# *Articole*

# STABILITATEA SISTEMELOR LINIARE CU MULTIPLI TIMPI MORȚI - O ABORDARE CU LMI DEPENDENTĂ DE VALOAREA TIMPILOR MORȚI

**Alexandru Şerbănescu**

*ARS T&TT, Oranje Straat 7,*
*2514 JB Den Haag, The Netherlands*

**Florin Boboşatu**

*Softnet Development & Consulting*
*e-mail: Florin.Bobosatu@softnet.ro*

**Rezumat**: Problemele de control automat, care apar în cazul sistemelor liniare cu timp mort (TDS), au o complexitate crescută în raport cu cele fără întârziere. Inegalitățile matriceale liniare s-au dovedit a fi, în ultimii ani, un instrument util şi funcțional în abordarea a numeroase probleme din teoria sistemelor. Lucrarea de față abordează cu ajutorul LMI problema stabilității în cazul unei clase de sisteme liniare cu multipli timpi morți, propunând un nou criteriu de stabilitate, o formă echivalentă redusă a acestuia şi o manieră de calcul a marginii de stabilitate, garantate pentru valoarea timpilor morți.

**Cuvinte cheie:** Sisteme cu timp mort (Time Delay Systems - TDS), Funcționala Lyapunov, inegalități matriciale liniare (Linear Matrix Inequalities - LMI), programare semidefinită.

## 1. Introducere

În comparație cu sistemele fără timp mort, există relativ puține rezultate publicate pentru sistemele cu întârziere (Time Delay Systems – TDS), în timp ce complexitatea acestora din urmă este sensibil mai mare. Întrucât timpul mort este frecvent o sursă de instabilitate şi este întâlnit în multe sisteme din domeniul tehnic, cum ar fi procesele chimice şi hidraulice, instalațiile electrice şi motoarele cu combustie, stabilitatea sistemelor cu timp mort a primit o atenție crescută în ultimii ani din partea comunității ştiințifice (vezi [2], [3], [4], [5]).

Scopul multor studii este să găsească, în cazul sistemelor cu timp mort, rezultate similare celor din domeniul sistemelor fără întârziere, pentru a putea stabili prezența unor proprietăți structurale. Datorită complexității crescute a TDS, multe din rezultatele clasice din teoria sistemelor nu pot fi transpuse în mod direct în cazul sistemelor liniare cu întârziere (pentru o aprofundare a sistemelor liniare, vezi [6]). Pentru a ilustra afirmațiile de mai sus putem considera, spre exemplu, ecuația caracteristică a unui sistem liniar de tipul:

$$\frac{d}{dt}x = Ax(t) + A_1 x(t-\tau) \qquad 1.1.$$

care este:

$$\det(sI - A - A_1 e^{-\tau s}) = 0 \qquad 1.2.$$

Determinarea stabilității sistemului prin inspectarea rădăcinilor ecuației (1.2) nu se dovedeşte practică din punct de vedere numeric, întrucât numărul de rădăcini este infinit. În lumina exemplului de mai sus, abordarea bazată pe inegalități matriceale (LMI) are două avantaje esențiale. Primul derivă din versatilitate care permite reformularea relativ uşoară a problemei, în funcție de obiectivele propuse, în timp ce al doilea mult, mai important, este suportul numeric.

Metodele folosite pentru determinarea proprietăților structurale ale TDS pot fi împărțite în două mari categorii: *independente de timpul mort* şi *dependente*. Prima abordare oferă modalități de determinare a diverselor proprietăți indiferent de valoarea întârzierii. A doua abordare oferă un grad sporit de libertate cu prețul creşterii complexității inegalităților implicate. Lucrarea de față se concentrează pe a doua metodologie. Majoritatea rezultatelor cu relevanță numerică (care pot fi aplicate în situații de ordin general), sunt metode de tip Lyapunov. Ca abordare generală, o funcțională Lyapunov este asociată sistemului studiat, iar rezultatele finale sunt exprimate în termeni de LMI'uri. Inecuațiile matriceale rezultate sunt, desigur, dependente de alegerea funcționalelor Lyapunov.

În lucrarea de față, vom considera un sistem cu întârzieri concentrate, a cărui ecuație de stare satisface:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{L} A_i x(t-\tau_i) + Bu(t)\end{cases} \quad 1.3.$$

Într-o primă fază, propunem un nou criteriu de determinare a stabilității, care este o generalizare pentru sistemele descrise de (1.3) a unei abordări prezentate în [8]. În legătură cu aceasta, construim o formă echivalentă redusă a LMI-urilor implicate şi prezentăm avantajele aduse de această formă în comparație cu abordarea clasică. Obținerea formei echivalente reduse este posibilă datorită prezenței matricelor corespunzătoare stărilor întârziate (vezi $A_i, i = 1 : L$). Majoritatea LMI-urilor implicate în studiul TDS suportă o asemenea formă. Un criteriu de stabilitate, bazat pe forma redusă, este propus (pentru prima dată în literatură după cunoştințele noastre). Pe lângă o procedură de determinare a stabilității, propunem o modalitate de determinare a razei de stabilitate în cazul unor timpi morți variabili. Rezultate numerice sunt prezentate în final.

