REȚEA PETRI DE TRANSPORT

Vaslilica Bordea

Academia Navală „Mircea cel Bătrân”
nicolae_bordea@yahoo.com

Rezumat: lucrarea propune o extensie a rețelelor Petri pe care o definește și în care se definește un flux ce tranzitează rețeaua între poziția P_0 , de intrare și poziția P_n , de ieșire din rețea. Proprietățile rețelei Petri de transport(RPt) permit studierea evoluției unui sistem cu evenimente discrete, modelat prin RPt. Invarianții de execuție definesc drumurile din rețea, iar capacitatea minimă a tranzițiilor participante la drum determină capacitatea de transport a drumului. Relația mulțimilor $P = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ a pozițiilor și $T = \{T_1, T_2, \ldots T_m\}$, a tranzițiilor este exprimată cu ajutorul matricei de incidență W. Vectorii caracteristici cu matricele lor asociate, {D} - intensitate în poziții și $[\Phi]$ - flux prin tranziții , împreună cu matricea de incidență W, relaționează într-o ecuație fundamentală. Algoritmi dezvoltați pe matricea de incidență și pe o matrice asociată conduc la exprimarea în două moduri a drumurilor din rețeaua Petri de transport.

Cuvinte cheie: rețea Petri de transport, sisteme cu evenimente discrete.

1. Rețea Petri de transport. Definiții

Problema transportului de la o sursă la o destinație, trecând și prin centre intermediare, exprimată până acum prin modele de programare liniară și prin grafuri de tip rețea de transport, poate fi modelată și printr-o extensie a rețelelor Petri, pe care o vom numi „rețea Petri de transport”. În acest graf a cărui alcătuire presupune două tipuri de noduri, pozițiile vor modela centre, localități, porturi etc., iar tranzițiile - acțiunea de transport între două centre.

Definiția 1.1. Se numește rețea Petri de transport (RPt) un graf orientat, unde pozițiile $P_i \in P = \{P_0, P_1, \ldots P_n\}$ sunt legate prin arce de tranzițiile pure $T_k \in T = \{T_1, T_2, \ldots T_m\}$, în care există o poziție unică $P_0 \in P$, având tranziții doar pe ieșire, numită intrare (sursă) în rețea, și o poziție unică $P_n \in P$, având tranziții doar pe intrare, numită ieșire (destinație) din rețea, fiecărei tranziții atribuindu-i-se un număr $c_k \geq 0$, k=1,...m, numit *capacitatea tranziției*, aceasta fiind validă pentru un număr de mărci transferat mai mic sau egal cu c_k. În figura 1, este reprezentată o rețea Petri pentru care $P = \{P_0, P_1, \ldots P_6\}$. $T = \{T_1, T_2, \ldots T_{11}\}$. Mulțimii tranzițiilor i se asociază vectorul capacitate $C = (c_1, c_2 \ldots c_{11})$. Poziția P_0 este intrarea în rețea (sursa), iar poziția P_6 este destinația (ieșirea din rețea).

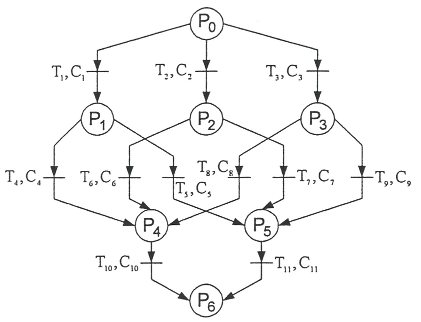

Figura 1.

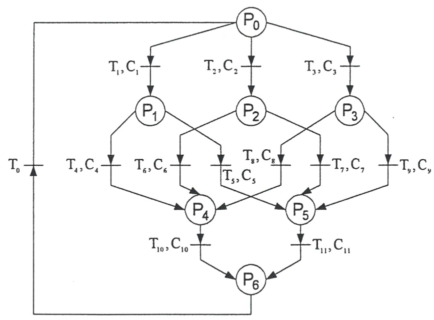

Figura 2.

