SOLUȚIA PARADOXELOR LOGICO-MATEMATICE PRIN FORMULA TΩ

Paul Sfetcu

psfetcu@yahoo.com

Institutul Național de Cercetare - Dezvoltare în Informatică - ICI Bucureşti

Rezumat: Articolul prezintă soluția paradoxelor apărute în logica matematică cu respectarea principiilor logice. Se accentuează faptul că aceasta reprezintă o soluție logică şi nu o convenție care poate inhiba apariția paradoxelor.

Cuvinte cheie: Principii logice, implicația lui Russell, echivalență.

Abstract: In this paper the solution of the paradoxes is presented, solution that is built within the logica principles boundaries. It is stressed that Tw is a logical solution, not a convention introduced to prevent the paradoxes to appear.

Key words: logical principles, Russell implication, equivalence.

1. Introducere

Succesul ştiințelor cu baza empirică şi matematizate a generat o serie de cercetări pentru găsirea fundamentelor matematicii. Dar, în fundamentarea ştiinței, matematicienii s-au lovit, începând de la jumătatea secolului al XIX-lea şi până în deceniul al treilea al secolului al XX-lea, de unele paradoxe apărute chiar în interiorul matematicilor.

Apariția acestor antinomii în domeniul celor mai exacte şi mai riguroase ştiințe, matematicile, a zguduit atât fundamentul acestor ştiințe, cât şi al logicii, şi a creat o criză într-o problemă foarte importantă a timpului nostru: problema fundamentelor matematicilor.

Ceea ce apare şi mai grav decât descoperirea acestor antinomii este poziția luată de matematicieni şi de logicieni în această problemă şi care constă, în general, din a accepta o convenție mai mult sau mai puțin artificială, în baza căreia paradoxele pot fi evitate, nu soluționate: aşa-zisele soluții oferite până acum, inclusiv cea mai interesantă – teoria tipurilor –, datorată lui Bertrand Russell, sunt toate convenționale, constând din principii sau axiome restrictive ataşate arbitrar logicii clasice şi care nu permit construirea unor expresii susceptibile să degenereze în contradicții. Cu aceasta însă, instrumentul logic îşi pierde caracterul şi sensul lui tradițional, fiind grevat de aceste convenții, devenind el însuşi o convenție. Față de poziția adoptată în problema antinomiilor, consecința aceasta era absolut fatală şi ea poate fi descifrată în toate soluțiile încercate de logicienii contemporani, deşi nu a fost afirmată totdeauna explicit în modul acesta. *In der Logik gibt es keine Moral*, va scrie Carnap, formulând «principiul toleranței», şi fiecare poate să îşi construiască logica sa cum vrea... O asemenea concepție reduce logica la un cadru simbolic, creat arbitrar, lipsit de un sens intrinsec, adică la foarte puțin, dacă nu chiar la nimic. Singurul caracter logic pe care îl mai are acest schematism simbolic este acela că nu este contradictoriu, dar necontradicția lui este construită în mod convențional, deci în ea însăşi nu are nici o valoare. Acceptarea antinomiilor logico-matematice ca fiind veritabile sau evitarea lor prin convenții de principiu ruinează în mod esențial ideea de logică şi o privează de orice semnificație epistemologică. În orice caz, speranța de a găsi bazele logice ale matematicilor este, în condițiile acestea, pierdută.

Ceea ce se poate reproşa în primul rând acelora care au acceptat antinomiile logico-matematice ca fiind veritabile este faptul că ei au fost mai mult matematicieni decât logicieni şi s-au lăsat astfel influențați de metodele matematice, transformând logica într-o teorie deductivă cu axiome particulare, susceptibile în acest caz să fie modificabile.

Este evident că logica nu se poate construi decât în mod aparent ca o teorie matematică, cu axiomele şi metodele ei speciale de deducție. Într-adevăr, logica trebuie să justifice structura logică a oricărei teorii matematice – axiomele, regulile de deducție şi teoremele oricărei teorii matematice; în caz că ea ar fi una dintre aceste teorii matematice, ar trebui să justifice şi propria ei structură logică, şi axiomele, teoremele şi regulile ei de deducţie, adică ea ar justifica logic toate celelalte teorii matematice, dar o singură teorie matematică, aceea a logicii, ar trebui să se justifice prin ea însăşi! Aceasta nu înseamnă altceva decât o justificare în cerc vicios.

În ceea ce priveşte tentativele reale de a soluţiona paradoxele, sunt de menţionat gânditorii scolastici – din rândul cărora se detaşează Buridan, Albertus de Saxonia şi Petrus de Allyaco – iar în timpurile moderne putem menţiona numele lui Henri Poincaré, Ch. Perelmann şi Anton Dumitriu. Acesta din urmă este cel care, într-o lucrare întreagă, *Soluţia paradoxelor logico-matematice*, ca şi în articolele publicate în reviste de logică din străinătate, prezintă istoricul problemei, construieşte paradoxe mai generale decât acelea existente până atunci şi dă soluţia generală.