## 2. Formularea problemei şi rezultate preliminarii

Considerând sistemul descris de (1.3) cu intrare nulă $u(t) = 0$, în scopul obținerii unor condiții de suficiență pentru stabilitatea sistemului, vom asocia acestuia o funcțională Lyapunov (propusă inițial în [8]) descrisă de următoarele relații:

$$V(x,t) = x(t)^T Px(t) + Z_1 + Z_2$$

unde:

$$Z_1 = \sum_{i=1:L} \int_{-\tau_i}^{0} x(t+s)^T P_i x(t+s) ds,$$

$$Z_2 = (L+1) \sum_{i=1:L} \int_{-\tau_i}^{0} \left\{ \int_{t+\theta}^{t} \|Ax(s)\|^2 ds + \sum_{i=1:L} \|A_i x(s-\tau_i)\|^2 ds \right\} d\theta, \quad 2.1.$$

$$\text{şi } P = P^T > 0, P_i = P_i^T > 0, \forall i = 1 : L.$$

În cazul în care derivata funcționalei de mai sus este negativă, $\forall x$ satisfăcând (1.3), atunci sistemul este intern asimptotic stabil. Înainte de a investiga condițiile necesare, pentru că $\dfrac{dV(x,t)}{dt} < 0$ vom prezenta câteva rezultate preliminarii.

***Lema 1 (Lema lui Finsler).*** Considerăm două matrici $F \in \mathbf{R}^{n \times m}$ şi $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ca fiind date şi presupunem că $\mathrm{rank}(F) < n$ şi $Q = Q^T$. Fie ($F_R, F_L$) o factorizare cu rang complet a lui $F$ ($F = F_L F_R$) cu ajutorul căreia definim $D := (F_R F_R^T)^{-1/2} F_L^+$, unde $F_\perp$ este un complement ortogonal al matricei $F$, iar $F^+$ este matricea inversa de tip Moore Penrose. În condițiile de mai sus, $Q - \mu FF^T < 0$ este satisfăcută pentru un $\mu \in \mathbf{R}$ daca şi numai dacă $P := F_\perp^T Q F_\perp < 0$. În acest caz, toate valorile lui $\mu$ satisfac:

$$\mu > \mu_{\min} := \lambda_{\max}[D(Q - QF_\perp^F P^{-1} F_\perp Q)D^T] \quad 2.2.$$

(Pentru demonstrație vezi [9].)

***Lema 2 (Lema Proiecției sau "Projection Lemma").*** Considerând matricele $F \in \mathbf{R}^{n \times m}, G \in \mathbf{R}^{k \times n}$, $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}, Q = Q^T$ şi $K \in \mathbf{R}^{m \times k}$ şi presupunând că $\mathrm{rank}(F) < n$ şi $\mathrm{rank}(G) < n$, următoarea LMI $FKG + G^T K^T F^T + Q < 0$ are o soluție $K$ dacă şi numai dacă $F_\perp^T Q F_\perp < 0$ şi $(G^T{}_\perp)^T Q (G^T{}_\perp) < 0$. (Pentru demonstrație vezi [9].)

***Lema 3 (Lema de echivalență).*** Considerând matricele $F \in \mathbf{R}^{n \times m}, G \in \mathbf{R}^{k \times n}$, $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}, Q = Q^T$ şi $K \in \mathbf{R}^{m \times k}$ şi presupunând că $\mathrm{rank}(F) < n$ şi $\mathrm{rank}(G) < n$, următoarea LMI $FKG + G^T K^T F^T + Q < 0$ are o soluție $K$ dacă şi numai dacă $\exists\, \mu \in \mathbf{R}$ astfel încât următoarele relații sunt satisfăcute:

1. $Q - \mu\, FF^T < 0$,

2. $Q - \mu\, G^T G < 0$.

Demonstrație. Aplicând *Lema* 2 (Projection Lemma) inegalitatea $FKG + G^T K^T F^T + Q < 0$ este echivalenta cu $F_\perp^T Q F_\perp < 0$ și $(G^T{}_\perp)^T Q (G^T{}_\perp) < 0$. Aplicând acum Lema lui Finsler ultimele două inegalități sunt echivalente cu $Q - \mu_1 FF^T < 0$ și $Q - \mu_2 G^T G < 0$.

Orice $\mu < \min(\mu_1, \mu_2)$ va satisface condițiile 1) și 2).

***Lema 4 (Khargonekar).*** Fie D și E matrici reale de dimensiuni corespunzătoare.

Oricare ar fi un $\varepsilon > 0$ următoarea inegalitate este valabilă,

$$DE + E^T D^T \le \varepsilon\, DD^T + \varepsilon^{-1} E^T E \tag{2.3.}$$

***Lema 5***. Dându-se o mulțime de vectori $u_1, u_2, \ldots, u_L \in R^n$ unde $L > 1$, următoarea inegalitate este valabilă:

$$\|u_1 + \ldots + u_L\|^2 \le L\|u_1\|^2 + \ldots + L\|u_L\|^2 \tag{2.4.}$$

***Demonstrație***. Întrucât:

$$\sum_{i=1:L,\, j=i:L} (u_i - u_j)^T (u_i - u_j) \ge 0 \tag{2.5.}$$

După extinderea produsului scalar obținem:

$$(L-1)\sum_{i=1:L} u_i^T u_i - \sum_{i=1:L,\, j=i:L} (u_i^T u_j + u_j^T u_i) \ge 0 \tag{2.6.}$$