Fiind dată o rețea de transport RPt cu sursa P_0 și destinația P_n, notăm cu RPt^0 rețeaua obținută din RPt prin adăugarea tranziției de retur T_0. Pentru exemplificare, în figura 2, este prezentată o astfel de rețea obținută din rețeaua din figura 1.

Definiția 1.2. Numim flux de la P_0 la P_n în rețeaua RPt, vectorul $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m)$ care verifică legea conservării fluxului în toate pozițiile cu excepția pozițiilor P_0 și P_n, iar pentru acestea $\sum\limits_{T_k \in PostP_0} \varphi_k = \sum\limits_{T_k \in PreP_n} \varphi_k$, valoare notată φ_0 .Cantitatea φ_0 se numește valoarea fluxului Φ și se consideră fluxul corespunzător arcului de retur.

Observație. Dacă $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_m)$ este un flux de la P_0 la P_n în rețeaua RPt, de valoare φ_0, atunci $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_m)$ este un flux simplu în RPt^0.

Problema fluxului maxim de la P_0 la P_n, într-o rețea Petri de transport (RPt), este de a determina un flux $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, ...\varphi_m)$ în RPt^0 care verifică restricțiile de capacitate $0 \le \varphi_k \le c_k$, și valoarea fluxului φ_0 este maximă. Un flux care verifică restricțiile de capacitate se numește flux compatibil cu capacitățile sau flux admisibil.

2. Proprietățile rețelei Petri de transport

Ca la oricare rețea Petri, și la RPt se disting proprietățile principale, definite în continuare.

a) **Marcaje accesibile**

Într-o rețea Petri de transport, marcajul este determinat de intensitatea sursei (cantitate aflată inițial în poziția sursă) și de fluxul generat în rețea. Marcajul inițial al RPt este un vector pe care, pentru acest tip de RP, îl vom nota cu D (elementele sale sunt intensitățile pozițiilor) având doar primul element diferit de zero. În funcție de fluxul stabilit prin tranzițiile rețelei, marcajul se modifică, prin execuția succesivă a tranzițiilor și luând în considerare toate variantele posibile. Pentru exemplificare, considerăm rețeaua din figura 3 pentru care mulțimea pozițiilor este $P = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$, mulțimea tranzițiilor $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$. Cantitatea (numărul de mărci) din P_0 este 5 și urmează a fi transportată în P_4 prin centre (poziții) intermediare. Marcajul inițial al rețelei Petri de transport din figură este $D_0=(5,0,0,0,0)$.

Ținând cont că fiecare tranziție are o capacitate de transport, vectorul capacitate fiind $C(2,3,2,3,5,4,2,3,\infty)$, validarea fiecărei tranziții se face pentru flux (număr de mărci) trecând prin tranziția respectivă, mai mic sau egal cu capacitatea tranziției. De exemplu, T_1 este validă pentru $\varphi_1 \le 2, T_2$ pentru $\varphi_2 \le 3$, $T_3 \le 2$ etc.

Pentru exemplificare, considerăm rețeaua din figura 3 pentru care mulțimea pozițiilor este $P = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$, mulțimea tranzițiilor $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}$. Cantitatea (nr. de mărci) din P_0 este 5 și urmează a fi transportată în P_4 prin centre (poziții) intermediare. Ținând cont că fiecare tranziție are o capacitate de transport, vectorul capacitate fiind $C(2,3,2,3,5,4,2,3,\infty)$, validarea fiecărei tranziții se face pentru flux (număr de mărci) trecând prin tranziția respectivă, mai mic sau egal cu capacitatea tranziției. De exemplu, T_1 este validă pentru $\varphi_1 \le 2, T_2$ pentru $\varphi_2 \le 3$, $T_3 \le 2$ etc. Marcajul inițial al rețelei Petri de transport din figură este $D_0=(5,0,0,0,0)$. După execuția tranzițiilor T_1, T_2, T_3 un marcaj posibil al rețelei ar putea fi $D_1=(0,2,2,1,0)$.

