TEOREMA NOETHER ŞI FUNDAMENTELE MODELĂRII MATEMATICE

Neculai Andrei

Institutul Naţional de Cercetare – Dezvoltare în Informatică, ICI, Bucureşti
Academia Oamenilor de Ştiinţă din România, Bucureşti

Rezumat. Modelele matematice ale sistemelor fizice se exprimă ca ecuaţii diferenţiale ordinare sau cu derivate parţiale, care provin din legile de conservare. Aceasta asigură corecta formulare a unui model matematic în sensul completitudinii, minimalităţii şi noncontradicţiei expresiei lui. Mai mult, bazate pe limbajul matematic în modelele matematice, cuvintele sunt rectificate. Definite într-o manieră minimală şi necontradictorie, modelele matematice nu se confruntă cu pericolul circularităţii. Teorema Noether arată că legile de conservare provin din simetrii aplicate Lagrangeanului sistemului fizic considerat. Aceasta arată că la baza Universului nostru predictibil se află conceptul de simetrie. Dacă există o lege de conservare, atunci Lagrangeanul trebuie să fie invariant la anumite transformări punctuale infinitezimale, continue. Teorema Noether constituie fundamentul modelării matematice.

Cuvinte cheie: Teorema Noether, simetrie, legi de conservare.

Abstract: The mathematical models of physical sysytems are expressed as systems of partial differential equations. All these equations are comming from the conservation laws, thus obtaining a well posed model satisfaying the completeness, minimality and non-contradiction principles. Besides, using the mathematical language in mathematical models all the words are rectified. Expressed into a minimal and non-contradictory manner, the mathematical models do not face the circularity. By Noether theorem we see that the conservation laws are comming from the symmetries of the Lagrange function associated to the physical system we analyse. Therefore, our known and predictible Universe is based on the concept of symmetry. If there is a conservation law in a system, then the Lagrange function associated to that system must be invariant to some infinitesimal, continuous transformations. Noether theorem is the fundamentals for mathematical modeling.

Keywords: Noether theorem, symmetry, conservation laws.

1. Modele lingvistice versus modele matematice

Într-un fel sau altul, toţi oamenii, ca fiinţe raţionale, sunt familiari cu modele ale lumii înconjurătoare, aşa numitele *modele mentale*, pe care le utilizează în fiecare moment al existenţei lor. Deciziile pe care le luăm nu sunt bazate pe lumea reală, ci pe imaginea mentală pe care o avem asupra lumii, pe imaginea mentală asupra relaţiilor dintre componentele lumii reale şi pe influenţa acţiunilor noastre asupra ei. Modelele mentale constituie deci reprezentarea înţelegerii noastre a unei porţiuni a creaţiei pe care am conştientizat-o. Deoarece suportul gândurilor noastre este cuvântul, şi aşa cum foarte frumos o spune Miron Costin că *„limba noastră este iscusită oglindă a minţii omeneşti"*, modelele mentale sunt de fapt *modele lingvistice*. Cu alte cuvinte, oamenii într-un fel sau altul reprezintă înţelegerea lor asupra lumii, adică asupra porţiunii de univers în care sunt interesaţi, sub forma unei descrieri lingvistice, exprimată sub forma uni corp de aserţiuni (teoreme) de tipul: *dacă ... atunci ....*

Modelele mentale au anumite avantaje care le fac foarte utile. Un model mental este *flexibil* în sensul că poate lua în considerare un domeniu de informaţii mult mai mare decât cel numeric. Acesta se poate *adapta* rapid la noi situaţii şi se poate *modifica* de îndată ce noi informaţii au devenit disponibile. Modelele mentale sunt *filtre* prin care noi interpretăm experienţele noastre, evaluăm planuri de acţiune şi alegem diferite variante de acţiune. Într-un anumit sens, marile sisteme filosofice, politice, doctrinele economice, teoriile fizice, literatura sunt modele mentale.