Vom face observaţia că această problemă era destul de importantă în concepţia grecilor din Antichitate, numeroşi gânditori ocupându-se de ea. Dar de ce era considerată atât de gravă problema paradoxelor? Fiindcă pentru gândirea greacă în general, şi pentru gândirea lui Aristoteles în particular, un asemenea paradox ar fi ruinat complet gândirea însăşi şi posibilitatea de sesizare a adevărului. În concepţia Stagyritului, realitatea are un început de natură logică şi a accepta contradicţii în gândire ar implica existenţa unor contradicţii în realitatea exterioară.

2. Formula Tω

În paradoxele cele mai generale, construite de Anton Dumitriu, avem o definiţie de tipul următor:

$P(x) = \sim\psi(x)$

cu echivalenţa generală

$(x)\ P(x) \equiv \sim\psi(x).$

Această echivalenţă este valabilă pentru orice x. Este ea valabila pentru orice ψ? Observăm mai întâi că nu putem spune că această definiţie rămâne oricând valabilă, oricare ar fi predicatul ψ (variabil), pentru că atunci putem spune, prin definiţie, pentru $\psi = P$

$P(x) = \sim P(x)$

ceea ce este contradictoriu: «dacă x nu are predicatul P, atunci x are predicatul P». În consecinţă, într-o definiţie de forma precedentă – ca şi în echivalenţa respectivă – variabila ψ nu poate lua valoarea P, adică $\psi \neq P$.

Observăm acelaşi lucru dacă scriem această definiţie în extensiune, ca şi echivalenţa respectivă:

$x \in \hat{z}\,(Pz) = \sim x \in \hat{z}\,(\psi z)$ Def.

$(x)\ x \in \hat{z}\,(Pz) \equiv \sim x \in \hat{z}\,(\psi z).$

Şi aici $\psi \neq P$, pentru că altfel am fi spus, prin definiţie, pentru $\psi = P$: «dacă x aparţine clasei determinate de funcţia $P(x)$, x nu aparţine clasei determinate de funcţia $P(x)$».

Am putea spune, fiind de acord cu Perelman şi generalizând observaţia lui, că universalele

$(x)\ P(x) \equiv \sim \psi(x)$

$(x)\ x \in \hat{z}\,(Pz) \equiv \sim x \in \hat{z}\,(\psi z)$

fiind false în anumite cazuri (pentru $\psi = P$), nu sunt universale şi deci, în virtutea principiului contradicţiei, trebuie să avem $\psi \neq P$. În cazul particular studiat de Perelman, caz care are forma

$\psi(\varphi) \equiv \sim\varphi(\varphi),$

nu se vede bine cum funcţionează principiul contradicţiei. Dar paradoxele mai generale, construite de Anton Dumitriu, care se bazează pe definiţii mai generale, au dilatat, ca să spunem aşa, structura unei astfel de expresii, arătând cu toată claritatea unde şi cum intervine principiul contradicţiei.

Dar în acest articol vom proceda în alt mod.

În virtutea principiului contradicției, echivalența $\varphi(x) \equiv \sim\varphi(x)$ este totdeauna falsă, oricare ar fi x. Putem deci afirma:

$|- : \sim[\varphi(x) \equiv \sim\varphi(x)]$ (I).

Să considerăm acum echivalența generală:

$\varphi(x) \equiv \sim\psi(x)$ (II).

Cum am admis formula (I), această ultimă echivalență nu poate fi afirmată ca fiind adevărată decât dacă ea nu poate degenera niciodată în echivalența (I), care este falsă.

Pentru aceasta, ψ nu trebuie să fie niciodată identic cu φ şi trebuie să avem $\varphi \neq \psi$. Deci, dacă afirmăm echivalența

$(x)\ \varphi(x) \equiv \sim\psi(x)$ (III)

această echivalență poate să fie adevărată numai dacă $\varphi \neq \psi$. Cu alte cuvinte, echivalența (III) implică o condiție necesară: neidentitatea dintre simbolurile φ şi ψ. Dar această condiție nu este suficientă: se poate ca simbolurile φ şi ψ să nu fie identice şi totuşi echivalența (III) să nu fie adevărată. În adevăr, dacă avem două funcții propoziționale $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$, din faptul că simbolurile φ şi ψ nu sunt identice ($\varphi \neq \psi$), nu rezultă ca ele sunt echivalente şi încă pentru orice x. Relația dintre expresia $(x)\ \varphi(x) \equiv \sim\psi(x)$ şi expresia $\varphi \neq \psi$ este deci exact relația de implicație: nu este cazul ca $(x)\ \varphi(x) \equiv \sim\psi(x)$ să fie adevărată şi $\varphi \neq \psi$ să fie falsă. Dar inversa nu este valabilă: este posibil ca $\varphi \neq \psi$ să fie adevărată şi $(x)\ \varphi(x) \equiv \sim\psi(x)$ să fie falsă. Am stabilit următoarea formulă, care este o implicație şi pe care Anton Dumitriu o notează cu Tω:

Tω $|- : (x)\ \varphi(x) \equiv \sim\psi(x) \supset \varphi \neq \psi$.

Această formulă este o tautologie şi se bazează exclusiv pe principiul contradicției şi nu face nimic altceva decât să exprime acest principiu în cazul studiat mai sus.

Se poate vedea uşor că formula Tω este o tautologie. Într-adevăr, primul membru poate fi adevărat sau fals, fiind o propoziție generală (variabila x este aparentă).