Scopul rețelei Petri de transport este de a transfera toate mărcile (sau cât mai multe) din poziția sursă în poziția destinație și, conform definiției fluxului toate pozițiile, exceptând sursa și destinația au marcaj (intensitate) nul(ă), deci marcajele accesibile ale unei R Pt au valori nenule pentru primul și ultimul element. Astfel, prin execuția secvenței T_1, T_5, T_8, marcajul rețelei din figură va fi $D_2=(3,0,0,0,2)$. Mulțimea marcajelor RPt pornind din D_0 o notăm cu ${}^*D_0 = \{D_0, D_1, ...D_K\}$. Marcajul inițial al unei rețele Petri de transport este superior oricărei marcaj accesibil.

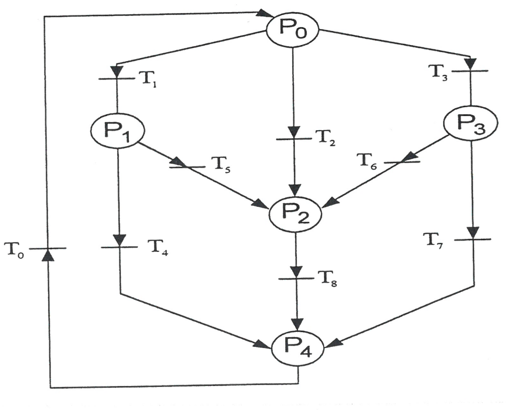

Figura 3

b) **Mărginirea.** Reţeaua Petri de transport este k-mărginită, k fiind numărul de mărci aflat iniţial în poziţia sursă.

c) **Viabilitatea.** Orice reţea Petri de transport este viabilă dacă sunt îndeplinite condiţiile impuse de flux.

d) **Blocajul.** O reţea Petri de transport se blochează după transferul fluxului maxim.

e) **Conflictul.** Într-o reţea Petri de transport apar conflicte structurale şi aparente.

f) **Invarianţi.** Ca orice reţea Petri ordinară, RPt cu flux este o reţea conservativă având componente conservative. De exemplu, în reţeaua din figura 3, se conserva suma mărcilor din P_0 şi P_4 la valoarea 5 (pentru orice moment suma mărcilor din poziţiile P_0 şi P_4 este 5). Componente conservative pentru exemplul dat sunt $P_0P_1P_4$, $P_0P_1P_2P_4$, $P_0P_3P_4$, $P_0P_3P_2P_4$, deci *invarianţi de marcaj*. Secvenţele de tranziţii executabile între poziţiile de intrare şi ieşire din reţeaua Petri de transport, cu flux, care restabilesc marcajul iniţial, sunt invarianţi de execuţie.

3. Drumuri în R Pt

Numim *drum* într-o reţea Petri de transport, o secvenţă executabilă între sursă şi destinaţie. Drumurile reţelei din figura 2. sunt secvenţele executabile de la P_0 la P_6: $S_1=(T_1,T_4,T_{10})$, $S_2=(T_1,T_5,T_{11})$, $S_3=(T_2,T_6,T_{10})$, $S_4=(T_2,T_7,T_{11})$, $S_5=(T_3,T_8,T_{10})$, $S_6=(T_3,T_9,T_{11})$.**Capacitatea unei secvenţe** executabile (drum) într-o RPt este capacitatea minimă a tranziţiilor participante la secvenţă.

4. Reprezentarea matriceală a unei reţele Petri de transport

4.1. Matrici de incidenţă

O reţea Petri de transport poate fi reprezentată cu ajutorul matricelor: **Pre=**$[W^-]$, şi **Post=**$[W^+]$ (denumite şi matricele *înainte* şi respectiv *înapoi)* şi al matricei de incidenţă **W= Post- Pre** de dimensiuni **n**x**m**, în care n este numărul de poziţii iar m de tranziţii şi unde:

$$\begin{matrix} [W^-]=[w_{ij}^-] \\ [W^+]=[w_{ij}^+] \end{matrix} \quad \text{unde} \quad \begin{matrix} w_{ij}^- = Pre[P_i,T_j] \\ w_{ij}^+ = Post[P_i,T_j] \end{matrix}$$

