$

. . . .

Aceste funcții propoziționale reprezintă echivalențe parțiale în raport cu definiția generală $K = \psi_1(x, y, z)$, fiindcă fiecare din funcțiile *K*' *K*'', *K*''' ... nu este egală cu *K*, luată în totalitatea ei, şi desigur la acest lucru se gândea Leibniz când vorbea de echivalențe totale şi echivalențe parțiale. În primul caz, al echivalențelor totale, definițiile unei aceleiaşi variabile matematice *K* sunt substituibile, fără nici o restricție, una alteia; în al doilea caz, al echivalențelor parțiale, substituția este valabilă de asemenea, dar este restrânsă la particularitatea impusă prin definiția care conține această particularitate.

Constatăm astfel că avem două libertăți de a defini: 1) libertatea de a alege elementele definitorii variabile; 2) libertatea de a impune acestor elemente definitorii anumite condiții arbitrare, ca, de exemplu, faptul ca o variabilă să fie în relație cu celelalte $x^2 = y^2 + z^2$ etc.

În acest din urmă caz, definiția ne oferă o specie a «conceptului» *K* şi trebuie să ținem seama că o astfel de definiție este o particularizare a definiției generale. Echivalența subsistă chiar şi în acest caz, dar numai în sfera acestei particularizări.

Se vede că mai ales această a doua libertate definitorie conține posibilitatea nelimitată de a imagina continuu alte condiții şi prin urmare alte particularizări. În adevăr, în expresia care defineşte

$$K = \psi(x, y, z, ...)$$

putem să alegem în mod liber variabile independente (x, y, z, ...) şi să le impunem, într-un mod liber, obligația de a fi funcții mai mult sau mai puțin complicate ale variabilelor deja date sau ale altor variabile:

$$x = f(\alpha, \beta, ...)$$

$$y = g(\gamma, \delta, ...)$$

$$z = h(\mu, \nu, ...)$$

K devine astfel:

$$K = \psi[\mathrm{f}(\alpha, \beta, ...), \mathrm{y} = \mathrm{g}(\gamma, \delta, ...), \mathrm{z} = \mathrm{h}(\mu, \nu, ...), ...]$$

În această libertate se găseşte întreaga bogăție a invenției matematice. Şi această libertate a fost sesizată de cei mai mari matematicieni. Cantor a spus că «esența matematicilor este libertatea lor». Şi Kant menționa, în notele sale, această libertate pe care o are matematicianul în a defini: «Der Mathematiker in seiner Definition sagt: sic volo, sic jubeo» (Kants gesammelte Schriften, Band XVI, Kants handschriftlicher Nachlass, Herausgegeben von der Königlichen preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, Georg Reiner, 1912).

6. Concluzii

Să rezumăm acum rezultatele obținute mai sus, pe care nu am putut, bineînțeles, decât să le schițăm, în spațiul restrâns al acestui articol.

1. O definiție este o funcție de una sau mai multe variabile şi aşa-numitul «obiect» matematic este o funcție introdusă liber prin definiție.

2. Această definiție este construită liber, prin alegerea liberă a unui caracter sau a unor combinații de caractere, ataşate «obiectului» introdus ca «gen», caracter (sau combinații de caractere) capabil de a individualiza toate elementele (sau grupe de elemente) prin determinarea completă a caracterului sau caracterelor alese.

3. Această libertate nelimitată pe care o avem de a defini o entitate matematică se traduce prin pluralitatea definițiilor unei aceleiaşi entități. Acelaşi «obiect» matematic poate fi definit prin definiții diferite şi seria acestor definiții poate fi privită ca nelimitată.

4. Demonstrația nu face decât să stabilească echivalența acestor diverse definiții ale unui aceluiaşi «obiect» matematic (variabil), sau a elementelor aceluiaşi «obiect», sau încă unele relații între elementele aceluiaşi obiect. Această echivalență este posibilă tocmai pentru că definițiile aceluiaşi «obiect» (sau «obiecte») sunt echivalente.

5. Toate teoremele sunt definiții. Dacă am putea inventa de la început toate caracterele (sau grupele de caractere) definitorii, teoremele ar putea fi enunțate ca definiții, fără a mai avea nevoie de demonstrație. Dar fiindcă validarea unui caracter sau a caracterelor definitorii, ca atare, nu poate fi efectuată printr-un examen direct (dificultatea constă mai ales în faptul că nu ne putem da seama, de la început, dacă un caracter ales poate fi individualizat sau nu pentru fiecare individ al genului caracterizat), atunci această validare se face pe cale de raționament.