Dar, modelele mentale au în acelaşi timp anumite dezavantaje care lasă o umbră de regret în utilizarea lor. În primul rând, acestea nu sunt uşor de înţeles de către alţii. Interpretarea lor este foarte dependentă de analist. Apoi, ipotezele pe care acestea sunt construite, de obicei, sunt foarte dificil de examinat şi poate chiar de acceptat. Ambiguităţile şi contradicţiile conţinute în aceste modele pot rămâne nedetectate, neexplicate şi chiar nerezolvate. Faptul că avem dificultăţi în înţelegerea modelelor mentale propuse de alţii pare ceva foarte natural. Mai surprinzător este faptul că noi (ca fiinţe raţionale) nu suntem foarte buni în construcţia şi înţelegerea propriilor noastre modele mentale sau în utilizarea lor în procesul de luare a deciziilor. Psihologii au arătat că nu suntem capabili decât în a considera un număr foarte mic de factori în luarea deciziilor. Cu alte cuvinte, modelele mentale pe care le utilizăm în procesul de luare a deciziilor sunt extrem de simple. Deseori, acestea sunt imperfecte, deoarece în mod frecvent persistăm în eroare în deducerea consecinţelor din presupunerile pe care acestea se bazează şi adesea aceste modele exprimă ceea ce ne-ar place nouă să se întâmple, şi nu ce se întâmplă în mod real. Cel mai mare defect al acestor modele este faptul că acestea, ca şi construcţii intelectuale, nu satisfac criteriile de *completitudine, minimalitate* şi *noncontradicţie* ale aserţiunilor care compun acest model. Este foarte posibil ca într-un model lingvistic să omitem anumite teoreme foarte importante, care schimbă complet semnificaţia acestuia. Evident că se pot introduce anumite aserţiuni care contrazic alte aserţiuni pe care le-am considerat în raţionamentul nostru. Mai mult decât atât, în utilizarea acestor modele, apare problema foarte spinoasă a *rectificării cuvintelor* folosite în descrierea aserțiunilor modelului. Problema corectitudinii numelor este foarte veche. Epopeile homerice[1] conțin foarte multe informații asupra numelor zeilor sau ale unor personaje care sunt definite conform atributelor și caracteristicilor lor. Poeții, scriitorii și înțelepții antici au relevat întotdeauna această preocupare de a scoate în evidență faptul că numele corespunde unei anumite trăsături definitorii a lucrului sau personajului respectiv. În acest sens, se poate face o listă foarte lungă de interpretări ale numelor zeilor sau eroilor din Grecia antică. Socrate ne informează că, în timpul lui, sofistul Prodicos ținea prelegeri despre aceste probleme. În același timp, Protagoras a scris o lucrare despre corectitudinea numelor, iar Platon a precizat-o în dialogul Kratylos. După cum este cunoscut, Socrate susținea că lucrurile au fiecare esența lor și că aceasta se poate preciza într-o definiție care-i conținută în numele lucrului respectiv. Pentru el, corectitudinea numelor înseamnă că *„numele corect arată însăși natura lucrului"*. În Kratylos, el arată că numele sunt date de un *onomatourgós* (*creatorul de nume*), *„o specie de creator care se ivește cel mai rar printre oameni"*. Cu alte cuvinte, nu oricine este îndreptățit să stabilească numele unui lucru, ci numai cel care cunoaște natura lucrului, deoarece numele sunt instrumente de cunoaștere a esenței permanente și invariabile a lucrurilor [5], [6], [7], [8]. Ca atare, problema aceasta a rectificării cuvintelor limitează foarte mult utilitatea unui model lingvistic într-un grup de oameni. În finalul acestei caracterizări a modelelor lingvistice, pe lângă defectele menționate, trebuie să remarcăm faptul că, în procesul de analiză (rezolvare) a acestora, este foarte posibil să apară *pericolul circularității*. Această problemă a circularității sistemelor formale a fost precizată de Gödel care a arătat că speranța de a exprima cunoașterea într-un mod formal este iluzorie și că există în sistemele logice formale principale (ca acela al lui Russel și acela al lui Zermelo-Fraenkel dezvoltat de von Neumann) sau în sisteme înrudite, probleme (aserțiuni, teoreme) relativ simple, care nu se pot rezolva în acel sistem. Cu alte cuvinte, Gödel a arătat că în sisteme logico-formale (lingvistice), utilizând semnele sistemului și regulile de inferență ale acestuia, este posibil ca o expresie corect formulată în sistem să fie nedecidabilă. Astfel, Gödel a relevat divorțul care există între adevăr și demonstrabil în cadrul sistemelor formale (modelelor lingvistice). Înțelesul termenului de nedecidabil este acela că aserțiunea respectivă din modelul lingvistic considerat nu este nici demonstrabilă și nici nedemonstrabilă în sistemul în care a fost formulată conform regulilor acelui sistem [9, p. 226]. Vedem deci că modelele lingvistice au limitări foarte serioase, care ne plasează într-o stare de interogație foarte profundă în ceea ce privește utilizarea lor.