Să presupunem că:

1) Primul membru este fals; atunci el implică expresia $\varphi \neq \psi$, fie că aceasta este adevărată, fie că aceasta este falsă, fiindcă falsul implică orice.

2) Primul membru este adevărat; atunci $\varphi \neq \psi$ este adevărată căci, în caz contrar, dacă această expresie ar fi falsă, adică dacă $\sim\varphi \neq \psi\ .=.\ \varphi = \psi$, atunci, în virtutea formulei (I), primul membru ar fi fals, ceea ce nu este ipoteza noastră.

Prin urmare formula Tω este o tautologie, deoarece este adevărată totdeauna.

Observăm că în formula Tω argumentul x nu este supus nici unei condiții; relația $\varphi \neq \psi$ există între simbolurile funcțiilor (sau predicatelor).

Putem să obținem forme particulare din formula Tω.

Deoarece Tω este valabilă oricare ar fi x, să facem $x = \psi$ şi obținem:

Tω1 $|- : (\psi)\ \varphi(\psi) \equiv \sim\psi(\psi) \supset \varphi \neq \psi$.

Dacă în Tω şi Tω1 îi atribuim, lui φ o valoare determinată $\varphi = P$, obținem respectiv:

Tω2 $|- : (x)\ P(x) \equiv \sim\psi(x) \supset P \neq \psi$.

Tω3 $|- : (\psi)\ P(\psi) \equiv \sim\psi(\psi) \supset P \neq \psi$.

În toate aceste formule argumentul nu este limitat; simbolurile predicatelor (sau funcțiilor) sunt în relația $\psi \neq P$. În Tω1 sau Tω2 argumentul şi funcția sunt reprezentate prin acelaşi simbol, dar relația $\psi \neq P$ nu este introdusă prin ψ argument, ci prin ψ predicat. Dacă în Tω2 şi Tω3 facem $\psi = P$, avem:

$\vdash : (x)\ P(x) \equiv \sim P(x) \supset P \neq P.$

$\vdash : (x)\ P(P) \equiv \sim P(P) \supset P \neq P.$

Chiar şi în acest caz implicaţiile rămân valabile, pentru că primii lor membri sunt falşi şi membrii secunzi sunt de asemenea falşi.

În mod analog, se poate să scriem formula Tω în termeni de clase, fie traducând-o direct în termeni de clase, fie repetând raţionamentul de mai sus:

Tω $\quad \vdash : (x)\ x \in \hat{z}\,(\varphi z) \equiv \sim x \in \hat{z}\,(\psi x) \supset \hat{z}\,(\varphi x) \neq \hat{z}\,(\psi z).$

Vom mai adăuga că se poate găsi o expresie şi mai generală a tautologiei Tω, considerând relaţia R (oricare ar fi ea) a unui simbol x cu un alt simbol φ şi a aceluiaşi simbol x cu un alt simbol ψ, adică expresiile x R φ şi x R ψ. Procedând ca mai sus, ajungem la tautologia:

Tω $\quad \vdash : (x)\ x\ R\ \varphi \equiv \sim x\ R\ \psi \supset \varphi \neq \psi.$

Tautologia Tω a fost obţinută cu ideile de identitate (şi de non-identitate), de implicaţie, echivalenţă, funcţie propoziţională, clasă şi principiul contradicţiei, fără teoria tipurilor; ea aparţine sistemului Principia mathematica fără teoria tipurilor (şi degajat de orice altă consideraţie care ar putea fi în opoziţie cu logica clasică). Formula Tω aparţine, de asemenea, oricărui sistem formal care admite aceste idei.

3. Soluţia paradoxelor

Teorema Tω înseamnă, în fond, soluţia paradoxelor. Definiţiile care provoacă paradoxe, în forma lor cea mai generală, au fost exprimate sub forma tipică:

$P(x) = \sim\psi(x) \qquad \text{Def.} \qquad (1)$

Scriind echivalenţa generală între *definiens* şi *definiendum* (pentru orice *x*) şi asociindu-i teorema Tω obţinem un *modus ponens*:

$(x)\ P(x) \equiv \sim\psi(x) \qquad (2)$

$(x)\ P(x) \equiv \sim\psi(x) \supset \psi \neq P$

$\psi \neq P$

Acest *modus ponens* este valabil oricare ar fi forma particulară pe care o ia definiţia (1) şi deci echivalenţa respectivă, ca şi formula Tω.

Efortul lui Russell şi al altor logicieni s-a îndreptat către găsirea unei justificări pentru faptul că, într-o definiţie particulară de forma

$P(\psi) = \sim\psi(\psi) \qquad \text{Def.} \qquad (1')$

din care decurge echivalenţa generală (pentru orice ψ):

$\vdash : (\psi)\ P(\psi) \equiv \sim\psi(\psi) \qquad (2')$

argumentul nu poate lua valoarea P, căci atunci ajungem la paradox:

$P(P) = \sim P(P).$

Ţinând seama de Tω sub forma sa particulară $T\omega_3$, urmează că din definiţia (1’) obţinem o echivalenţă generală care, împreuna cu $T\omega_3$, dă un *modus ponens*:

$(\psi)\ P(\psi) \equiv \sim\psi(\psi)$

$T\omega_3 \quad (\psi)\ P(\psi) \equiv \sim\psi(\psi) \supset \psi \neq P$

$\psi \neq P.$

Care este motivul pentru care argumentul ψ nu poate lua valoarea P? Din cauza existenței teoremei $T\omega$ (sau a formei sale particulare $T\omega_3$) care explică această condiție prin relația care există între simbolurile ψ şi P.

