DESPRE SIMETRIE ŞI IZOMORFISM LA REŢELE DE INTERCONECTARE DIRECTE

Cristian Lupu

(caral@surf.ro)

Centrul pentru Noi Arhitecturi Electronice al Academiei Române

Rezumat: Un graf *Cayley* este un graf ale cărui vârfuri corespund elementelor unui grup finit şi ale cărui muchii corespund acţiunii generatorilor grupului. Grafurile *Cayley* reprezintă astfel grupuri de permutări. Studiul interconectării ca structurare a spaţiului fizic presupune simetria o proprietate esenţială. Ea este analizată prin transformări ce conservă structura spaţiului (automorfisme) şi care stau la baza conceptului geometric al asemănării, faţă de care congruenţa este un caz special. Automorfismele formează un grup. În raport cu orientarea, congruenţele pot fi im/proprii. Putem astfel defini simetria: considerând o anumită structură, se pot evidenţia o mulţime de automorfisme ce-i conservă forma; ele formează un grup ce descrie simetria în cadrul structurii considerate. Grafurile *Cayley* sunt simetrice la vârfuri, deci orice reţea de interconectare directă, reprezentabilă printr-un graf *Cayley*, este simetrică la noduri. Simetria la muchii necesită o analiză prin izomorfism, la care asemănarea intrării şi ieşirii este mai puţin constrânsă, concentrându-se asupra caracteristicilor definitorii ale structurii supuse transformării. De exemplu, între o structură spaţială (reţea de interconectare) şi cea planară, necesară în proiectarea sistemelor VLSI/ULSI, izomorfismul conservă caracteristicile dorite. Deci, deşi amândouă noţiunile au în ultimă instanţă ca suport algebric structura de grup, ele ar putea fi utilizate pentru situaţii diferite: automorfismele în interesul evidenţierii simetriilor unei reţele, izomorfismele cu scopul reprezentării/comparării/ clasificării/asemănării reţelelor.

Cuvinte cheie: reţele de interconectare directe, grafuri *Cayley*, grupuri, simetrie, automorfism, congruenţă, izomorfism, hipercub, hipertor, hipergrilă

1. Introducere. Grafuri *Cayley*

Reţelele de interconectare directe se reprezintă, de obicei, prin grafuri neorientate (nedirecţionate). Reamintim că un graf *neorientat* are *vârfuri* şi *muchii* şi poate fi caracterizat cu ajutorul noţiunilor de *lanţ*, *ciclu*, *conexiune*, în timp ce un graf *orientat* (direcţionat) are *vârfuri* şi *arce* şi poate fi caracterizat prin noţiuni ca *drum*, *circuit*, *conexiune tare* [2]. Vom folosi, în continuare, până la o eventuală precizare, definiţia reţelei de interconectare ca graf, referindu-ne la grafuri finite, neorientate, fără bucle şi fără muchii multiple (vom exclude, deci, multigrafurile).

Graful cu ajutorul căruia vom aborda proprietăţile de simetrie ale reţelelor de interconectare este graful *Cayley*. Un graf *Cayley* este un graf ale cărui vârfuri corespund elementelor unui grup finit G (un grup de permutări) şi ale cărui muchii corespund acţiunii generatorilor grupului G. Între vârfurile a şi b va exista, deci, o muchie dacă există un generator g astfel încât în grupul G să avem $ag = b$. Deoarece ne referim la grupuri ca grupuri de permutări, generatorii vor fi ei înşişi permutări.

Să considerăm generatorii g_1=(1 3 2 4), g_2=(2 1 4 3) şi g_3=(4 3 2 1). Deoarece aceşti generatori sunt permutări de patru simboluri, ei vor genera fie grupul simetric $S_{4!}$ (24 de permutări), fie un subgrup al lui $S_{4!}$. În cazul nostru acest subgrup este format din 8 permutări: 1 2 3 4, 1 3 2 4, 3 1 4 2, 4 2 3 1, 2 1 4 3, 2 4 1 3, 3 4 1 2, 4 3 2 1. Graful *Cayley* corespunzător acestui subgrup este dat în figura 1. De observat că diagonalele nu se intersectează. Observăm că un graf *Cayley*, cum este cel din figura 1, poate fi considerat neorientat numai dacă mulţimea generatorilor, G, este închisă în raport cu inversele. Altfel spus, dacă $g^{-1} \in G$ pentru orice $g \in G$. Aceasta echivalează cu a spune că *mulţimea generatorilor G este ea însăşi un subgrup al grupului simetric* $S_{n!}$.