Pentru comoditatea exprimării, se consideră reţeaua RPt din figura 1, pentru care se obţine:

$[W^-]=$

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}
P_0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
P_1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
P_2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
P_3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
P_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
P_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
P_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$[W^+]=$

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11
P0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
P4	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
P5	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
P6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Se defineşte matricea de incidenţă astfel:

$$[W]=[W^{+}]-[W^{-}]=[w_{ij}], \tag{1}$$

unde $w_{ij}=w_{ij}^{+}-w_{ij}^{-}$.

Pentru reţeaua Petri de transport de transport din figura 1, matricea de incidenţă este următoarea:

[W]=

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}
P_0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
P_1	1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0
P_2	0	1	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0
P_3	0	0	1	0	0	0	0	-1	-1	0	0
P_4	0	0	0	1	0	1	0	1	0	-1	0
P_5	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	-1
P_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

O reţea Petri de transport poate fi reconstituită utilizând **Wo** adică matricea de incidenţă completată cu To, ea fiind o descriere sugestivă a intrărilor şi ieşirilor din poziţii. Cu ajutorul matricei de incidenţă completată cu T_0 poate fi exprimată şi *legea conservării fluxului* în poziţiile reţelei Petri de transport, $[W]\cdot[\Phi]=0$.

4.2. Ecuaţia fundamentală

Analog marcajului unei reţele Petri pure, poziţiilor unei reţele Petri de transport li se atribuie o intensitate. Distribuţia pe cele *n* poziţii a intensităţilor este exprimată printr-un vector:

$$[D]=[d_1,d_2,...d_n]'$$

unde, aici şi în continuare, apostroful semnifică operaţia de transpunere a vectorului sau matricei.

Unei secvenţe de tranziţii S, i se ataşează vectorul caracteristic $[S]=[s_1,s_2,...,s_m]'$, de componente numere întregi, pozitive, s_i unde $i\in\{1,2,...m\}$, a căror semnificaţie este următoarea:

- $s_i=0$, dacă tranziţia T_i nu face parte din secvenţa S;
- $s_i\neq 0$, dacă în cadrul secvenţei S, T_i face parte de s_i ori.

Într-o reţea Petri de transport, vectorul caracteristic S este însoţit de vectorul flux Φ (sau poate fi substituit de Φ ale cărui componente reprezintă fluxurile corespunzătoare tranziţiilor din secvenţă.

$$[\Phi]=[\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,...\varphi_m]'.$$

Dacă în urma execuţiei secvenţei S, pentru o reţea Petri de transport, caracterizată de matricea de incidenţă $[W]$, intensitatea poziţiilor se modifică din D' în D'' atunci are loc relaţia:

$$[D'']=[D']+[W]\cdot[\Phi] \tag{2}$$

Această relaţie se numeşte *ecuaţie fundamentală a RPt*

Exemplul 4.1: Se consideră reţeaua de transport din figura 1, pentru care matricea intensitate este: $[D]=[30,0,0,0,0,0,0]'$.Capacităţile tranziţiilor reţelei sunt exprimate printr-un vector coloană C=(5,3,4,7,2,9,5,8,9,10,12).Se solicită execuţia unei secvenţe de tranziţie (un drum în RPt), S=$T_1T_4T_{10}$, care are capacitatea, minimul capacităţilor tranziţiilor T_1,T_4,T_{10}. Capacitatea secvenţei S este minim (5,7,10)=5.

Fluxul tranzitat de secvenţa de tranziţii S va fi $\varphi=5$. Matricea asociată vectorului Φ, caracteristic acestei etape este: $[\Phi]=[5,0,0,5,0,0,0,0,0,5,0]'$.