Paradoxele construite de Anton Dumitriu, *compatibil – incompatibil* etc. sau cele cunoscute de tipul *predicabil – impredicabil* etc. nu mai sunt deci posibile prin funcționarea chiar a simbolismului logic care nu permite valoarea particulară P a variabilei ψ.

Acelaşi lucru este valabil dacă scriem definițiile precedente în termeni de clase.

Avem cazul general (paradoxul clasei claselor *incompatibile*).

$x \in \hat{z}\,(Pz) = \sim x \in \hat{z}\,(\varphi z)$ Def.

Echivalența generală, care rezultă şi teorema $T\omega$ scrisă în termeni de clase ne dau un *modus ponens*:

$\vdash : (x)\; x \in \hat{z}\,(Pz) \equiv \sim x \in \hat{z}\,(\psi z)$

$\vdash : (x)\; x \in \hat{z}\,(Pz) \equiv \sim x \in \hat{z}\,(Pz) \supset \hat{z}\,(\psi z) \neq \hat{z}\,(Pz)$

$\hat{z}\,(\psi z) \neq \hat{z}\,(Pz)$.

Pentru cazul particular al acestui paradox (paradoxul lui Russell), care se obține făcând în definiția precedentă $x = \hat{z}\,(\psi z)$, obținem:

$\hat{z}\,(\psi z) \in \hat{z}\,(Px) = \sim \hat{z}\,(\psi z) \in \hat{z}\,(\psi z)$ Def.

Modus ponens respectiv devine:

$\vdash : [\,\hat{z}\,(\psi z)]\; \hat{z}\,(\psi z) \in \hat{z}\,(Pz) \equiv \sim \hat{z}\,(\psi z) \in \hat{z}\,(\psi z)$

$\vdash : [(\,\hat{z}\,(\psi z)]\; \hat{z}\,(\psi z) \in \hat{z}\,(Pz) \equiv \sim \hat{z}\,(\psi z) \in \hat{z}\,(Pz) \supset \hat{z}\,(\psi z) \neq \hat{z}\,(Pz)$

$\hat{z}\,(\psi z) \neq \hat{z}\,(Pz)$.

Paradoxul claselor *incompatibile*, ca şi cazul său particular – paradoxul lui Russell al clasei claselor care nu îşi aparțin ca element, nu poate să mai apară.

Considerând paradoxul sub forma lui particulară, observăm că eroarea s-a comprimat, ca să spunem aşa, încât nu mai ştim unde există.

Simbolul ψ are două roluri logice: ca argument şi ca predicat. Ca argument, simbolul ψ nu apare în relație cu simbolul P; ca predicat, simbolul ψ este legat de P prin relația $\psi \neq P$. Russell nu a putut explica cele două roluri logice distincte ale aceluiaşi simbol ψ şi a privit problema din punct de vedere exclusiv al valorilor posibile pentru argumentul ψ: întrucât ψ ca argument nu apare în relație directă cu predicatul P, îi era imposibil să descopere rațiunea relației $\psi \neq P$ examinând numai argumentul funcției $\psi(\psi)$ sau $\sim\psi(\psi)$. Aceeaşi eroare a fost comisă de toți cei care au căutat o soluție a paradoxelor prin limitări axiomatice mai mult sau mai puțin arbitrare ale valorilor admisibile pentru argumentul unei funcții propoziționale.

Faptul că limitarea valorilor admisibile pentru argumentul unei funcții propoziționale nu este soluția paradoxelor se demonstrează prin aceea că o asemenea limitare, oricare ar fi natura ei, nu este capabilă să rezolve paradoxele generale construite de Anton Dumitriu sau de Gödel şi care au o definiție de forma

$P(x) =_{Df} \sim\psi(x)$.

În asemenea paradoxe, numai variația simbolului ψ (al predicatului) provoacă paradoxul şi nu valoarea argumentului, după cum am văzut. Am găsit astfel răspunsul logic la întrebarea următoare, care a zguduit logica şi matematica şi care a dat loc aşa-numitei «crize a matematicii»: de ce, într-o echivalență generală de forma

$(\psi)\ P(\psi) \equiv_{Df} \sim\psi(\psi)$

argumentul ψ nu poate lua valoarea P? Răspunsul a fost dat mai sus.

4. Analiza paradoxelor cu ajutorul teoremei Tω

Rezultatele precedente au rezolvat complet problema paradoxelor şi natura contradicției pe care acestea o exprimă. Vom analiza paradoxele cu ajutorul teoremei Tω, pentru a pune în evidență identitatea dintre toate aceste antinomii.

1. Paradoxul compatibil – incompatibil şi cazul său particular, paradoxul predicabil – impredicabil.

În paradoxul *compatibil – incompatibil* am avut definiția:

$Inc_h(P_x) = \sim Q_x(P_x)$ Def (1)

Această definiție dă loc unei echivalențe generale (pentru orice P_x) care, împreună cu $T\omega_1$ (unde $x = P_x$ şi $P = Inc_h$, ,ne oferă un *modus ponens*:

$\vdash : (P_x)\ Inc_h(P_x) = \sim Q_x(P_x)$ (2)

$T\omega_1$ $\vdash : (P_x)\ Inc_h(P_x) = \sim Q_x(P_x) \supset Q_x \neq Inc_h$

$Q_x \neq Inc_h$.