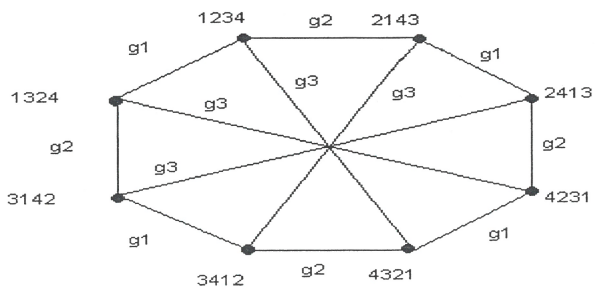

Figura 1: Graful *Cayley* al subgrupului generat de generatorii g_1=(1324), g_2=(2143) şi g_3=(4321)

2. Simetria în sens fizic

Interconectarea are şi sensul *structurării* sau *organizării* unui anumit *spaţiu fizic*. Una din proprietăţile definitorii ale oricărei structurări a spaţiului fizic este cea a *simetriei*. Să vedem cum se defineşte simetria în sens fizic.

Structura spațiului poate fi descrisă printr-un număr de *relații de bază între puncte* [21], cum ar fi, de exemplu, că X, Y, Z sunt situate pe o dreaptă sau X, Y, Z, W sunt plasate într-un plan. Acest mod clasic, euclidian, de a descrie structura spațiului prin *relații între puncte* reprezintă, după noi, punctul de pornire (fizic!) al paradigmei de interconectare la care ne referim aici, adică *rețeaua de interconectare*. O cale de a ajunge la alte paradigme de interconectare ar trebui să rezulte din considerarea altor moduri de a descrie structura spațiului. Credem, de aceea, că putem evolua pe această direcție acordând atenție, pentru început, descrierii structurii spațiului pe baza noțiunii de *congruență* (Newton, Helmholtz). Această descriere depășește paradigma relațiilor între puncte, fiind mai generală și luând în considerare *corpurile, formele*.

Noțiunea de congruență se bazează pe alte două noțiuni, de *transformare* și de *automorfism*. O aplicație S a spațiului asociază oricărui punct p un punct p': $p \rightarrow p'$. O pereche de aplicații, S: $p \rightarrow p'$, S': $p' \rightarrow p$, din care una este inversa celeilalte adică, dacă S duce pe p în p' atunci S' îl duce pe p' înapoi în p, și invers, este o *pereche de aplicații* sau de *transformări*, în care există o *corespondență biunivocă*. O transformare este, deci, o aplicație biunivocă sau o *bijecție*.

Transformarea care păstrează structura spațiului se numește *automorfism*. Aceasta este, după Leibnitz, ideea care stă la baza conceptului geometric al *asemănării*. Astfel, un automorfism transformă o figură într-una care este „indiscernabilă de aceasta, dacă fiecare din cele două figuri este considerată în sine". *Reflectarea* S într-un plan este un exemplu tipic de automorfism. Reținem, în concluzie, echivalența asemănare ≡ automorfism.

O transformare particulară este *identitatea* I care duce fiecare punct p în el însuși. I este propria ei inversă. Reflectarea în plan se bucură de proprietatea că iterarea ei, SS, are ca rezultat identitatea. Dar, în general, *compunerea transformărilor nu este comutativă*: ST nu trebuie neapărat să fie același cu TS.

Să parcurgem alte proprietăți ale automorfismelor. Conform definiției, I este un automorfism. Dacă transformarea S este un automorfism atunci și inversa ei este un automorfism. Compunerea celor două automorfisme, S și T, este, de asemenea, un automorfism. În acest fel, am exprimat abstract următoarele *caracteristici ale asemănării* ca automorfism:

- orice formă (corp, figură) este asemenea cu ea însăși;
- dacă forma F' este asemenea cu F atunci și F este asemenea cu F';
- dacă F este asemenea cu F' și F' cu F'' atunci și F este asemenea cu F''.