Utilizând matricea de incidenţă, determinată anterior, din ecuaţia fundamentală (2) rezultă:

$$D''=D'+W\Phi == \begin{bmatrix}30\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-5\\0\\0\\0\\0\\0\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25\\0\\0\\0\\0\\0\\5\end{bmatrix}$$

Deci, matricea intensitate, ce descrie starea sistemului modelat prin RPt, după execuția secvenței S ,este: $[D'] = [25,0,0,0,0,0,5]^t$.

4.3 Determinarea drumurilor în RPt

Într-o rețea Petri de transport, un drum între sursă și destinație, poate fi exprimat fie ca o succesiune de tranziții între intrarea și ieșirea din rețea, fie ca o succesiune de poziții astfel încât prima poziție este sursa și ultima este destinația transportului.

Se pune problema construirii unor algoritmi de determinare a drumurilor în fiecare din modurile enunțate mai sus.

A. ***Succesiune de tranziții-invariant de execuție.*** Pentru început trebuie precizat că drumurile exprimate prin succesiuni de tranziții se stabilesc în RPt^0 deci matricea de incidență este completată cu T_0.

Dacă se notează cu T(S) mulțimea tranzițiilor care apar într-o secvență S, adică:

$$T(S) = \{T_i \in T | s_i \neq 0, unde\ i = 0,1...m\} \tag{3}$$

atunci o submulțime de tranziții T' este o componentă repetitivă (în RPt o componentă repetitivă restabilește marcajul inițial) dacă și numai dacă există o secvență S astfel încât:

$$T(s) = T' \text{ și } [W]\cdot[S] = [0] \tag{4}$$

unde $[0]$ este matricea coloană, de dimensiune n, cu toate elementele nule.

Rezultă că, pentru determinare secvențelor repetitive, este necesar și suficient să se determine vectorii caracteristici S care verifică ecuația:

$$[W]\cdot[S] = [0] \tag{5}$$

Dacă se transpune ecuația (5), se obține:

$$[S]^t \cdot [W]^t = [0]^t \tag{6}$$

Exemplul 4.2 Pentru rețeaua Petri de transport din figura 2. se alege un vector caracteristic,

$$[S] = [1,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,1]^t \tag{7}$$

cu care se verifică relația (6). Rezultă că mulțimea $T^t = = \{T_1, T_4, T_{10}, T_0\} \subset T$ este o componentă repetitivă.

O componentă repetitivă este un invariant de execuție într-o rețea Petri de transport cu flux.

Algoritm de calcul al invarianților de execuție .Din relația (5), se observă că, pentru determinarea invarianților de execuție ai unei rețele Petri de transport, este necesar să se rezolve în numere întregi pozitive un sistem matriceal, cu coeficienți întregi, de forma,

$$[X]\cdot[A] = [0]$$

unde: $[A] = [W]^t$ și $[X]$ sunt vectorii caracteristici.

Algoritmul constă din următorii pași:

Pas 1: Se construiește matricea $[B, A]$, unde inițial $[B] = [I]$. Matricea unitate $[I]$are ordinul egal cu numărul liniilor matricei $[A]$;

Pas 2: Pentru fiecare coloană j a matricei $[A]$se execută următorii paşi:

Pas 2.1: La fiecare linie i a matricei $[B, A]$ se adună o combinație liniară a celorlalte linii, astfel încât să se anuleze elementul, din matricea $[A]$, situat pe linia **i** şi coloana **j**. În combinația liniară, liniile se înmulțesc cu numere întregi pozitive;

Pas 2.2: Se elimină, din matricea $[B, A]$, liniile care în matricea $[A]$, pe coloana **j**, au participat la obținerea elementelor nule;

Pas 3: Invarianții sunt dați de liniile matricei $[B]$, asociate liniilor cu toate elementele nule din matricea $[A]$.

