ALGORITMI PARALELI PENTRU PRELUCRAREA MATRICILOR

Drd. Răzvan Bologa

Academia de Studii Economice, Bucureşti

Rezumat: Acest articol abordează o serie de probleme legate de proiectarea algoritmilor paraleli, destinaţi calculului matricial. În procesarea paralelă matricile sunt, de obicei, prelucrate la nivel de bloc, spre deosebire de abordarea clasică, în care matricile erau prelucrate la nivel de element. Conceptele prezentate vor fi aplicate matricilor tridiagonale, care se întâlnesc frecvent în practică. Vom prezenta şi metode de tip fluture, pentru rezolvarea ecuaţiilor liniare. Deşi aceste metode au fost destinate, iniţial, prelucrărilor matriciale la nivel de element, ele pot fi foarte uşor extinse şi pentru prelucrări matriciale la nivel de bloc.

Cuvinte cheie: procesare paralelă, matrici, fluture, ecuaţii.

1. Metode directe cu matrici organizate sub formă de blocuri

Procedura clasică, de rezolvare a unui sistem de forma $Ax=b$ unde $A=[a_{ik}]$ şi $A \in R^{n \times n}$, x, b $\in \mathrm{R}^{n}$ constă în a parcurge următoarele etape: (1)

- aducerea lui A la forma tridiagonală;
- substituţia inversă;
- reducerea iterativă a erorilor.

A se va scrie sub forma:

A=PLUQ (2)

unde P şi Q sunt matrici de permutare, iar L şi U sunt matrici de forma următoare:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 1_{ik} & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad U = \left| \begin{array}{ccc} u_{11} & & \\ & \cdot \; u_{ik} & \\ & \cdot & \\ & & u_{nn} \end{array} \right|$$

Soluţia se obţine prin rezolvarea următoarelor subsisteme:

$$Px^1 = b$$
$$Lx^2 = x^1$$
$$Ux^3 = x^2 \qquad (3)$$

Ecuaţia (1) include *(n-1)* eliminări.

Dacă *A* este o matrice rară, matricile de permutare sunt alese astfel încât *L* şi *U* să fie şi ele matrici rare.

O altă modalitate de a rezolva sistemul (1) este împărţirea în blocuri. În acest scop, considerăm următorul sistem de ecuaţii liniare:

$A=[a_{ik}]$ şi $A \in R^{n \times n}$, x, b $\in \mathrm{R}^{n}$ unde A este simetrică şi pozitiv definită. (4)

În continuare, sistemul este partiţionat în matrici bloc de forma $A_{ik} \neq 0$.

$$
\begin{vmatrix}
A_{11} & A_{21}^T & & & & \\
A_{21} & A_{22} & A_{32}^T & & 0 & \\
 & A_{32} & A_{33} & A_{43}^T & & \\
 & & & \ddots & & \\
 & 0 & & & & \\
 & & & & & A_{mm}
\end{vmatrix}
*
\begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix}
$$

Din moment ce A este pozitiv definită şi simetrică şi matricile diagonale de forma A_{ii} sunt tot simetrice.

De aici, putem scrie sistemul primului bloc:

$$A_{11} x_1 + A_{21}^T x_2 = b_1$$

În conformitate cu presupunerea că A_{11}^{-1} există. avem:

$$x_1 + C_{21}^T x_2 = b_1$$

unde:

$$C_{21}^T = A_{11}^{-1} A_{21}^T \text{ şi } d_1 = A_{11}^{-1} b_1 \tag{5}$$

Prin folosirea relaţiei (6), se elimină $x1$ şi se obţine

$$\hat{A}_{22} x_2 + \hat{A}_{32}^T x_3 = \hat{b}_2$$

unde:

$$\hat{A} = A_{22} - A_{21} C_{21}^T, \hat{b} = b_2 - A_{21} d_1$$

În acest moment rezultă următorul sistem:

$$
\begin{vmatrix}
I & C_{21}^T & & & & \\
 & A_{22} & A_{32}^T & & 0 & \\
 & A_{32} & A_{33} & A_{43}^T & & \\
 & & & \ddots & & \\
 & 0 & & & \ddots & \\
 & & & & & \cdot
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} d_1 \\ \hat{b}_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \end{vmatrix}
$$

Procesul de eliminare poate fi continuat recursiv şi, după m paşi, se obţine sistemul:

$$\begin{vmatrix} I & C_{21} & & & & & & & \\ & I & C_{32}^T & & & & & & \\ & & I & C_{43}^T & & & & & \\ & & & I & & & & & \\ & & & & I & & & & \\ & & & & & . & & & \\ & & & & & & . & & \\ & & & & & & & . & \\ & & & & & & & & . \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ \\ \\ x_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \\ \\ \\ d_m \end{vmatrix}$$

Deci, vectorii parţiali căutaţi sunt:

$x_m := d_m$.