Proprietățile de a avea o *operație asociativă* și orice element *inversabil* față de un element unitate aparțin, așa cum se știe, structurii algebrice numite *grup*. Așadar, *automorfismele formează un grup*.

Conform descrierii lui Newton/Helmholtz două părți componente, două volume V și V', ale spațiului sunt „concepute" în așa fel încât pot fi ocupate de același corp rigid, în două dintre pozițiile sale. Mișcând un corp dintr-o poziție în cealaltă, oricare particulă a sa, $p \in V$, va ocupa un punct $p' \in V'$, rezultatul mișcării fiind astfel aplicația $p \rightarrow p'$ a lui V pe V' (o transformare). Corpul rigid, dat arbitrar, se poate extinde pentru a cuprinde orice punct p al spațiului. În acest fel, aplicația $p \rightarrow p'$ poate fi extinsă la întregul spațiu. Această aplicație este chiar o transformare deoarece, evident, are și o inversă, $p' \rightarrow p$. Mai mult, ea este o *asemănare* sau, cum am dedus mai sus, un *automorfism*. Acest fel de transformare care *nu schimbă mărimea dimensiunilor unui corp* se numește *transformare congruentă* sau, mai simplu, *congruență*. Transformările congruente formează și ele, evident, un grup care este un subgrup al grupului automorfismelor.

Introducând mai departe noțiunile de *orientare* și *sens*, congruențele pot fi *proprii* sau *improprii*. Congruențele proprii sunt cele care leagă, păstrează, pozițiile punctelor unui corp rigid dinaintea unei mișcări și după aceea. Ele reprezintă primul sens al congruenței și anume acela al *mișcării spațiale*, prin care de fapt am și introdus această transformare. De aceea, congruențele proprii pot fi denumite, mai simplu, *mișcări*. Congruențele improprii *modifică orientarea* ca în cazul tipic al *reflectării în oglindă* în care un corp își „inversează imaginea" trecând în „imaginea sa din oglindă".

O congruență care lasă pe loc un punct O al unui corp nemișcat este denumită *rotație în jurul lui* O. Rotațiile pot fi proprii și improprii. Rotațiile în jurul unui centru O formează și ele un grup.

Un alt tip de congruențe care formează grup este cel al *translațiilor*, cele mai simple congruențe. O translație poate fi reprezentată printr-un vector cu *lungime* și *direcție*. Translațiile formează un grup deoarece succesiunea (compunerea) a două translații AB, BC, dă ca rezultantă translația AC.

Pe baza celor spuse mai sus, se poate formula acum o *definiție generală a simetriei*: considerând o anumită *configurație spațială*, o *structură*, o *formă*, putem (sau nu) evidenția o mulțime de automorfisme ale spațiului care să lase neschimbată această configurație, structură, formă. Automorfismele astfel evidențiate formează un *grup care descrie precis simetria* pe care o posedă configurația spațială aleasă.

Spațiul *amorf, fără structură* (deducem de aici încă o definiție implicită a structurii!), are o *simetrie totală*, corespunzătoare grupului tuturor automorfismelor. Simetria unui corp, a unei forme, a unei *interconectări* în acest spațiu va fi descrisă, în general, de un *subgrup* (grup şi el) al grupului tuturor automorfismelor. Exprimând structurile prin puncte, deci numere sau permutări, înțelegem acum mai uşor de ce grupul tuturor permutărilor (automorfismelor) se numeşte *grup simetric*, el caracterizând *simetria totală* a structurii spațiului, în timp ce o *simetrie parțială* este exprimată, de exemplu, de grupul (subgrupul) permutărilor ciclice.

3. Simetria grafurilor *Cayley*

Grafurile *Cayley*, ca structuri prin care putem să *reprezentăm* rețelele de interconectare, au anumite proprietăți de simetrie (automorfisme cum am arătat în definiția dată simetriei). O primă proprietate de simetrie a grafurilor *Cayley*, deosebit de importantă, *simetria la vârfuri sau la noduri*, poate fi enunțată sub forma unei teoreme [1]:

Orice graf Cayley este simetric la vârfuri.