Dacă adăugăm $\sum_{i=1:L} u_i^T u_i$ de ambele părți ale inegalității și mutăm în partea dreaptă termenul mixt obținem:

$$L\sum_{i=1:L} u_i^T u_i \ge \sum_{i=1:L,\, j=i:L} (u_i^T u_j + u_j^T u_i) + \sum_{i=1:L} u_i^T u_i \tag{2.7.}$$

sau

$$L\sum_{i=1:L} u_i^T u_i \ge \left(\sum_{i=1:L} u_i\right)^T \left(\sum_{i=1:L} u_i\right) \tag{2.8.}$$

care este:

$$L\sum_{i=1:L} \|u_i\|^2 \ge \left\|\sum_{i=1:L} u_i\right\|^2 \tag{2.9.}$$

***Lema 6*** (Inegalitatea lui Cauchy). Considerând produsul Hermitic

$$< f, g >= \int f(s) g(s) ds \tag{2.10.}$$

următoarea inegalitate este valabilă:

$$< f, f >< g, g >\ge |< f, g >|^2 \tag{2.11.}$$

## 3. Stabilitate dependentă de valoarea timpilor morți

Considerând sistemul descris de (1.3), putem rescrie ecuația de stare în maniera următoare:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x(t) &= (A + \sum_{i=1:L} A_i)x(t) - \sum_{i=1:L} A_i \int_{t-\tau_i}^{t} \frac{d}{dt}x(s)ds \\
&= A_0 x(t) - \sum_{i=1:L} A_i \int_{t-\tau_i}^{t} \left\{ Ax(s) + \sum_{j=1:L} A_j x(s-\tau_j) \right\} ds \\
&= A_0 x(t) - \sum_{i=1:L} A_i \eta_i
\end{aligned}
\qquad 3.1.
$$

unde:

$$A_0 = A + \sum_{i=1:L} A_i$$

$$\eta_1 = \int_{t-\tau_i}^{t} \left\{ Ax(s) + \sum_{j=1:L} A_j x(s-\tau_j) \right\}$$

Derivata lui $V$ în raport cu timpul este:

$$\frac{dV(x,t)}{dt} = x^T (A_0^T P + PA_0)x - \sum_{i=1:L} 2x^T P A_i \eta_i + \frac{d}{dt}Z_1 + \frac{d}{dt}Z_2$$

unde:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Z_1 &= x^T \left( \sum_{i=1:L} P_i \right) x - \sum_{i=1:L} \left( x_{\tau_i}^T P_i x_{\tau_i} \right), \\
\frac{d}{dt}Z_2 &= (L+1)\sum_{i=1:L} \tau_i \left( \|Ax(t)\|^2 + \sum_{j=1:L} \|A_j x(t-\tau_j)\|^2 \right) - \\
&- (L+1)\sum_{i=1:L} \left( \int_{t-\tau_i}^{t} \|Ax(s)\|^2 ds + \sum_{j=1:L} \int_{t-\tau_i}^{t} \|A_j x(s-\tau_j)\|^2 ds \right).
\end{aligned}
\qquad 3.2.
$$

După aplicarea Lemei 4 cu $D$ înlocuit cu $-D$ obținem:

$$-2x^T P A_i \eta_i \le \tau_i x^T P A_i A_i^T P x + \tau_i^{-1} \eta_i^T \eta_i \qquad 3.3.$$

Aplicând acum Lema 5, următoarea inegalitate este valabilă:

$$\eta_i^T \eta_i \le (L+1) \left\| \int_{t-\tau_i}^{t} Ax(s)ds \right\|^2 + (L+1) \sum_{j=1:L} \left\| \int_{t-\tau_i}^{t} A_j x(s-\tau_j)ds \right\|^2 \qquad 3.4.$$

și după aplicarea inegalității lui Cauchy obținem:

$$
\begin{aligned}
&(L+1) \left\| \int_{t-\tau_i}^{t} Ax(s)ds \right\|^2 + (L+1) \sum_{j=1:L} \left\| \int_{t-\tau_i}^{t} A_j x(s-\tau_j)ds \right\|^2 \le \\
&\le (L+1)\tau_i \int_{t-\tau_1}^{t} \|Ax(s)\|^2 ds + (L+1)\tau_i \sum_{j=1:L} \int_{t-\tau_1}^{t} \|A_j x(s-\tau_j)\|^2 ds
\end{aligned}
\qquad 3.5.
$$

Substituind acum (3.1) și (3.3), (3.4) și (3.5) în (3.2) obținem:

$$\frac{d}{dt}V \le x^T(A_0^T P + PA_0 + \sum_{i=1:L}\tau_i PA_i A_i^T P + \sum_{i=1:L}P_i + (L+1)A^T A\sum_{i=1:L}\tau_i)x + \\ + \sum_{i=1:L}x_{\tau_i}^T(LA_i^T A_i \sum_{j=1:L}\tau_j - P_i)x_{\tau_i} = S \qquad 3.6.$$

Dacă se consideră $\varepsilon_i = \frac{1}{\tau_i}, \forall i = 1:L$ şi $\varepsilon_\Sigma = \frac{1}{\sum_{i=1:L}\tau_i}$ derivata lui $V$ în raport cu timpul este negativă dacă următoarea LMI este satisfăcută:

$$W_{DDC} = \begin{bmatrix} Q_0 & & & \\ & Q_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_L \end{bmatrix} < 0 \qquad 3.7.$$

unde:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} A_0^T P + PA_0 + \sum_{i=1:L}P_i + (L+1)A^T A\sum_{i=1:L}\tau_i & PA_1 & \cdots & PA_L \\ A_1^T P & -\frac{1}{\tau_1}I_n & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_L^T P & & & -\frac{1}{\tau_L}I_n \end{bmatrix} \text{ şi}$$

$$Q_i = (L+1)A_i^T A_i \sum_{j=1:L}\tau_j - P_i$$

***Teorema* 3.1.** Pentru o mulţime dată de valori ale timpilor morţi $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_L$, sistemul descris de (1.3) este intern asimptotic stabil dacă există un set de matrici pozitiv definite $P, P_1, \ldots, P_L \in \mathbf{R}^{n\times n}$ care să satisfacă (3.7).