Eșecul utilizării în mod rațional a modelelor lingvistice în luarea deciziilor a fost foarte bine explicat de cercetătorii comportării grupurilor de oameni în organizații. Aceștia au arătat că deciziile nu sunt luate prin considerarea rațională a obiectivelor, opțiunilor și a consecințelor, ci acestea sunt făcute în baza unor prejudecăți, utilizând proceduri standard care se bazează pe tradiții, precum și pe o foarte mică adaptare a concepțiilor la noile condiții. Perspectivele luării individuale a deciziilor pot fi foarte parohiale în sensul că acestea pot fi puternic influențate de contextul organizațional, relațiile cu autoritatea, presiuni externe sau interne, perspective culturale, precum și o anumită motivație personală. Ca atare, multe decizii bazate pe modele mentale sunt total incorecte. Totuși, acestea au o anumită importanță care nu trebuie ignorată. Modelele mentale constituie o primă reprezentare a porțiunii creației în care suntem interesați de ce constituie fundamentul elaborării modelelor matematice asociate acelei porțiuni.

Prin model matematic înțelegem o exprimare în simboluri matematice, utilizând concepte matematice, a relațiilor care se instituie între variabilele și parametrii proprii unei porțiuni a creației în care suntem interesați. De cele mai multe ori, în relațiile (deseori vectoriale) care descriu modelul matematic, intervin variabilele și derivatele lor, ceea ce exprimă, pe de-o parte, caracterul *local* al modelului, precum și pe cel de *predictibilitate*, pe de altă parte. Modelele matematice oferă o serie de avantaje față de cele lingvistice. În primul rând, acestea nu suferă de nici unul dintre defectele modelelor lingvistice pe care le-am discutat mai sus. Acestea sunt explicite în sensul că ipotezele și presupunerile pe care se bazează sunt publice și la îndemâna oricărei critici. În al doilea rând, consecințele (logice) care rezultă din rezolvarea acestora sunt bine justificate matematic. În final, acestea sunt mult mai comprehensive fiind capabile să gestioneze simultan o multitudine apreciabilă de factori.

Dar, cea mai importantă caracteristică a modelelor matematice este că *acestea se scriu pe baza legilor de conservare.* Esența unui model matematic este dată de legile de conservare, invocate în scrierea acestuia. O lege sau o *lege a naturii* este o generalizare științifică, bazată pe observații empirice repetate de-a lungul anilor și care este acceptată de comunitatea științifică. Scopul fundamental al științei este descoperirea legilor. Trebuie

[1] Întreaga cultură și civilizație europeană se bazează pe *epopeile Homerice*, Iliada și Odiseea, și pe *Biblie*. Altfel spus, în afara Bibliei, doar Iliada și Odiseea au avut o asemenea influență în sensul definirii conceptelor fundamentale cu care operăm și astăzi. Ceea ce este foarte important de notat este faptul că acestea la început au fost transmise pe cale orală. Pentru cei vechi întreaga educație era fondată pe scrierile homerice, care se învățau de dinafară. Totul se explica printr-o trimitere la versurile din Iliada și Odiseea. Așa încât, pentru un bărbat, partea cea mai importantă a culturii lui era de a fi priceput în interpretarea operelor poetice. Grecii au fost cei care au inventat un sistem de scriere simplu și eficient, prin asocierea unui semn fiecărui sunet. Acest principiu a făcut posibilă învățarea rapidă a acestuia, ceea ce a permis consemnarea ideilor. Să ne reamintim că tot orientul era plin de scribi.