Demonstrație. Trebuie arătat că, fiind date oricare două vârfuri ale unui graf *Cayley*, există un automorfism al grafului care face transformarea unuia din vârfuri în celălalt. Fie a şi b cele două permutări corespunzătoare celor două vârfuri. Să considerăm transformarea ba^{-1}. Aceasta face transformarea lui a în b, conform proprietății de asociativitate a grupului permutărilor, $(ba^{-1})a = ba^{-1}a = bI = b$. Mai mult, transformarea este un automorfism. Într-adevăr, dacă două permutări oarecare x şi y sunt conectate printr-o muchie atunci, conform definiției grafului *Cayley*, există un generator astfel încât $xg = y$. Cele două imagini ale permutărilor, $ba^{-1}x$ şi $ba^{-1}y$, vor fi, de asemenea, conectate printr-o muchie, reprezentată tot de generatorul g, deoarece $ba^{-1}xg = ba^{-1}y$. Q.E.D.

Rezultă imediat următorul corolar:

Orice rețea de interconectare directă care poate fi reprezentată printr-un graf Cayley este simetrică la noduri.

Simetria la vârfuri sau la noduri exprimă ideea că graful arată la fel privit din oricare vârf al său. O caracteristică de simetrie mai puternică este aşa numita *simetrie la muchii* sau *la legături*: un graf este simetric la muchii dacă pentru orice pereche de muchii, a şi b, există un automorfism al grafului care transformă pe a în b. Simetria la muchii impune ca fiecare muchie a grafului să arate la fel. Nu orice graf *Cayley* este simetric şi la muchii.

4. Izomorfism

O înțelegere mai bună a proprietăților de simetrie la vârfuri şi la muchii ale grafurilor *Cayley* vom avea comentând şi noțiunile de *izomorfism la vârfuri* şi, respectiv, *izomorfism la muchii* [17]. Până aici am prezentat simetria şi proprietățile de simetrie ale grafurilor *Cayley* pe baza automorfismelor. Izomorfismul pare a fi o noțiune şi mai apropiată de noțiunea de asemănare decât automorfismul! În timp ce automorfismul sugerează evident proprietăți intrinseci, cum este şi simetria, ale unei *singure forme*, izomorfismul ar permite *compararea formelor, corpurilor, structurilor, reprezentându-le în mod diferit*. Deci, deşi amândouă noțiunile au în ultimă instanță ca suport algebric structura de grup, ele ar putea fi utilizate pentru situații diferite: automorfismele în interesul evidențierii simetriilor unei rețele, izomorfismele cu scopul reprezentării/comparării/ clasificării/asemănării rețelelor.

Astfel, două grafuri U şi V sunt izomorfe dacă între mulțimile lor de vârfuri există o corespondență biunivocă astfel încât vârfurile unuia din grafuri sunt unite dacă şi numai dacă vârfurile corespondente ale celuilalt graf sunt unite şi ele. Izomorfismul definit mai sus este înțelesul obişnuit al izomorfismului din teoria grafurilor, el fiind însă doar un *izomorfism la vârfuri*. În figura 2, se dau două exemple de grafuri izomorfe, care sunt o *reprezentare* a unor corpuri tridimensionale în plan.



Figura 2. Grafuri izomorfe la vârfuri, bidimensionale, corespunzătoare poliedrelor tridimensionale tetraedru şi cub

Izomorfismul la muchii a două grafuri se defineşte analog cu cel la vârfuri. Două grafuri U şi V sunt izomorfe la muchii dacă între mulţimile lor de muchii există o corespondenţă biunivocă astfel încât, dacă două muchii E_1 şi E_2 sunt adiacente în U, atunci şi muchiile corespondente E'_1 şi E'_2 din V sunt adiacente, şi invers.

Orice izomorfism la vârfuri determină, de asemenea, şi un izomorfism la muchii, dar invers nu este, în general, adevărat. Nu orice izomorfism la muchii determină şi un izomorfism la vârfuri, figura 3.