Dacă aplicăm acum Lema de Echivalenţa colţului din stânga sus în (3.7) obţinem o LMI echivalentă de forma:

$$W_{DDCR} = \begin{bmatrix} Q_{R\_0} & & & \\ & Q_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_L \end{bmatrix} < 0$$

unde:

$$Q_{R\_0} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1:L}P_i + (L+1)A^T A\sum_{i=1:L}\tau_i & & & \\ & -\frac{1}{\tau_1}I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{\tau_L}I_n \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} A_0^T \\ A_1^T \\ \vdots \\ A_L^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_L \end{bmatrix} \qquad 3.8.$$

$$Q_i = (L+1)A_i^T A_i \sum_{j=1:L}\tau_j - P_i, i = 1:L.$$

***Corolar* 3.1.** Pentru o mulţime dată de valori ale timpilor morţi $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_L$, sistemul descris de (1.3) este intern asimptotic stabil dacă există un set de matrici pozitiv definite $P, P_1, \ldots, P_L \in \mathbf{R}^{n\times n}$ şi un scalar $\mu$ care să satisfacă (3.8).

O remarcă interesantă este faptul că, datorită structurii LMI-ului din (3.7), dacă inegalitatea matriceală liniară are o soluţie pentru un set de valori $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_L$ atunci are o soluţie pentru orice set de timpi morţi $\tau_i^*, i = 1:L$ care satisface $0 < \tau_i^* \le \tau_i, \forall i = 1:L$.

*Teorema* **3.2.** Dacă pentru o mulţime dată de valori ale timpilor morţi $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_L$ există un set de matrici pozitiv definite $P, P_1, \ldots, P_L \in \mathbf{R}^{n\times n}$ care să satisfacă (3.7) atunci acest lucru este valabil pentru orice $\tau_i^*, i = 1:L$ care satisface $0 < \tau_i^* \le \tau_i, \forall i = 1:L$.

Demonstraţie. Considerând $W_{DDC}^*$ ca fiind matricea $W_{DDC}$ cu $\tau_i$ înlocuit de $\tau_i^*$, prin utilizarea complementului Schur, rezultă că $W_{DDC}^* \le W_{DDC}$ dacă $0 < \tau_i^* \le \tau_i, \forall i = 1:L$. Dacă $W_{DDC} < 0$ este satisfăcută, atunci $W_{DDC}^* < 0$ şi sistemul este stabil.

Acest rezultat ne indică faptul că, dacă putem demonstra stabilitatea unui sistem folosindu-ne de *Teorema* (3.1) pentru un set de timpi morţi, atunci sistemul va fi stabil pentru valori mai reduse ale timpilor morţi. Aceste valori nu trebuie neapărat cunoscute în mod exact, ci trebuie doar să nu depăşească anumite limite.

## 4. Marginea de stabilitate pentru valoarea timpului mort

Rezultatele prezentate mai sus ne oferă posibilitatea de a stabili stabilitatea unui sistem cu mai mulţi timpi morţi în cazul în care valorile întârzierilor sunt cunoscute sau cel puţin un majorant al lor este cunoscut. În unele cazuri, ar fi de interes să determinăm limitele în care anumite valori ale timpului mort pot varia astfel încât sistemul să rămână stabil.

Dacă se consideră o mulţime de scalari $0 < \varepsilon_L < \ldots \varepsilon_1$ unde $\varepsilon_i = \dfrac{1}{\tau_i}, i = 1:L$ şi $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_L$ sunt valorile timpilor morţi, prin aplicarea complementului Schur în (3.7), putem expanda LMI-ul ajungând la următoarea formă:

$$W_{dde} = \begin{bmatrix} Q_{B\_0} & A^T & \cdots & A^T & & & \\ A & -\dfrac{\varepsilon_1}{L+1} I_n & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ A & & & -\dfrac{\varepsilon_L}{L+1} I_n & & & \\ & & & & Q_{E\_1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & Q_{E\_L} \end{bmatrix} < 0$$

unde:

$$Q_{B\_0} = \begin{bmatrix} A_0^T P + PA_0 + \sum_{i=1:L} P_i & PA_1 & \cdots & PA_L \\ A_1^T P & -\varepsilon_1 I_n & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_L^T P & & & -\varepsilon_L I_n \end{bmatrix} \qquad 4.1.$$

şi

$$Q_{E\_i} = \begin{bmatrix} -P_i & A_i^T & \cdots & A_i^T \\ A_i & -\dfrac{\varepsilon_1}{L+1} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_i & & & -\dfrac{\varepsilon_N}{L+1} \end{bmatrix}, i = 1:L$$

***Teorema* 4.1.** Sistemul descris de (1.3) este intern asimptotic stabil dacă exista un set de matrici pozitiv definite $P, P_1, \ldots, P_L \in \mathbf{R}^{n\times n}$ şi o mulţime de scalari $0 < \varepsilon_L < \ldots < \varepsilon_1$ care să satisfacă (4.1), unde $\varepsilon_i = \frac{1}{\tau_i}, i = 1 : L$.

***Remarcă***: Diferenţa majoră între teoremele (3.1) şi (4.1) este faptul că valorile întârzierilor sunt date în cazul Teoremei (3.1) în timp ce în cazul Teoremei (4.1) ele sunt variabile. LMI-ul (3.7) este mai compact şi, ca urmare, mai economic, fiind recomandat atunci când valorile întârzierilor sunt date.