Ceilalţi vectori parţiali vor fi determinaţi în ordine inversă, aplicând relaţia:

$$x_i = d_i - C_{i+1,i}^T x_{i+1}, \; i = m-1, \ldots, 1$$

Pentru a determina matricile inverse din relaţia (6), se vor calcula matricile bloc $C_{i+1,i}^T$.

Din moment ce $\det A_{ii} \neq 0$.

$\hat{A}_{ii} \, C_{i+1,i}^T = A_{i+1,i}^T$ pentru I=1,2,...m-1

$\hat{A}_{ii} \, d_i$

unde: $\hat{A}_{11} = A_{11}$ şi $\hat{b}_{-1} = b$

Se observă că, în cazul în care m şi r sunt foarte mari, atunci numărul de operaţii necesar pentru calculul inversei se reduce semnificativ.

Numărul de operaţii pentru determinarea inversei este: $\sim 3(m-2)r^3$

Număr de sisteme de ecuaţii: $\sim 5/3(m-1)r^3$

2. Metode de tip fluture pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

În cele ce urmează, vom compara metodele directe de rezolvare a sistemelor de ecuaţii cu sisteme de tip *QI* (quadrant interlocking).

Fie o matrice A de forma:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{24} \\ & & & \\ a_{41} & & & a44 \end{vmatrix}, \textit{unde} \; \det A \neq 0$$

Vom încerca să găsim L şi U de forma:

$$L = \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{311} & l_{32} & 1 & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{şi } U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{vmatrix}$$

Avem condiţia $A = LU$.

După ce egalăm coeficienţii:

$$u_{1i} = a_{1i}, i = 1,2,3,4$$

$$L_{21}u_{11} = a_{21}$$

$$l_{21}u_{21} + a_{22} = a_{22}$$

$$l_{21}u_{31} = a_{31}$$

etc.

Se procedează similar şi pentru ultimul rând. Necunoscutele din relaţiile de mai sus l_{ij} şi u_{ij} se obţin din relaţiile de mai sus.

Motivul pentru care se realizează factorizarea este acela de a obţine soluţiile sistemului:

Ax=b

Ne folosim în continuare de substituţia A=LU şi reducem problema la cuplul de sisteme:

Lz=b

şi

Ux=y

unde *y* este un vector intermediar.

Primele două sisteme de mai sus se rezolvă uşor, prin procese de substituţie, spre exemplu în maniera următoare:

Ly=b;

$$\begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{311} & l_{32} & 1 & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix}$$

Din relaţiile de mai sus rezultă următoarele:

$$y_1 = b_1 \text{ -> } y_1 = b_1$$

.

.

.

.

$$l_{41}y_1 + l_{42}y_2 + l_{43}y_3 + y_4 = b_4 \text{ -> } \quad y_4 = b_4 - l_{41}b_1 - l_{42}y_2 - l_{43}y_3$$

Se procedează în mod similar pentru *Ux=y*.

Metodele prezentate până acum sunt procese secvenţiale. În cele ce urmează, vom prezenta metode adecvate procesării paralele.

Bibliografie

1. Articolele şi documentaţia aflate la adresa, http://beowulf-underground.org, în anul 2003, luna noiembrie.
2. **LESTER, B. P.**: The Art of Parallel Programming, Prentice Hall, 1993.
3. **GIBBONS, P. SPIRAKIS**: Lectures on Parallel Computation, Cambridge University Press, 1993.
4. **EVANS, D.J., W. S. YOUSIF**: Explicit Solutions of Block Tridiagonal Systems. În: International Journal of Comp. Mathematics, Vol.40, 1990.