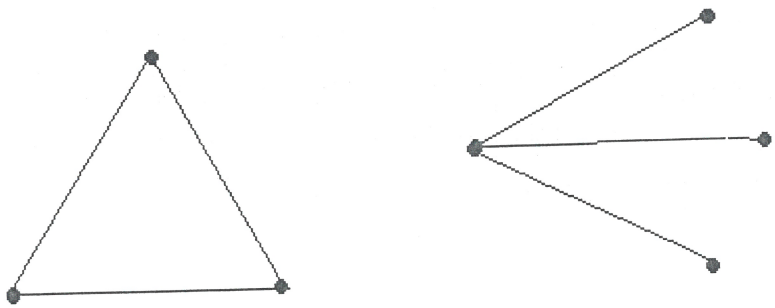

Figura 3: Două grafuri izomorfe la muchii dar nu şi la vârfuri

Reprezentările de reţele ortogonale descrise până aici [8, 9, 10, 11] au un caracter pur *spaţial* ele fiind mai potrivite în vederea investigaţiilor privind organizarea generală a interconectării. Dar dacă această organizare are o destinaţie mai practică, cum este cea a proiectării sistemelor VLSI/ULSI, atunci pot apărea mai productive alte reprezentări cum sunt cele pur planare. Aici intervine *izomorfismul*!

Într-o *reprezentare planară*, structura de interconectare nu mai este „proiectată" ca o structură construită în spaţiu (în general multidimensional) ci ca o structură de interconectare realizată de la început în plan (în două dimensiuni). O reprezentare în plan, echivalentă cu *construirea în plan* a structurii de interconectare, începe, de exemplu, prin plasarea în plan a unor *structuri elementare bidimensionale*. Aşa cum se poate vedea în figura 4 unde am dat o reprezentare planară a hipercubului binar (HCB) din figura 5, structurile elementare sunt HCB, pătrate în cazul nostru, cu N=2x2 noduri. Aceste structuri elementare bidimensionale pot fi considerate un fel de *secţiuni*, *„felii"*, *tăieturi* în corpul reţelei spaţiale. O reprezentare planară va fi, deci, întâi o plasare în plan a acestor „felii" prin „distribuirea" dimensiunilor „perpendiculare" pe planul de secţionare între cele două dimensiuni ale reprezentării şi apoi o trasare a interconectărilor între felii. Reprezentarea din figura 4 s-a obţinut prin metoda „secţionării" reţelei din figura 5 şi este izomorfă cu această figură.

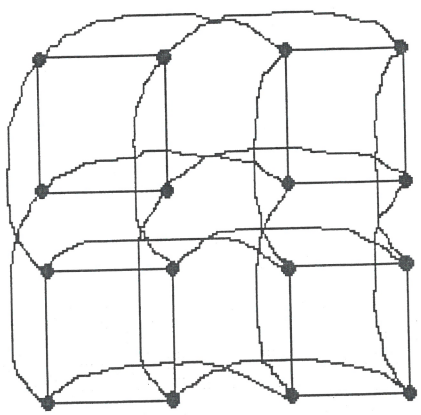

Figura 4: *Reprezentarea planară* prin „secţionare" a hipercubului binar din figura 5

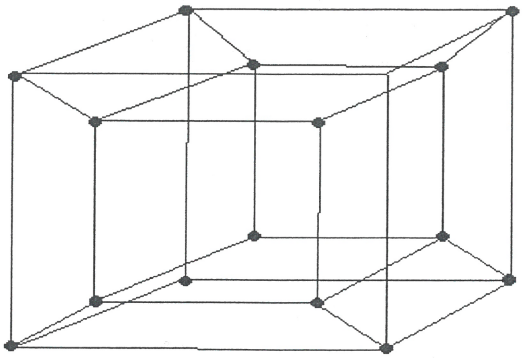

Figura 5: Un hipercub binar cu $N_{HCB}=2^4$ noduri

O distribuție egală a feliilor, deci și a nodurilor și a legăturilor, pe orizontală și verticală, se obține numai în cazul reprezentării planare a unor rețele de tipul hipercub, hipertor sau hipergrilă [8, 9], cu număr par de dimensiuni, ca în exemplul din figura 4. În general, numărul tipurilor de reprezentări planare depinde de numărul planurilor de secționare, $\binom{r}{2}$ și de distribuirea dimensiunilor rămase pe orizontala/verticala reprezentării planare, $\binom{r-2}{2}$, unde r este numărul de dimensiuni.