Predicatul Q_x trebuie să fie non-identic cu *incompatibil*. Definițiile noastre au aranjat cele două serii de predicate în aşa fel, încât Q_x să devină Inc_h = *incompatibil*, când se produce paradoxul. Relația $Q_x \neq Inc_h$ arată că $Inc_h = Inc_k$ nu poate fi considerat printre predicatele $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, adică în seria tuturor predicatelor. Am obținut acest rezultat pe o cale pur formală; vom arăta mai departe rațiunile acestei relații.

Pentru cazul particular al acestui paradox, paradoxul *predicabil – impredicabil*, se scrie în definiția (1) şi în *modus ponens* (2), $P_x = Q_x$ (cele două serii de predicate sunt identic ordonate); în acest caz Inc_h = *incompatibil* = *impredicabil* = Imp_h:

$Imp_h(P_x) = \sim P_x(P_x)$.

Modus ponens respectiv este:

$\vdash : (P_x)\ Imp_h(P_x) = \sim P_x(P_x)$ (2)

$T\omega_3$ $\vdash : (P_x)\ Imp_h(P_x) = \sim P_x(P_x) \supset P_x \neq Imp_h$

$P_x \neq Imp_h$.

Argumentul P_x nu poate fi niciodată identic cu Imp_h. Şi aici, *impredicabil* nu poate fi considerat în seria tuturor predicatelor $P_1, P_2, ..., P_n$.

2. Paradoxul izonom – heteronom şi cazul său particular, paradoxul lui Grelling-Nelson.

Am avut definiția paradoxului *izonom – heteronom*:

$Het_h(«Cx») = \sim D_x(«Cx»)$ Def (1)

Modus ponens respectiv este:

$\vdash : («Cx»)\ Het_h(«Cx») = \sim D_x(«Cx»)$ (2)

$\vdash : («Cx»)\ Het_h(«Cx») = \sim D_x(«Cx») \supset D_x \neq Het_h$

$D_x \neq Het_h$.

Predicatul D_x nu poate fi identic cu *Het*$_h$.

Pentru cazul particular al acestui paradox (paradoxul lui Grelling-Nelson), se face $C_x = D_x$ (cele două serii ale cuvintelor sunt ordonate identic), când Het_h = *heterologic* = Het_h:

$Het_h(«Cx») = \sim C_x(«Cx»)$ Def. (1')

Modus ponens care rezultă este:

$(«Cx») \mid\!- : Het_h(«Cx») = \sim C_x(«Cx»)$ (2)

$T\omega_3$ $(«Cx») \mid\!- : Het_h(«Cx») = \sim C_x(«Cx») \supset C_x \neq Het_h$

$C_x \neq Het_h$.

Het_h = *heteronom* sau în cazul particular *heterologic* nu poate fi o proprietate denumită printr-un cuvânt din seria tuturor cuvintelor.

3. Paradoxul clasei claselor incompatibile şi cazul său particular, paradoxul lui Russell.

În paradoxul clasei claselor *incompatibile* avem definiția:

$\alpha_x \in \Gamma_x = \sim\alpha_x \in \beta_x$ Def. (1)

Echivalența respectivă cu $T\omega_1$ (scrisă în termeni de clase), ne dă un *modus ponens:*

$\mid\!- : (\alpha_x)\ \alpha_x \in \Gamma_x \equiv \sim\alpha_x \in \beta_x$ (2)

$T\omega_1 \mid\!- : (\alpha_x)\ \alpha_x \in \Gamma_x \equiv \sim\alpha_x \in \beta_x \supset \alpha_x \neq \Gamma_x$

$\alpha_x \neq \Gamma_x$.

Astfel deci, Γ_x = clasa claselor *incompatibile* nu poate fi una dintre clasele seriei tuturor claselor.

În cazul particular al paradoxului lui Russell, care se obține din precedentul pentru $\alpha_x = \beta_x$ (cele două serii formate cu toate clasele sunt identic ordonate), avem:

$\mid\!- : (\alpha_x)\ \alpha_x \in \Gamma_x \equiv \sim\alpha_x \in \alpha_x$ (2)

$T\omega_1$ $\mid\!- : (\alpha_x)\ \alpha_x \in \Gamma_x \equiv \sim\alpha_x \in \alpha_x \supset \alpha_x \neq \Gamma_x$

$\alpha_x \neq \Gamma_x$.

5. Paradoxul izomorf – heteromorf şi cazul său particular, paradoxul lui Richard

Definiția paradoxului *izomorf – heteromorf* a fost:

$Het_k(a_x) = \sim P_x(a_x)$ Def. (1)

Modus ponens respectiv devine:

$\mid\!- : (a_x)\ Het_k(a_x) \equiv \sim P_x(a_x)$ (2)

$T\omega_1 \mid\!- : (a_x)\ Het_k(a_x) \equiv \sim P_x(a_x)\ .\supset .\ P_x \neq Het_k$

$P_x \neq Het_k$.