Formularea (4.1) este utilă atunci când dorim să determinăm marginea superioară pentru valorile unor anumiţi timpi morţi. Spre exemplu, putem considera $\tau_1, \ldots, \tau_{L-1}$ ca având valori fixe şi să adăugam un criteriu de optimizare cum ar fi $\max(-\varepsilon_L)$ (care înseamnă $\max(\tau_L)$) cu scopul determinării valorii maxime admisibile pentru timpul mort cu indicele $L$. Acest tip de abordare se poate dovedi util când, spre exemplu, valoarea întârzierii este variabilă şi poate fi folosită în procesul de control al sistemului automat.

Aplicând Lema de Echivalenţă colţului din stânga sus în LMI (4.1), obţinem o variantă simplificată a inegalităţii matriceale liniare:

$$W_{DDER} = \begin{bmatrix} Q_{BR\_0} & A^T & \cdots & A^T & & & \\ A & -\frac{\varepsilon_1}{L+1} I_n & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ A & & & -\frac{\varepsilon_L}{L+1} I_n & & & \\ & & & & Q_{E\_1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & Q_{E\_L} \end{bmatrix} < 0 \qquad 4.2.$$

unde:

$$Q_{BR\_0} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1:L} P_i & & & \\ & -\varepsilon_1 I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\varepsilon_L I_n \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} A_0^T \\ A_1^T \\ \vdots \\ A_L^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_L \end{bmatrix}$$

şi

$Q_{E\_i}, i = 1 : L$ sunt definite în (4.1).

***Corolar* 4.1.** Sistemul descris de (1.3) este intern asimptotic stabil dacă există un set de matrici pozitiv definite $P, P_1, \ldots, P_L \in \mathbf{R}^{n\times n}$ şi o mulţime de scalari $0 < \varepsilon_L < \ldots < \varepsilon_1$ şi $\mu$ care să satisfacă (4.2) unde $\varepsilon_i = \frac{1}{\tau_i}, i = 1 : L$.

## 5. Rezultate numerice

Datorită naturii infinit dimensionale a TDS, majoritatea criteriilor dezvoltate sunt criterii de suficienţă. În cele mai multe cazuri, ele au fost derivate cu ajutorul unor funcţionale Lyapunov-Krasovskii sau al unor funcţii de tip Lyapunov-Razumikihin. Conform cu Dugard [9], metodele bazate pe a doua abordare sunt mai restrictive şi, ca urmare, sunt recomandate doar atunci când celelalte eşuează. În funcţie de alegerea funcţionalei / funcţiei şi de modul în care condiţiile de suficienta sunt derivate, diverse rezultate sunt posibile pentru o aceeaşi problemă. Criteriile de suficienţă nu garantează faptul că un sistem nu are o anumită proprietate atunci când testul eşuează. Însă, ele ne ajută să stabilim anumite proprietăţi ale sistemului într-o clasă largă de situaţii permiţându-ne să obţinem rezultatele dorite.

Rezolvarea unei probleme de programare semidefinită SDP în formă standard presupune rezolvarea problemei directe:

$$\text{P} \quad \min_X \operatorname{tr}CX \quad \text{cu constrângerile:}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}A_k X = b_k, k = 1:m \\ &X \geq 0 \end{aligned} \qquad 5.1$$

şi în acelaşi timp a problemei duale:

$$\text{D} \quad \max_{y,Z} b^T y \quad \text{cu constrângerile}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m} y_k A_k + Z = C \\ &Z \geq 0 \end{aligned} \qquad 5.2.$$

Unul din pachetele de programe, folosite pentru rezolvarea problemelor de programare semidefinită, este SDPT3, care poate fi utilizat împreună cu Matlab5x şi a fost creat de K.G.Toh 1998 (vezi [10]).

Pentru alte rezultate similare în domeniul SDP vezi [11]. Pentru simulări, poate fi folosit un toolbox denumit TimeDelaySystems, creat de Arkadii Kim, Wook Hyun şi Leonid Volkanin (vezi [12] pentru mai multe detalii).

În ce priveşte calculul unei limite superioare pentru valorile timpilor, astfel încât sistemul să rămână stabil, rezultatele prezentate până acum au presupus că, în cazul sistemului (1.3), toate valorile timpilor morţi sunt variabile. În majoritatea cazurilor însă, doar câteva dintre valorile timpilor morţi pot varia, în timp ce restul au valori definite. În asemenea situaţii, în cazul procesului de determinare a proprietăţii de stabilitate LMI-urile implicate vor avea o formă intermediară între LMI (3.7) şi LMI (4.1). O asemenea situaţie este, spre exemplu, cazul când dorim să maximizăm doar valoarea timpului mort maxim, în timp ce celelalte valori ale timpilor morţi sunt date. În acest caz ,LMI-ul asociat problemei de optimizare va fi structurat în felul următor:

$$W_{dde} = \begin{bmatrix} Q_0 & A^T & & & \\ A & -\dfrac{\varepsilon_L}{L+1} I_n & & & \\ & & Q_{E\_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & Q_{E\_L} \end{bmatrix} < 0$$

unde $\varepsilon_L = \dfrac{1}{\tau_L}$,

$$Q_0 = \begin{bmatrix} A_0^T P + PA_0 + \sum\limits_{i=1:L} P_i + (L+1)A^T A \sum\limits_{i=1:L-1} \tau_i & PA_1 & \cdots & PA_{L-1} & PA_L \\ A_1^T P & -\dfrac{1}{\tau_1} I_n & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ A_{L-1}^T P & & & -\dfrac{1}{\tau_{L-1}} I_n & \\ A_L^T P & & & & -\varepsilon_L I_n \end{bmatrix} \qquad 5.3.$$