O altă metodă de reprezentare planară este metoda prin „desfășurare" [7]. O reprezentare prin desfășurare se bazează pe ideea că structura de interconectare este realizată cu ajutorul unei alte structuri elementare pe care o vom denumi *suprafață de interconectare*. Suprafața de interconectare se înfășoară, se închide, într-unul din planele rețelei spațiale. Pentru desfășurarea unei structuri cu mai mult de trei dimensiuni se desfășoară întâi structurile componente tridimensionale, după care acestea se interconectează. În general, plasarea în plan a suprafețelor de interconectare desfășurate, se face analog cu plasarea feliilor în reprezentarea prin secționare.

5. Concluzii

În încheiere, vom înțelege simetria la vârfuri a grafurilor *Cayley* (rețelelor de interconectare pe care le reprezintă) ca pe o proprietate de interșanjabilitate a oricăror două vârfuri, facilitată de faptul că aceste grafuri au grad constant, sunt *regulate*. Simetria la vârfuri a acestor grafuri demonstrează regularitatea rețelelor ce pot fi modelate ca grafuri *Cayley*. Hipergrilele generalizate [9] care nu sunt regulate (deși sunt simetrice) pot fi reprezentate ca grafuri *Cayley*. Ce înseamnă aceasta? Cerința ca un graf să fie simetric este mai puternică decât cea de a fi graf *Cayley*! Am putea extinde spunând că proprietatea de simetrie este mai puternică decât cea de regularitate?! Simetria este mai degrabă *logică*, iar regularitatea este mai degrabă *fizică*. Regularitatea se leagă mai mult de omogenitate, iar cea din urmă se poate asocia cu *localitatea de interconectare* [11]. Simetria, așa după cum vom vedea într-un articol viitor, se leagă de *localitatea de grup*, așa că este plauzibil ca localitatea de grup să fie mai puternică decât localitatea de interconectare. Vom discuta pe larg într-un articol viitor despre legătura localitate-simetrie. Simetria la muchii va însemna proprietatea de interșanjabilitate a oricăror două muchii. Această proprietate nu este generală pentru toate grafurile *Cayley* și este mai puțin „utilizată" pentru a investiga caracteristicile acestor structuri. Proprietatea de izomorfism înseamnă posibilitatea de a *reprezenta* orice graf (inclusiv grafurile *Cayley*) sub diferite forme sau, mai bine, *sub alte forme*. Simetria este o caracteristică „matematizabilă în întregime", dacă putem spune așa, în vreme ce izomorfismul este o proprietate care, deși mai ușor de „formulat", lasă loc și „creației" prin „reprezentare".

Ca posibilitate de reprezentare a grupurilor, grafurile *Cayley* constituie, deci, un mod de exprimare a simetriei/asimetriei unor structurări ale spațiului fizic cum sunt, în fond, și interconectările. O rețea de interconectare va putea fi reprezentată acum clar ca un subgrup al grupului simetric (folosind sau nu proprietatea de izomorfism). Cu cât subgrupul se apropie mai mult de grupul simetric, cu atât simetria se apropie de ceea ce am definit ca simetrie totală. Simetria totală va fi descrisă de un graf *Cayley* care corespunde unei rețele complet

conectate, şi invers: o reţea de interconectare exprimă ca graf *Cayley* o anumită simetrie/asimetrie, parţială, în raport cu simetria totală a spaţiului căreia îi corespunde reţeaua complet conectată.