Exemplul 4.3: Se aplică algoritmul pe RPt cu flux ,din figura 2. Pentru calculul vectorilor caracteristici, se consideră $[A] = [W]^t$, unde:

$[W]^t =$

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
T_1	-1	-1	0	0	0	0	0
T_2	-1	0	1	0	0	0	0
T_3	-1	0	0	1	0	0	0
T_4	0	-1	0	0	1	0	0
T_5	0	-1	0	0	0	1	0
T_6	0	0	-1	0	1	0	0
T_7	0	0	-1	0	0	1	0
T_8	0	0	0	-1	1	0	0
T_9	0	0	0	-1	0	1	0
T_{10}	0	0	0	0	-1	0	1
T_{11}	0	0	0	0	0	-1	1
T_0	1	0	0	0	0	0	-1

Pas 1: Matricea are 12 linii, deci $[B] = [I_{12}]$. Rezultă matricea $[B, A]$:

												P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	T_1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	T_2
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	T_3
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	T_4
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	T_5
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	T_6
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	T_7
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	T_8
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	T_9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	T_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	T_{11}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	T_0

Pas 2: Pentru coloana corespunzătoare poziției P_1, rezultă:

Pas 2.1: Se adună linia T_1la linia T_4, se obține linia T_{14};

Se adună linia T_1 la linia T_5 şi se obține linia T_{15};

Pas 2.2: Se elimină T_1, T_4 şi T_5. Rezultă matricea:

												P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	T_{14}
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	T_{15}
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	T_2
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	T_3
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	T_6
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	T_7
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	T_8
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	T_9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	T_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	T_{11}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	T_0

Pas 2: Pentru coloana corespunzătoare poziției P_2, rezultă:

Pas 2.1: Se adună linia T_2 la linia T_6 şi se obține linia T_{26}.

Se adună linia T_2 la linia T_7 şi se obține linia T_{27};

Pas 2.2: Se elimină liniile T_2,T_6,T_7. Rezultă matricea:

												P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	T_{14}
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	T_{15}
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	T_{26}
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	T_{27}
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	T_3
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	T_8
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	T_9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	T_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	T_{11}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	T_0

Pas 2: Pentru coloana corespunzătoare poziției P_3, rezultă:

Pas 2.1: Se adună linia T_3 la linia T_8 şi se obține linia T_{38}; Se adună linia T_3 la linia T_9 şi se obține linia T_{39};

Pas 2.2: Se elimină liniile T_3,T_8,T_9. Rezultă matricea:

												P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	T_{14}
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	T_{15}
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0		-1	0	0	0	1	0	0	T_{26}
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	T_{27}
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	T_{38}
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	T_{39}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	T_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	T_{11}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	T_0

Pas 2: Pentru coloana corespunzătoare poziției P_4, rezultă:

Pas 2.1: Se adună la linia T_1T_4 linia T_{10}, se obține linia T_{1410};

Se adună la linia T_{26}, linia T_{10}, se obține linia T_{2610}.

Se adună la linia T_{38}, linia T_{10}, se obține linia T_{3810};

Pas 2.2: Se elimină liniile T_{14},T_{26},$T_{3,8}$ şi T_{10}. Rezultă matricea:

												P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	T_{1410}
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	T_{15}

0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	T_{2610}
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	T_{27}
0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	T_{3810}
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	T_{39}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	T_{11}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	T_0

Pas 2: Pentru coloana corespunzătoare poziției P_5, rezultă:

Pas 2.1: Se adună la linia T_{15},linia T_{11}, se obține linia T_{1511};

Se adună la linia T_{27}, linia T_{11}, se obține linia T_{2711};

Se adună la linia T_{39}, linia T_{11}se obține linia T_{3911};

Pas 2.2: Se elimină liniile T_{15}, T_{27},T_{39}. Rezultă matricea:

												P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	T_{1410}
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	T_{1511}
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	T_{2610}
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	T_{2711}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	T_{3810}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	T_{3911}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	T_0

Pas 2: Pentru coloanele corespunzătoare pozițiilor P_0 și P_6, rezultă:

Pas 2.1: La liniile T_{1410}, T_{1511},T_{2610}, T_{2711},T_{3810},T_{3911} se adună linia T_0 și se obțin liniile T_{14100}, $T_{1,5,11,0}$, T_{2610}, T_{27110}, T_{38100}, T_{39110};