Paradoxul nu se mai poate produce: Het_k nu este una dintre proprietățile din seria tuturor proprietăților numerelor reale.

Paradoxul lui Richard se obține pentru $a_x = x$ (numerele sunt aranjate în ordinea naturală a mărimii lor). În acest caz avem (când $Het_k = Ri_k$):

$Ri_k(a_x) = \sim P_x(x)$ Def. (1')

Modus ponens devine acum:

$(x)\ Ri_k(x) \equiv \sim P_x(x)$ (2')

$T\omega_3$ $(x)\ Ri_k(a_x) \equiv \sim P_x(x)\ .\supset .\ P_x \neq Ri_k$

$P_x \neq Ri_k$.

Paradoxul nu mai poate apărea; Ri_k nu este una dintre proprietățile seriei tuturor proprietăților numerelor reale.

6. Paradoxul teoriei tipurilor

Am avut definiția:

$Inc_k^m(g_{xy}^{m-1}) = \sim Y_x^m(g_{xy}^{m-1})$.

Modus ponens respectiv se scrie:

$\vdash : (g_{xy}^{m-1})\ Inc_k^m(g_{xy}^{m-1}) \equiv \sim Y_x^m(g_{xy}^{m-1})$ (2)

$T\omega_1$ $\vdash : (g_{xy}^{m-1})\ Inc_k^m(g_{xy}^{m-1}) \equiv \sim Y_x^m(g_{xy}^{m-1}) \supset Y_x^m \neq Inc_k^m$

$Y_x^m \neq Inc_k^m$.

Paradoxul este imposibil. Trebuie să observăm, şi aici, că $Incg_k^m$ nu poate fi una dintre proprietățile seriei tuturor proprietăților posibile de tipul *m*.

7. Paradoxul lui Gödel

Definiția lui Gödel, a paradoxului care îi poartă numele, a fost aşa cum am văzut:

$n \in K = \overline{Bew}\,[R(n); n]$ Def. (1)

«Numărul natural *n* aparține clasei K dacă pentru el nu este demonstrabilă formula [R(*n*); *n*]».

Această definiție ne conduce la echivalența generală (pentru orice *n*):

$\vdash : (n)\ n \in K \equiv \overline{Bew}\,[R(n); n]$

Definiția (1) este aceea a paradoxului *izomorf – heteromorf*, care este mai general decât acela al lui Richard.

Pentru acest motiv, Gödel a recunoscut analogia, dar nu identitatea dintre paradoxulul său şi acela al lui Richard, întrucât el nu cunoştea paradoxul nostru *izomorf – heteromorf*.

În acest caz, teorema $T\omega_1$, cu simbolurile respective ale acestei probleme, devine:

$T\omega_1$ $\vdash : (n)\ n \in K \equiv \overline{Bew}\,[R(n); n]\ .\supset .\ [R(n); n] \neq [R(q); q]$.

Se vede că principiul contradicției nu atinge variabila *n*, ci expresia [R(*n*); *n*], care nu poate deveni chiar [R(*q*); *q*], pentru că atunci definiția (1) ar fi trebuit să includă propoziția contradictorie: «Dacă $q \in K$ este adevărată, adică dacă [R(*q*); *q*] este demonstrabilă, atunci [R(*q*);*q*] nu este demonstrabilă». Avem deci *modus ponens* următor:

$$|\!-: (n)\ n \in \mathrm{K} \equiv \overline{Bew}\,[\mathrm{R}(n); n] \quad (2)$$

$$\mathrm{T}\omega_1 \qquad |\!-: (n)\ n \in \mathrm{K} \equiv \overline{Bew}\,[\mathrm{R}(n); n]\ .\supset.\ [\mathrm{R}(n); n] \neq [\mathrm{R}(q); q]$$

$[\mathrm{R}(n); n] \neq [\mathrm{R}(q); q]$.

Problema este mai generală şi, fără complicațiile introduse de Gödel, ia forma următoare, care nu este decât una dintre formele paradoxelor noastre generale, *compatibil – incompatibil*, *izomorf – heteromorf* etc. Fiind dată o clasă de propoziții K într-un formalism logic oarecare, aritmetizat, putem enunța întotdeauna, într-un anumit mod, bine definit, o problemă de tipul următor: vom spune că o propoziție *p* aparține clasei K dacă pentru *p* nu este demonstrabilă afirmația că *p* aparține unei alte clase Ψ (care poate varia într-un mod bine definit dar, pentru fiecare *p*, clasa Ψ este dată). Această definiție se scrie:

$$p \in \mathrm{K} = \overline{Bew}\,[p \in \Psi] \qquad \text{Def.} \qquad (1)$$

Echivalența corespunzătoare este valabilă pentru orice *p*:

$$|\!-: (p)\ p \in \mathrm{K} \equiv \overline{Bew}\,[p \in \Psi].$$

Dar, deoarece Ψ este variabilă, ea ar putea deveni chiar K, astfel încât definiția ar fi inclus propoziția pe care o obținem din (2) pentru Ψ = K:

$$|\!-: (p)\ p \in \mathrm{K} \equiv \overline{Bew}\,[p \in \mathrm{K}].$$

Altfel spus, dacă propoziția «*p* aparține clasei K» este adevărată, atunci nu este demonstrabilă propoziția «*p* aparține clasei K», ceea ce este contradictoriu. Vom scrie $\mathrm{T}\omega_1$, cu simbolurile acestei probleme; echivalența (2) şi $\mathrm{T}\omega_1$ ne dau un *modus ponens*:

$$|\!-: (p)\ p \in \mathrm{K} \equiv \overline{Bew}\,[p \in \Psi]$$

$$\mathrm{T}\omega_1 \qquad |\!-: (p)\ p \in \mathrm{K} \equiv \overline{Bew}\,[p \in \Psi]\ .\supset.\Psi \neq \mathrm{K}$$

Ψ ≠ K.