Bibliografie

1. **AKERS S. B., B. KRISHNAMURTHY:** A Group - Theoretic Model for Symmetric Interconnection Networks. În: IEEE Trans. on Computers, vol. 38, no.4, April 1989, pp. 555-566.
2. **BERGE, C.:** Teoria grafurilor şi aplicaţiile ei, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.
3. **CHEN, G., F. C. M. LAU:** Comments on "A New Family of Cayley Graph Interconnection Networks of Constant Degree Four. În: IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems, vol. 8, no. 12, December 1997, pp. 1299-1300.
4. **DIMAKOPOULOS, V. V., N. J. DIMOPOULOS:** Optimal Total Exchange in Cayley Graphs. În: IEEE Trans. oon Parallel and Distributed Systems, vol. 12, no. 11, November 2001, pp. 1162-1168.
5. **HOFFMAN, C.:** Group Theoretic Algorithms and Graph Isomorphism, Springer Verlag, 1982.
6. 6. **A. LASCU:** Exerciţii de algebră, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.
7. **LUPU, C.:** Contribuţii la dezvoltarea sistemelor de prelucrare neconvenţionale, Teză de doctorat, UPB-Fac. de Automatică şi Calculatoare, conducător ştiinţific Prof. dr. ing. Nicolae Ţăpuş, Mai 1995.
8. **LUPU, C.:** INTERCONECTAREA. Localitate şi simetrie în reţele ortogonale de calculatoare, Editura Tehnică, Bucureşti, 2004.
9. **LUPU, C.:** Reţele ortogonale. În: Revista Română de Informatică şi Automatică, vol. 11, nr. 2, 2001, pp. 28-36.
10. **LUPU, C.:** Generalised Hyper Structures and Interconnection Locality. În: Romanian Journal of Information Science and Technology , vol. 5, nr. 4, 2002, pp. 365-382.
11. **LUPU, C.:** Localitatea de interconectare. În: Revista Română de Informatică şi Automatică, vol. 11, nr. 4, 2001, pp. 32-40.
12. **LUPU, C., A. HAGIESCU:** Un model topografic de evaluare a localităţii de interconectare pentru reţele ortogonale, Raport de cercetare, Mai 2002, Centrul pentru Noi Arhitecturi Electronice al Academiei Române.
13. **LUPU, C., A. HAGIESCU:** Starea de aglomeraţie a unei reţele. În: Revista Română de Informatică şi Automatică, vol. 12, nr. 3, 2002, pp. 24-30.
14. **LUPU, C.:** Locality Measured By Contour Patterns. A Topographic Model. În: Proc. of the 15th IASTED International Conference on Modelling and Simulation, Marina Del Rey, Calfornia, March 1-3, 2004, pp. 50-54.
15. **LUPU, C., T. NICULIU:** Grafuri Cayley, simetrie şi izomofism, Raport de cercetare, Noiembrie 2004, Centrul pentru Noi Arhitecturi Electronice al Academiei Române.
16. **MERIGOT, A.:** Associative Nets: A Graph-Based Parallel Computing Net. În: IEEE Trans. on Computers, Vol. 46, No. 5, pp. 558-571, May 1997.
17. **ORE, O.:** Teoria grafov, Traducere în lb. rusă din lb. engleză, ediţia a doua, Editura Nauca, Moscova, 1980.
18. **ORUC, A. Y., M. Y. ORUC:** On Testing Isomorphism of Permutation Networks. În: IEEE Trans. on Computers, vol. C-34, no.10, Oct. 1985, pp. 958-962.
19. **ROMAN, T.:** Simetria. Prezentare matematică a unor fenomene din natură şi artă, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963.
20. **SAMPELS, M.:** Cayley Graphs as Interconnection Networks: A Case Study. În: Proc. of the Workshop Parcella'96, Berlin, 1996, pp.67-76.
21. **WEYL, H.:** Simetria, Traducere în limba română, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1966.
22. **YANG, Y.:** A New Conference for Group Communication. În: IEEE Trans. on Computers, Vol. 51, No. 9, September 2002, pp. 995-1010.
23. **YUAN, S. Y., S. Y. KUO:** A New Technique for Optimization Problems in Graph Theory. În: IEEE Trans. on Computers, Vol. 47, No. 2, February 1998, pp. 190-196.