şi

$$Q_{E\_i} = \begin{bmatrix} (L+1)A_i^T A_i \sum\limits_{j=1:L-1} \tau_j - P_i & A_i^T \\ A_i & -\dfrac{\varepsilon_L}{L+1} \end{bmatrix}, i = 1:L.$$

Exemplul anterior a fost prezentat pentru a ilustra faptul că, atunci când considerăm timpi morți variabili, în funcție de particularitățile problemei, LMI-urile asociate pot suferi unele modificări. Pentru mai multe detalii legate de proceduri numerice în controlul automat vezi [13], [14], [15].

Pentru a ilustra rezultatele de mai sus într-un caz concret consideram un sistem descris de următoarele ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = -0.5\,x(t-\tau) + u(t) \\ y(t) = x(t) + u(t) \end{cases}, \qquad 5.4.$$

unde $\tau > 0$ este variabil. Prin aplicarea *Teoremei* (4.1), încercăm să calculăm valoarea maximă a timpului mort astfel încât sistemul (5.4) să fie stabil. Rezultatul pentru limita superioară a timpului mort, în acest caz, este $\tau_{\max} = 1.414$. În concordanță cu *Teorema* (3.2), întrucât (3.7) are o soluție pentru $\tau_{\max} = 1.414$ va avea una pentru orice $\tau < \tau_{\max}$, iar $\tau_{\max}$ reprezintă, în acest caz, limita superioară de stabilitate, garantată pentru valoarea timpului mort.

Ambele criterii de stabilitate sunt acompaniate de versiuni reduse, obținute prin aplicarea *Lemei de Echivalență*. O remarcă de ordin numeric, în acest caz, ar fi faptul că, în multe situații, algoritmul care rezolvă problema SDP nu converge dacă $\mu$ este lăsat liber. Dacă adăugam minimizarea lui $\mu$ ca un criteriu de optimizare la problema de bază, algoritmul va converge întotdeauna cu rezultate similare cazului nesimplificat.

Pentru a compara într-o situație concretă numărul global de operații de bază, necesare stabilirii stabilității în cazul folosirii Teoremei (3.1) sau a Lemei (3.1) (criteriul redus), vom considera un sistem cu un timp mort ($\tau = 1$) și cu matrici de stare, alese în mod aleatoriu, astfel încât LMI-urile să aibe o soluție. Calculăm apoi raportul între numărul de operații într-un caz și celălalt pentru sisteme cu ordinul de mărime cuprins între 1 și 10. Repetând acest lucru de 10 ori și făcând media raportului pentru fiecare ordin în parte, obținem valorile din ***Tabelul* 1** reprezentate grafic în figura 1.

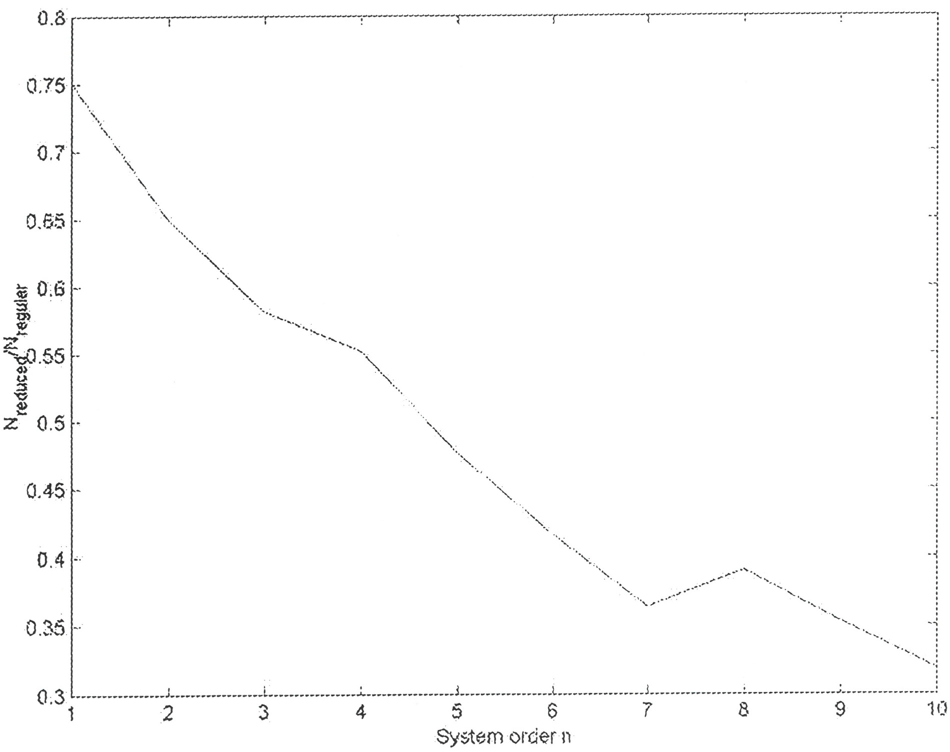


**Figura 1. Reprezentarea grafica a raportului între numărul de operații în cazul redus și cel regular**

**Tabel 1. (Raportul între numărul de operații în cazul redus și cel regular $\frac{N_{reduced}}{N_{regular}}$)**

| Ordinul sistemului n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{N_{reduced}}{N_{regular}}$ | 0.75 | 0.64 | 0.58 | 0.55 | 0.47 | 0.41 | 0.36 | 0.39 | 0.35 | 0.31 |

Aşa cum putem vedea din ***Tabelul* 1**, forma redusă aduce un avantaj semnificativ în ce priveşte numărul total de operaţii de bază. Aceasta este o consecinţă a reducerii numărului de variabile în LMI-urile implicate. În cazul în care alte criterii de optimizare nu sunt prezente, varianta redusă este preferabilă având în vedere că rezultatele finale sunt aceleaşi, în timp ce numărul de operaţii şi memoria utilizată sunt mai reduse.