Paradoxul nu mai poate apărea. Simbolul K nu reprezintă nici o clasă care să poată fi dată în formalismul logic considerat.

Observație. Am văzut că predicatele sau clasele cu care am construit paradoxele sunt excluse ca valori posibile ale predicatelor variabile sau ale argumentului variabil (în cazurile particulare ale paradoxelor) şi aceasta prin funcționarea însăşi a mecanismului formal logic. Concluzia care se impune imediat este aceea că aceste predicate sau clase, din moment ce nu pot fi considerate printre *toate* predicatele sau, respectiv, printre *toate* clasele, nu sunt predicate sau clase. Dar atunci ce sunt ? Vom afla răspunsul acestei întrebări în partea care urmează.

8. Observații generale

1. Formula paradoxelor

Toate paradoxele se bazează pe o singură şi aceeaşi greşeală de logică, care este comisă prin încălcarea principiului contradicției (fapt pus în lumină de teorema Tω), Formula generală pentru construirea unui paradox, fie de tipul lui Burali-Forti, fie de tipul, mai general, formulat de Anton Dumitriu, este:

(a) «Dacă x are predicatul ψ (variabil), atunci x are predicatul P».

(b) «Dacă x nu are predicatul ψ (variabil), atunci x are predicatul P».

2. Unicitatea soluției

Trebuie să observăm faptul remarcabil că soluția este unică şi de natură pur logică, nepresupunând nici un element străin de principiile clasice ale logicii.

În urma criticii făcute, în mod special de Ramsey, Russell a acceptat despărțirea antinomiilor în antinomii logice şi antinomii semantice sau sintactice (lingvistice) şi a renunțat la teoria ramificată a tipurilor şi la principiul de reductibilitate. Soluția dată de Anton Dumitriu demonstrează că nu există nici o diferență logică între antinomiile logice (paradoxul *compatibil – incompatibil* şi cazul său particular, paradoxul lui Russell *predicabil –impredicabil*, paradoxul clasei claselor *incompatibile* şi cazul său particular, paradoxul lui Russell al clasei claselor care nu îşi aparțin ca element etc.), şi antinomiile semantice (paradoxul *izonom – heteronom* şi cazul său particular, paradoxul lui Grelling–Nelson, paradoxul lui Richard etc.).

Această diviziune este fictivă, deoarece paradoxele se produc, toate, din aceeaşi eroare şi sunt rezolvate, toate, cu aceeaşi soluție. Nu există decât paradoxe logice, toate de acelaşi tip.

Această clasificare nu este nouă; ea este citată de Aristoteles ([1], *De sophisticis elenchis*) care s-a ocupat de clasificarea sofismelor în două categorii: 1) sofismele de limbaj, numite *in dictione* – **παρὰ τὴν λέξιν**; 2) sofismele de gândire sau logice, numite *extra dictionem* – **οι ἒξω τὴς λέξεων**. Această clasificare, menținută de aproape toate manualele de logică, a fost contestată chiar de Aristoteles. El nu a susținut niciodată că cele două specii de sofisme nu au aceeaşi soluție şi el scrie textual: «Diferența pe care o fac unii între argumente, spunând că unele se referă la limbaj şi altele la gândire, nu este adevărată. Este absurd să presupunem că există argumente care se referă la cuvinte şi altele care se referă la gândire şi că deci ele nu sunt identice» ([1], *op. cit.*, 10).

3. Paradoxele şi principiile logice

Deoarece expresiile de tipul $\varphi(\varphi)$ sau $\sim\varphi(\varphi)$, sau, în extensiune, $\alpha \in \alpha$ şi $\sim(\alpha \in \alpha)$ nu puteau fi declarate adevărate sau false, pentru că s-ar fi ajuns la paradoxe, Brouwer şi şcoala intuiționistă (ca şi cei care au creat logici polivalente – Lewis, Łukasiewicz, Paulette Février, J.-L. Destouches, Church etc.) au crezut că principiul terțiului exclus are o aplicare mai restrânsă şi că antinomiile logico-matematice sunt provocate tocmai de acceptarea valabilității universale a acestui principiu. Cu toate că problema logicilor polivalente este independentă de problema paradoxelor, vom face o remarcă privitoare la prezența acestui principiu în paradoxe. Într-un paradox se obține echivalența a două propoziții contradictorii (prin diferite substituții):

$$\vdash \cdot\, p \equiv \sim p \qquad (1)$$

Conform propoziției *5.23 din Principia mathematica, echivalența a două propoziții oarecare p şi q poate fi scrisă după cum urmează:

$$*5.23 \vdash :\, p \equiv q \,\cdot \equiv :\, p \cdot q \vee \sim p \cdot \sim q.$$