să facem o distincție clară între legile naturii și alte legi cum ar fi cele civice, morale, religioase etc. Legile naturii sunt concluzii bazate pe experimente științifice controlate, care pot fi repetate de-a lungul timpului. Formularea legilor a constituit o preocupare încă din timpurile antice. Ilustrele figuri ale Babilonului, ale Egiptului antic, ale Greciei, inclusiv Aristotel, au încercat formularea legilor precizând condiția și dorința fundamentală a omului de a face predicții, de a cunoaște viitorul. Totuși, cu foarte mici excepții, încercările anticilor în formularea legilor au eșuat, datorită mai ales lipsei unor definiții corecte, operarea cu observații experimentale lipsite de acuratețe, precum și de prezența unor prejudecăți de cele mai multe ori de natură religioasă. De obicei, legile exprimă *conservarea unei cantități, precum și a simetriilor sau a omogenității spațiului și timpului.* Este important de notat că aceste proprietăți ale legilor și, mai ales, exprimarea simetriilor ne face să spunem că legile naturii au o anumită frumusețe intelectuală, o anumită estetică observată deseori și în expresia matematică a acestora, laconică, simplă.

Legile naturii sunt consecințe ale diferitelor simetrii matematice. În acest sens, teorema lui Noether este reprezentativă aici deoarece aceasta, după cum vom vedea, leagă legile de simetrii. De exemplu, conservarea energiei este o consecință a simetriei temporale (nici un moment de timp nu este diferit de altul, nici un moment de timp nu este privilegiat), în timp ce conservarea momentului este o consecință directă a simetriei (omogenității) spațiului (nici un loc în spațiu nu este special sau diferit de altul). Simetria parțială dintre timp și spațiu conduce la transformările Lorentziene, care la rândul loc conduc la teoria specială a relativității. Simetria dintre masa inerțială și cea gravitațională conduce la teoria generală a relativității. În esență, putem spune că *legile naturii sunt expresii matematice ale anumitor simetrii sau ale omogenități timpului, spațiului etc.* Cu alte cuvinte, sunt anumite cantități (de exemplu, originea coordonatelor pentru timp sau spațiu) care nu depind de nimic. Căutarea legilor și ale obiectelor fundamentale ale naturii este sinonimă cu căutarea celui mai general grup de simetrii, care se poate aplica interacțiunilor fundamentale. Și aceasta este contribuția esențială a lui Noether care a relevat tocmai acest mariaj dintre legi (legile de conservare) și simetrii sau, mai profund, dintre legi și dualitate.

Esența modelelor matematice constă în faptul că, prin reprezentarea simbolică a fenomenelor care se desfășoară în porțiunea de creație considerată, este posibilă scufundarea acestei reprezentări în domenii matematice abstracte, în care funcționează raționamentele logice fără nici o influență a semnificației fizice a variabilelor și parametrilor proprii acestei reprezentări. Totuși, trebuie să remarcăm faptul că, în practică, apar o serie de probleme cu modelele matematice. Deseori, acestea sunt foarte puțin documentate astfel încât examinarea ipotezelor lor este dificilă. Documentarea este cu atât mai deficitară, cu cât înțelesul comun al descrierii mentale este mai dispersat. Modelele matematice suferă în condițiile în care apar relații între factori greu de cuantificat, pentru care nu se dispune de date numerice, sau care se află în afara domeniului de expertiză a analistului. Mai mult decât atât, deseori, acestea sunt foarte complicate așa încât utilizatorul își pierde încrederea în consistența sau corectitudinea relațiilor care caracterizează modelul matematic respectiv. Cu toate acestea, modelarea matematică în industrie, economie sau societate reprezintă una dintre cele mai importante activități.

Există o chestiune pe care trebuie să o menționăm aici. Aceasta se referă la *importanța scopului modelului*. Un model trebuie să aibă un scop foarte bine definit și acesta este de a participa la înțelegerea problemei pentru care a fost construit. Un scop clar exprimat este cel mai important ingredient al studiului problemei prin modelare. Fără îndoială, un model cu un scop clar poate fi incorect, dificil de înțeles, de mari dimensiuni etc. Dar un scop clar exprimat permite utilizatorilor să pună întrebări care să evidențieze dacă modelul este folositor sau nu pentru rezolvarea problemei considerate. Orice model este o reprezentare a unui grup de elemente aflate într-o interdependență funcțională. Pentru a fi folositor, un model trebuie să se concentreze pe o anumită problemă specifică și trebuie, mai degrabă, să simplifice decât să încerce să oglindească în detaliu întreaga porțiune a creației considerată. Construcția unui model este *arta de a ști ce să se elimine*. Scopul modelului acționează ca un *bisturiu logic*. Acesta furnizează criterii în raport cu care anumite detalii devin nesemnificative, astfel încât numai trăsăturile esențiale să fie conținute în model. Utilitatea unui model constă tocmai în faptul că acesta simplifică realitatea, dar păstrând esența acesteia, punând-o într-o formă pe care o putem înțelege.