În cazul în care unele optimizări adiţionale sunt necesare, cum ar fi determinarea timpului mort maxim pentru ca sistemul să rămână stabil, lucrurile decurg altfel. Dacă aplicăm, spre exemplu, în cazul sistemului (5.4), *Teorema (3.1)* obţinem $\tau_{\max} = 1.414$, iar dacă aplicăm *Corolarul (3.1)* utilizând ponderi egale pentru minimizarea lui $\mu$ şi $\varepsilon = \frac{1}{\tau_{\max}}$ obţinem $\tau_{\max} = 0.556$. Motivul pentru care apare această diferenţă este faptul că cele două obiective sunt concurente. Dacă raportul $W_\tau / W_\mu$ este 100, atunci obţinem, pentru valoarea maximă a timpului mort, $\tau_{\max} = 1.2386$, iar dacă este 1000000, obţinem $\tau_{\max} = 1.4121$. Este evident că pentru valori foarte mari ale acestui raport, timpul mort maxim admisibil se apropie asimptotic de valoarea obţinută folosind *Teorema (3.1)*. ***Tabelul* 2** şi reprezentarea sa grafică din figura 2 ilustrează această dependenţă.

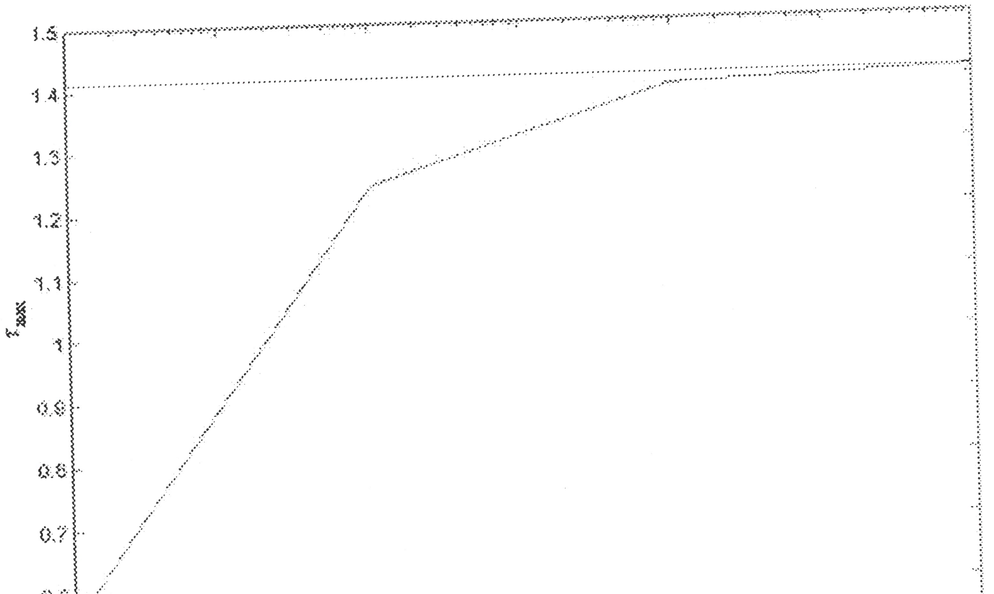


**Figura 2. Valoarea maximă a timpului mort în funcție de raportul ponderilor $W_\tau / W_\mu$**

**Tabel 2. (Valorile lui $\tau_{\max}$ pentru diferite rapoarte $W_\tau / W_\mu$ )**

| $W_\tau / W_\mu$ | 1 | $10^2$ | $10^4$ | $10^6$ |
|---|---|---|---|---|
| $\tau_{\max}$ | 0.556 | 1.238 | 1.394 | 1.412 |
| $\mu$ | 1.3 | 10.6 | 100.7 | 1000 |

În ce priveşte valoarea maximă reală pentru care sistemul (5.4) este stabil, o soluţie analitică este calculată în Marshall [7]. Un sistem având polinomul caracteristic $F(s,\tau) = s + ke^{-s\tau}$ este propus ca exerciţiu, iar marginea analitică maximă a timpului mort rezultată este $\tau_{\max} = \frac{\pi}{2k}$. Dacă luam $k = 0.5$ suntem în cazul sistemului (5.4), iar valoarea maximă a timpului mort rezultă $\tau_{\max} = \pi$. Aceasta este o valoare semnificativ mai mare decât valoarea obţinută prin aplicarea Teoremei (4.1), dar, din păcate, metoda analitică propusă în [7] nu este aplicabilă în cazul general.

## 6. Concluzii

Inegalităţile matriceale liniare (LMI) sunt un instrument util şi funcţional în studiul sistemelor cu timp mort. Versatilitatea condiţiilor finale, rezultate prin aceasta abordare, oferă analistului de sistem posibilitatea de a alege forma adecvată în raport cu cerinţele problemei.