Făcând în această formulă q = ~p, obținem:

$$\vdash :\, p \equiv \sim p \,\cdot \equiv :\, p \cdot \sim p \vee p \cdot \sim p.$$

Sau încă:

$$\vdash :\, p \equiv \sim p \,\cdot \equiv :\, p \cdot \sim p \qquad (2).$$

Echivalența celor două propoziții contradictorii este echivalentă cu afirmarea lor simultană, ceea ce încalcă principiul contradicției. Astfel, echivalența (1) afectează în mod indiscutabil principiul contradicției, pe care nici Brouwer însuşi nu a îndrăznit să îl amputeze. Soluția dată anterior paradoxelor a arătat că, într-adevăr, principiul contradicției este acela care trebuie respectat într-o definiție de forma:

$$\varphi(x) =_{Df} \psi(x)$$

ca şi în echivalențele generale corespunzătoare, lucru exprimat explicit de formulele Tω

$$T\omega \qquad \varphi(x) \equiv \sim\psi(x) \supset \psi \neq \varphi.$$

Această tautologie, care fac ca într-o definiție cu forma generală dată, sau în echivalența respectivă, să se țină seama de principiul contradicției, este universal valabilă.

Aplicarea principiilor logice, care sunt universale, nu poate duce la o limitare; pentru acest motiv valabilitatea formulei $T\omega$ nu este limitată, pentru ca ea exprimă această universalitate a principiului contradicției.

4. De ce nu au putut fi rezolvate paradoxele?

Rezultatele precedente au arătat, de asemenea, în mod explicit, cauza care a împiedicat până acum găsirea soluției paradoxelor, fapt care se poate rezuma în cele două observații care urmează:

(a) S-a căutat rezolvarea principalelor paradoxe pe o cale străină de contradicția reală care s-a strecurat în definiția inițială a problemei, în speță pe calea principiului terțiului exclus, în loc de aceea a principiului contradicției. Din faptul că o propoziție este echivalentă cu contradictoria sa, s-a tras concluzia că ea nu poate fi nici adevărată, nici falsă, deci ea scapă principiului terțiului exclus. Aceasta este prima greşeală.

(b) Ocupându-se în mod special de problema expresiilor de forma $\varphi(\varphi)$ şi $\sim\varphi(\varphi)$ sau în extensiune $\alpha\in\alpha$ şi $\sim(\alpha\in\alpha)$, care apar în paradoxele teoriei mulțimilor, logicienii – şi printre ei, în primul rând, Russell –, nu au sesizat cele două roluri distincte ale aceluiaşi simbol φ (sau α), ca argument şi ca predicat. Eroarea a devenit atât de subtilă încât nu i s-a mai putut stabili locul. Nu puteam înțelege de ce argumentul ψ este în relație cu simbolul φ în definiția $\varphi(\psi) = \sim\psi(\psi)$, în speță, în relația $\varphi \neq \psi$, din moment ce argumentul ψ nu apare direct în această relație cu φ, ci ψ ca predicat. Nu valoarea $\psi = \varphi$ a argumentului provoacă paradoxul, ci valoarea $\psi = \varphi$ a predicatului variabil ψ ca funcție. Acest lucru a apărut clar în definițiile generale de forma $\varphi(x) =_{\mathrm{Df}} \sim\psi(x)$ care stau la baza paradoxelor construite de noi şi, în fond, la baza tuturor paradoxelor.

Dacă s-ar fi ținut seama de gândirea lui Wittgenstein în această problemă, care a văzut cu toată claritatea care sunt motivele ce provoacă aceste contradicții, se poate presupune că încă de mult s-ar fi dat soluția lor. Iată ce scrie el în privința întrebuințării aceluiaşi simbol pentru două lucruri deosebite [1]: «În limbajul curent se întâmplă des ca acelaşi cuvânt să semnifice în două moduri deosebite – şi deci aparține unor simboluri diferite – sau ca două cuvinte, care au semnificații diferite, sunt aparent întrebuințate în acelaşi mod în propoziție» (3.323). «Astfel se nasc uşor cele mai fundamentale confuzii (de care este plină întreaga filosofie)» (3.324). «Pentru a evita aceste erori, trebuie să întrebuințăm un simbolism care să le excludă, neîntrebuințând acelaşi semn în simboluri diferite şi neîntrebuințând semne în acelaşi mod când semnifică în moduri deosebite. Un simbolism, prin urmare, care ascultă de regulile gramaticii *logice* – ale sintaxei logice. (Simbolismul logic al lui Frege şi Russell este un asemenea limbaj, care nu exclude totuşi toate erorile.)» (3.325).

Este astfel evident, motivul pentru care expresii de forma $\varphi(\varphi)$ sau $\sim\varphi(\varphi)$ etc. nu sunt corecte, conform celor spuse de Wittgenstein, fiindcă acelaşi semn φ este întrebuințat cu două semnificații deosebite: o dată ca argument şi o dată ca predicat al argumentului.

BIBLIOGRAFIE

1. **ARISTOTELES:** Organon
2. **DUMITRIU, A.:** Soluția paradoxelor logico-matematice. Ed. Academiei Române, 1966.
3. **DUMITRIU, A.:** Eseuri. Ed. Eminescu, 1986.