Vectori caracteristici

Pas 2.2: Se elimină liniile T_{1410}, T_{1511}, T_{2610}, T_{2711}, T_{3810}, T_{3911} și T_0. Rezultă matricea:

												P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	T_{14100}
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	T_{15110}
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	T_{26100}
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	T_{27110}
0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	T_{38100}
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	T_{39110}

Pas 3: Se obțin șase invarianți de execuție (componente repetitive), deci vectorii caracteristici:

F_1=(1,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,1) F_2=(1,0,0,0,1,0,0,0,0,01,1) F_3=(0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,1)

F_4=(0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,1) F_5=(0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,1) F_6=(0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,1,1)

B. ***Succesiune de poziții***

Dacă invarianții de execuție pot fi determinați doar într-o rețea Petri de transport, de flux, drumurile exprimate printr-o succesiune de poziții pot fi determinate cu un algoritm adecvat pentru orice rețea Petri de transport. O metodă relațională ce permite reducerea unei rețele Petri de transport cu ajutorul unor matrice atașate acesteia conduce la obținerea drumurilor în RPt din poziția de intrare în poziția de ieșire.

Metodă relațională de reducere a tranzițiilor unei RPt. Pentru o caracterizare relațională a unei rețele Petri de transport cu n poziții, se poate utiliza o matrice pătratică $R = (r_{ij}) 0 < i, j$. Inițial, matricea R conține câte o linie și câte o coloană pentru fiecare poziție a rețelei, deci are dimensiunea n x n. Dacă există o tranziție Tk care are pe intrare poziția P_i și pe care ieșire poziția P_j, se ia $r_{ij} = k$. Când nu există o astfel de tranziție, $r_{ij} = 0$.

Cu precizările de mai sus, reducerea unei tranziții T_K, se poate face astfel:

1. Dacă pe linia și coloana **i** toate elementele sunt nule, reducerea se face suprimând linia **i** și coloana **i**;

2. Dacă $r_{ij} = k$ şi $r_{ji} = l$, reducerea conduce la o tranziţie impură din care se obţine o poziţie izolată $P_i + P_j$. Reducerea se face punând $r_{ij'}=0$ şi $r_{ji}=0$.

3. Dacă $r_{ij} = k$ şi $r_{ji} = 0$, reducerea se face astfel:

   a) Dacă pe linia **i** toate celelalte elemente sunt diferite de k, la matricea curentă, se adaugă câte o nouă linie şi câte o nouă coloană pentru fiecare element de pe linia **i,** diferit de k, cărora li se ataşează câte o nouă poziţie $P_i + P_j$. Elementele liniilor $P_i + P_j$ respectiv coloanelor $P_i + P_j$, se obţin adunând liniile, respectiv coloanele $P_i + P_j$. Reducerea se face suprimând din matricea obţinută atât liniile cât şi coloanele **i** şi j;

   b) Dacă în matrice mai există şi alte elemente $r_{lj} \neq k$, pe fiecare aceeaşi coloană j din cazul a), unde l este diferit de **i**, la matricea curentă se adaugă câte o nouă linie şi câte o nouă coloană pentru fiecare element de pe linia **i** şi pentru fiecare element de pe coloana j, cărora li se ataşează noi poziţii $P_i + P_j$ şi $P_l + P_j$;

   c) Spre exemplificare, se aplică algoritmul pentru determinarea drumurilor din RPt, ca succesiuni de poziţii, pe reţeaua din figura 1. Reţeaua are şapte poziţii: $P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6$ deci matricea R va avea şapte linii şi şapte coloane. Conform legăturilor dintre poziţii şi tranziţii din RPt considerată, dacă se specifică numai elementele nenule, se obţine următoarea matrice:

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_0		1	2	3			
P_1					4	5	
P_2					6	7	
P_3					8	9	
P_4							10
P_5							11
P_6							

Pentru eliminarea tranziţiilor T_1,T_2,T_3, se aplică regula 3.a şi se obţine:

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0+P_1	P_0+P_2	P_0+P_3
P_0		1	2	3				1	2	3
P_1					4	5				
P_2					6	7				
P_3					8	9				
P_4							10			
P_5							11			
P_6										
P_0+P_1		1	2	3	4	5				
P_0+P_2		1	2	3	6	7				
P_0+P_3		1	2	3	8	9				

După eliminarea liniilor şi coloanelor ataşate poziţiilor P_0,P_1,P_2,P_3, rezultă:

	P_4	P_5	P_6	P_0+P_1	P_0+P_2	P_0+P_2
P_4			10			
P_5			11			
P_6						
P_0+P_1	4	5				
P_0+P_2	6	7				
P_0+P_3	8	9				

Pentru eliminarea tranziţiilor T_{10} şi T_{11} se aplică regula 3.b şi se obţine:

	P_4	P_5	P_6	P_0+P_1	P_0+P_2	P_0+P_3	P_4+P_6	P_5+P_6
P_4			10				10	10
P_5			11				11	11

P_6								
P_0+P_1	4	5					4	5
P_0+P_2	6	7					6	7
P_0+P_3	8	9					8	9
P_4+P_6			10					
P_5+P_6			11					

După eliminarea liniilor şi coloanelor ataşate poziţiilor P_4,P_5, P_6, rezultă:

	P_0+P_1	P_0+P_2	P_0+P_3	P_4+P_6	P_5+P_6
P_0+P_1				4	5
P_0+P_2				6	7
P_0+P_3				8	9
P_4+P_6					
P_5+P_6					

Pentru eliminarea tranziţiilor T_4 şi T_5, T_6 şi T_7, T_8 şi T_9 se aplică regula 3.b şi se obţine:

	P_0P_1	P_0P_2	P_0P_3	P_4P_6	P_5P_6	$P_0+P_1+P_4+P_6$	$P_0+P_1+P_5+P_6$	$P_0+P_2+P_4+P_6$	$P_0+P_2+P_5+P_6$	$P_0+P_3+P_4+P_6$	$P_0+P_3+P_5+P_6$
P_0+P_1				4	5	4	5	4	5	4	5
P_0+P_2				6	7	6	7	6	7	6	7
P_0+P_3				8	9	8	9	8	9	8	9
P_4+P_6											
P_5+P_6											
$P_0+P_1+P_4+P_6$				4	5						
$P_0+P_1+P_5+P_6$				4	5						
$P_0+P_2+P_4+P_6$				6	7						
$P_0+P_2+P_5+P_6$				6	7						
$P_0+P_3+P_4+P_6$				8	9						
$P_0+P_3+P_5+P_6$				8	9						

După eliminarea liniilor şi coloanelor participante la eliminarea tranziţiilor T_4,T_5,T_6, T_7,T_8,T_9 se obţin poziţiile izolate $P_0P_1P_4P_6$, $P_0P_1P_5P_6$, $P_0P_2P_4P_6$, $P_0P_2P_5P_6$, $P_0P_3P_4P_6$, $P_0P_3P_5P_6$.

5. Concluzii

Ideea generării unei reţele Petri de transport este o noutate în modelarea sistemelor de transport, a problemei de transport, în general. Matricea de incidenţă, construită cu ajutorul funcţiilor Pre şi Post oferă o descriere relaţională superioară a transportului în reţea, comparativ cu matricea de adiacenţă a grafului tip reţea de transport. Algoritmii de determinare a vectorilor caracteristici sunt componente de bază în algoritmii dezvoltaţi pentru determinarea fluxului maxim, costului minim, rutelor minimale sau a altor valori optime, cerute de obiectivul unei activităţi de transport.

Bibliografie

1. **BORDEA, GH.**: Modelarea relaţională a sistemelor cu evenimente discrete, Editura Leda & Muntenia, Constanţa.
2. **TOADERE, T.**: Grafe, Teorie, Algoritmi şi aplicaţii, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2002.
3. **BORDEA, GH., V. BORDEA**: The Relational Method of Reducing an Ordinary Petri Net, Analele UMC, 2004.