*

Credem că am putut da un răspuns, în cele expuse, la cele două probleme pe care Mostowski le considera ca problemele fundamentale ale matematicilor. Răspunsul nostru arată că problema logică – şi prin aceasta matematică –, a obiectului matematic, nu este o problemă filosofică. Bineînțeles, nu contestăm legitimitatea de a pune astfel de probleme filosofice. Dar a pune problemele obiectului şi raționamentului matematic, din punct de vedere filosofic, înseamnă a crea o problemă în plus şi teorii ca răspunsuri la această problemă, care nu sunt decât «epiteorii», epifenomen intelectual depărtat, mai mult sau mai puțin, de fenomenul intelectual matematic direct şi propriu-zis. Iar acesta, după cum ni se pare, a fost explicat suficient prin analiza noastră pur logică. Actul matematic are două aspecte: aspectul creator, prin care se introduce un nou «obiect», definiția unei funcții; aspectul demonstrativ, prin care se stabileşte echivalența unor astfel de funcții în corpul unei teorii. Astfel se găsesc împreună cele două arte: *ars inveniendi si ars demonstrandi*, ca două fețe ale aceluiaşi proces, care este procesul logico-matematic.

Ne-am străduit să rămânem pe terenul exclusiv al logicii. Dar natura obiectului ca şi a raționamentului matematic, aşa cum au fost explicate mai sus, ar putea să arunce o lumină nouă asupra motivelor care i-au determinat pe Platonos şi pe Aristoteles să considere obiectele matematice ca având o situație specială. Într-adevăr, pentru Platonos, obiectul matematic şi mai ales figurile geometrice formează un domeniu intermediar între idei şi lucrurile sensibile. (A se vedea, de exemplu, *Politeia*, VII, 529.) La fel, Aristoteles contestă entităților matematice «autonomia» lor; ele ar fi datorate numai abstracției, fără a poseda o existență autonomă (*De anima*, I, 1 şi III, 7; *Metaphysica*, K, 4, 1 061 b şi E, 1, 1 026 a etc.). Lumea larvară a variabilelor, creată în mod «liber» de matematician, nu putea fi identificată nici cu lumea ideilor transcendente a lui Platonos, nici cu lumea esențelor imanente a lui Aristoteles.

BIBLIOGRAFIE

1. **ARISTOTELES:** Analiticele secunde; Metaphysica.

2. **DUMITRIU, A.:** Istoria logicii. Ediția a III-a, Ed. tehnică, 1992-1998.

3. **HEYTING, A.:** Mathematische Grundlagenforschungen. Intuitionismus, Beweistheorie (Springer, Berlin, 1934).

4. **FRAENKEL, A.; BAR-HILLEL, J.:** Foundations of Set Theory. North Holland Publishing Company, 1958.

5. **PUTNAM, H:** Mathematics without Foundations. «The Journal of Philosophy», LXIV, 1, 1967.

6. **KÖRNER, S.:** On the Relevance of Post-Gödelian Mathematics to Philosophy. «Problems in the Philosophy of Mathematics», Amsterdam, 1967.

7. **MOSTOWSKI, A.:** The Present Sfate of Investigation on the Foundations of Mathematics. Polska Akademia Nauk – Instytut Matematyczny, 1955.

8. **EINSTEIN, A.:** The Meaning of Relativity. Ed. Methuen, Londra, 1922.

9. **PORPHYRIOS:** Isagogé.

10. **WITTGENSTEIN, L.:** Tractatus logico-philosophicus. Ed. Kegan Paul, Londra, 1933.

11. **RUSSELL, B.:** Introduction to Mathematical Philosophy. Trad. franc., ed. Payot, Paris, 1926; Introduction to Mathematical Philosophy.

12. **GOBLOT, L.:** Traité de logique. Ed. A. Colin, ed. a VI-a, Paris, 1937.

13. **LEIBNIZ, G. W.:** De arte combinatoria.

14. **PASCAL, B.:** De l'esprit géometrique.

15. **HOBBES, T.:** Computatio sive logica.

16. **POINCARÉ, H.:** Science et méthode.

17. **KANT, IMM.:** Kants gesammelte Schriften, Band XVI, Berlin, Georg Reiner, 1912.