Lucrarea de faţă prezintă un criteriu de stabilitate, care generalizează, pentru sistemele descrise de (1.3), un rezultat anterior prezentat în [8] şi propune o formă echivalentă redusă, cu performanţe numerice sporite. În final, este prezentată o manieră de calcul a timpului mort maxim admisibil, astfel încât sistemul să rămână stabil. Structura intrinsecă a TDS permite o versiune redusă a LMI-urilor implicate. În cazul în care valorile timpilor morţi sunt cunoscute sau mai mici decât anumite valori date, este mai economic să utilizam testul de stabilitate propus în Lema(3.1) (versiune redusă) având în vedere că rezultatele finale sunt aceleaşi. Dacă în problema SDP apar obiective suplimentare de optimizare, forma redusă nu mai este recomandată întrucât ele ar putea intra în competiţie cu minimizarea lui $\mu$ (vezi capitolul anterior).

## Bibliografie


1. **BOYD, S., L. EL GHAOUI, E. FERON, V. BALAKRISHNAN**: Linear Matrix Inequalities în System and Control Theory, SIAM, 1994.
2. **SHAKED, U., YAESH, C. SOUZA**: Bounded Real Criteria for Linear Time Delay Systems. În: IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, No.7, July 1998.
3. **NICULESCU, S. I.**: Thèse présentée pour obtenir le titre de Docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 14 Fevrier 1996.
4. **NICULESCU, S. I.**: $H_\infty$ Memoryless Control with an $\alpha$ -Stability Constraint for Time-Delay Systems: An LMI Approach. În: IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, No. 5, May 1998.
5. **ESFAHANI, S.H., I. R. PETERSEN**: An LMI Approach to the Output-Feedback Guaranteed Cost Control for Uncertain Time-Delay System. În: Proc. of the 37th IEEE Conf. on Decision & Control, Tampa, Florida USA December 1998.
6. **IONESCU, V., C. OARA**: Generalised Riccati Theory and Robust Control, A Popov Function Approach, John Wiley & Sons, 1998.
7. **MARSHALL, J.E., H. GORECKI, K. WALTON**: A. Korytowski, Time-Delay Systems Stability and Performance Criteria with Applications. Ellis Horwood UK 1992, ISBN 0-13-465923-6.
8. **PARK, JU H., S. WON**: Stability Analysis for Neutral Delay-differential Systems. În: Journal of The Franklin Institute Engineering and Applied Mathematics, Vol. 337 , No. 1, Philadelphia USA, January 2000.
9. **DUGARD, L., E.I. VERRIEST**: Stability and Control of Time-delay Systems, Springer-Verlag London 1998, ISBN 3-540-76193-4.
10. **TOH, K. C., M.J. TODD, R.H. TUTUNCU**: SDPT3 - a Matlab Software Package for Semidefinite Programming, http://www.math.cmu.edu/~reha/sdpt3.html or http://www.math.nus.edu.sg/~mattohkc/index.html, 1998.
11. **YE, Y.**: Interior Point Algorithms Theory and Analysis, John Wiley & Sons, 1997.
12. **KIM, A., WOOK HYUN KWON, L. VOLKANIN**: Time Delay System Toolbox, http://www.fde.imm.uran.ru or http://www.cisl.snu.ac.kr, June 2001.

13. **DUMITRESCU, B., C. POPEEA, B. JORA**: Metode de calcul numeric matriceal, algoritmi fundamentali, ALL EDUCATIONAL, 1998, ISBN 973-9392-07-5.

14. **JORA, B., C. POPEEA, S. BARBULEA**: Metode de calcul numeric în automatică, Editura Enciclopedică, Bucureşti, 1996, ISBN 973-45-0172-0.

15. **IORGA, V., B. JORA, C.NICOLESCU, I. LOPATAN, I. FĂTU**: Programarea numerică, Editura Teora, Bucureşti, 1996, ISBN 973-601-379-0.

16. **BALTAC, V.**: Vulnerabilitatea sistemelor în contextul Internet. În: Revista Română de Informatică şi Automatică, vol. 11, nr. 4, 2001.

17. **FILIP, F.G.**: Towards More Humanized Real Time Decision Support Systems. În: L.M. Camarinha-Matos, H. Afsarmanes (Eds.). Balanced Automation Systems: Architectures and Design Methods. Chapman & Hall, London, 1995, pp. 230-240.

18. **FILIP, F.G.**: DSS for Enterprise and Management Reengineering: Towards Anthropocentric System. În: P. Borne (Ed.) Symp. „Modeling, Analysis & Simulation", 1996 a), pp. 438-443.

19. **FILIP, F.G.**: DSS for Enterprise and Management Reengineering: Towards Anthropocentric Systems. În: P. Borne (Ed.), Proc. CESA'96, IMACS Multiconference, Symp. on „Modelling, Analysis & Simulation", 1996 b), vol I.

20. **HARTESCU, FL., C. DANILOV, C. GIUGICĂ**: Real Time Instruments for Transactional Systems Development. În: IMACS International Symposium on Soft Computing in Engineering Applications (SOFTCOM '98), Athens, Greece, June 22-25, 1998.

21. **HARTESCU, FL., C. DANILOV**: Process Optimization System Used in Metallurgical Plants. În: IMACS International Symposium on Soft Computing in Engineering Applications (SOFTCOM '98), Athens, Greece, June 22-25, 1998.

22. **STĂNCIULESCU, FL.**: Modelarea sistemelor de mare complexitate, Editura Tehnică, Bucureşti, 2003.