Trecerea de la modelul lingvistic (mental) la modelul matematic este efortul intelectual maxim pe care-l face un analist. Aceasta presupune o foarte bună cunoaștere a porțiunii creației analizate, a relațiilor dintre diferitele elemente proprii acestei creații. Este vorba aici de apariția unui *model intern* în sensul identificării unei porțiuni a analistului cu creația considerată. O dată construit modelul intern, exprimarea lui în simboluri matematice este o procedură de rutină.

2. Transformări punctuale infinitezimale

Pentru prezentarea rezultatului lui Noether şi înţelegerea importanţei acestuia în stabilirea conexiunii care există între legile de conservare şi simetrii, este necesar să prezentăm conceptul de transformare punctuală infinitezimală [16]. După cum ştim, o lege de conservare afirmă că o anumită proprietate măsurabilă a unei porţiuni izolate a Naturii, un sistem fizic, nu se schimbă când sistemul evoluează. Dar, evoluţia unui sistem se poate formaliza prin transformări punctuale infinitezimale. Ca atare, de aceea suntem interesaţi în transformări punctuale infinitezimale.

Să considerăm, deci, un sistem dinamic cu n grade de libertate şi o transformare punctuală infinitezimală care transformă punctele (q,t) din spaţiul configuraţiilor extins (coordonatele spaţiale şi timpul) în puncte infinit vecine (q',t'). O astfel de transformare se poate defini în termenii unui parametru infinitezimal ε sub forma următoare:

$$t' = t + \delta t, \qquad \delta t = \varepsilon \xi(q,t), \tag{1a}$$

$$q_i' = q_i + \delta q_i, \qquad \delta q_i = \varepsilon \eta_i(q,t). \tag{1b}$$

Observăm că aceste coordonate generalizate q_i şi timpul t sunt transformate simultan. Aceasta ne permite obţinerea regulilor de transformare ale lui $\dot{q}_i$ şi $\ddot{q}_i$ (viteza şi acceleraţia). Într-adevăr, cantitatea $\delta\dot{q}_i$ se calculează în baza faptului că $\dot{q}_i'$ este chiar derivata coordonatei generalizate q_i' în raport cu timpul transformat t'. Din (1), obţinem imediat:

$$\dot{q}_i' = \frac{dq_i'}{dt'} = \frac{dq_i + \varepsilon d\eta_i}{dt + \varepsilon d\xi} = \frac{\dot{q}_i + \varepsilon\dot{\eta}_i}{1 + \varepsilon\dot{\xi}} = \dot{q}_i + \varepsilon\left(\dot{\eta}_i - \dot{\xi}\dot{q}_i\right) + O(\varepsilon^2). \tag{2}$$

Deci,

$$\delta\dot{q}_i = \varepsilon\left(\dot{\eta}_i(q,t) - \dot{\xi}(q,t)\dot{q}_i\right), \tag{3}$$

Ceea ce arată că transformarea punctuală infinitezimală (1) determină în mod unic $\dot{q}_i'$. Utilizând aceeaşi tehnică, putem obţine regula de transformare a lui $\ddot{q}_i'$ astfel:

$$\ddot{q}_i' = \frac{d\dot{q}_i'}{dt'} = \frac{\ddot{q}_i + \varepsilon\left(\ddot{\eta}_i - \dot{\xi}\ddot{q}_i - \ddot{\xi}\dot{q}_i\right)}{1 + \varepsilon\dot{\xi}} = \ddot{q}_i + \varepsilon\left(\ddot{\eta}_i - 2\dot{\xi}\ddot{q}_i - \ddot{\xi}\dot{q}_i\right) + O(\varepsilon^2) \tag{4}$$

Cu aceasta, obţinem variaţia

$$\delta\ddot{q}_i = \varepsilon\left(\ddot{\eta}_i - 2\dot{\xi}\ddot{q}_i - \ddot{\xi}\dot{q}_i\right). \tag{5}$$

Acum, dată o funcţie analitică arbitrară $u(q,t)$, adică o funcţie care local se poate exprima ca o serie convergentă de puteri, atunci variaţia $\delta u = u(q',t') - u(q,t)$ indusă de transformarea punctuală infinitezimală este dată de:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial t}\delta t + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial q_i}\delta q_i = \varepsilon U u(q,t), \tag{6}$$

unde operatorul U reprezintă generatorul transformării punctuale infinitezimale din (1):

$$U = \xi(q,t)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\eta_i(q,t)\frac{\partial}{\partial q_i}. \tag{7}$$

În cazul unei funcții analitice arbitrare $v(q,\dot{q},t)$, care depinde de q, $\dot{q}$ şi timpul t, variația acesteia $\delta v = v(q',\dot{q}',t') - v(q,\dot{q},t)$ este dată de:

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial t}\delta t + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) = \varepsilon U' v(q,\dot{q},t), \tag{8}$$

unde U' este extensia generatorului (7) la acest caz, adică:

$$U' = U + \sum \eta_i' \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}, \quad \eta_i' = \dot{\eta}_i - \dot{\xi}\dot{q}_i. \tag{9}$$

Utilizând aceeaşi tehnică ca mai sus, pentru completare, în general, pentru o funcție analitică arbitrară $w(q,\dot{q},\ddot{q},t)$ variația ei $\delta w = w(q',\dot{q}',\ddot{q}',t') - w(q,\dot{q},\ddot{q},t)$ se poate calcula ca:

$$\delta w = \varepsilon U'' w(q,\dot{q},\ddot{q},t), \tag{10}$$

unde U'' este extensia generatorului (7):

$$U'' = U' + \sum_{i=1}^{n} \eta_i'' \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_i}, \quad \eta_i'' = \ddot{\eta}_i - 2\dot{\xi}\ddot{q}_i - \ddot{\xi}\dot{q}_i = \frac{d}{dt}\eta_i' - \dot{\xi}\ddot{q}_i. \tag{11}$$

3. Teorema Noether

Teorema Noether este un rezultat central în înțelegerea fenomenelor fizice din diverse domenii de activitate şi a naturii matematicii utilizată în descrierea acestor fenomene fizice, care exprimă o corespondență biunivocă dintre legile de conservare şi simetrii. Această corespondență are loc pentru toate legile fizicii care se bazează pe principiul celei mai mici acțiunii, cunoscut de asemenea ca principiul lui Hamilton sau al staționarității acțiunii. Acesta este un principiu variațional, care, când este aplicat acțiunii asociate unui sistem mecanic, ne conduce la formulările Lagrangiene sau Hamiltoniene ale ecuațiilor clasice de mişcare din mecanică. În esență, acțiunea este un scalar, cu unitatea de măsură energie $\times$ timp.

Emmy Noether (1882-1935)

Principiul lui Hamilton spune că evoluția $q(t)$ a unui sistem definită de n coordonate generalizate $q = (q_1, \ldots, q_n)$ între două stări specificate $q_1 = q(t_1)$ şi $q_2 = q(t_2)$, de la două momente de timp t_1 şi t_2 date, este astfel încât realizează minimul acțiunii

$$S(q(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt, \tag{12}$$

unde $L(q,\dot{q},t)$ este funcția Lagrange asociată sistemului. Cu alte cuvinte, principiul lui Hamilton afirmă că evoluția $q(t)$ a unui sistem fizic este soluția ecuației funcționale:

$$\frac{dS}{dq(t)} = 0. \tag{13}$$

De obicei, legile fizicii se exprimă ca ecuații diferențiale (ordinare sau cu derivate parțiale), care specifică modul în care variabilele se modifică în timp la schimbări infinitezimale ale timpului, precum şi ale altor variabile. O ecuație diferențială furnizează un mijloc de a determina valoarea unei variabile fizice la orice moment de timp cunoscându-se punctul inițial şi, eventual, derivata acestei variabile în punctul inițial. Observăm caracterul local ale acestei abordări bazate pe ecuații diferențiale. Utilizarea acțiunii conduce la aceleași rezultate ca ecuațiile diferențiale, dar, în acest caz, acțiunea cere specificarea stării variabilelor sistemului în două puncte, punctul inițial și punctul final. Valorile variabilelor sistemului în toate punctele intermediare între punctul inițial și cel final se pot determina prin minimizarea acțiunii. Echivalența dintre aceste două moduri de abordare este conținută în principiul lui Hamilton, care afirmă că ecuațiile diferențiale de mișcare pentru orice sistem fizic se pot reformula ca ecuații integrale. Acesta se aplică nu numai mecanicii clasice (Newtoniene), ci și câmpurilor clasice: electromagnetic și gravitațional. Observăm caracterul global al abordării bazate pe minimizarea acțiunii.

Teorema Noether leagă cantitățile conservate ale unui sistem cu n grade de libertate cu Lagrangeanul $L(q,\dot{q},t)$ de transformările punctuale infinitezimale (1) care lasă acțiunea Ldt invariantă. Deci, dintre toate transformările punctuale infinitezimale definite de (1), le vom considera pe acelea care lasă acțiunea Ldt a unui Lagrangean dat invariantă, adică

$$L(q,\dot{q},t)dt = L'(q',\dot{q}',t')dt'. \tag{14}$$

Observăm că transformarea punctuală infinitezimală (1) considerată este generală, dând posibilitatea ca funcția Lagrange să se modifice. Dacă ecuațiile de mișcare ale sistemului provin direct din variația acțiunii integrale, conform principiului lui Hamilton

$$\delta \int Ldt = 0,$$

atunci, condiția de invarianță (14) face ca transformarea punctuală infinitezimală (1) să transforme acțiunea integrală (12) într-o altă reprezentare a aceleiași acțiuni integrale. Cu alte cuvinte, sistemul fizic considerat nu este schimbat într-unul diferit, ci doar Lagrangeanul sistemului este infinitezimal modificat (în virtutea transformării (1)) pentru a izola simetriile sale.

Introducând funcția de „etalonare" $f(q,t)$, atunci relația funcțională dintre L' și L se poate exprima sub forma:

$$L'(q',\dot{q}',t') = L + \delta L + \cdots = L(q',\dot{q}',t') - \varepsilon\frac{df}{dt} + O(\varepsilon^2) \tag{15}$$

Vedem că din (3) transformarea $\dot{q} \to \dot{q}'$ este unic determinată de transformările $q \to q'$ și $t \to t'$ din (1). Deci, pentru ca relația (15) să fie valabilă, în general, este necesar și suficient ca $f(q,t)$ să depindă numai de q și t.. Cu acestea, introducând (15) în condiția de invarianță a acțiunii dată de (14) și eliminând termenii de ordin superior în ε, obținem:

$$L(q',\dot{q}',t')dt' = L(q,\dot{q},t)dt + \varepsilon\frac{df(q,t)}{dt}dt'. \tag{16}$$

Dar legătura dintre $L(q',\dot{q}',t')$ și $L(q,\dot{q},t)$ este dată de operatorul U' din (9), adică

$$L(q',\dot{q}',t') = L(q,\dot{q},t) + \varepsilon U'L(q,\dot{q},t). \tag{17}$$

Deoarece $dt' = (1+\varepsilon\dot{\xi})dt$, atunci neglijând termenii de ordin superior în ε, rezultă că

$$\frac{df(q,t)}{dt} = U'L(q,\dot{q},t) + \dot{\xi}L(q,\dot{q},t) \tag{18}$$

Acum, ținând seama de expresia operatorului U' din (9), precum și de generatorul infinitezimal al transformării punctuale (1) dat de (7) din (18), obținem următoarea expresie a derivatei funcției de etalonare:

$$\frac{df(q,t)}{dt} = \dot{\xi}L + \xi\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\eta_i\frac{\partial L}{\partial q_i} + (\dot{\eta}_i - \dot{q}_i\dot{\xi})\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right). \tag{19}$$

Observăm imediat că derivata funcției $f(q,t)$ depinde de funcțiile $\xi(q,t)$ și $\eta_i(q,t)$, precum și de derivatele acestora. În esență, (19) reprezintă o condiție asupra acestor funcții, care, după cum vedem, nu au fost încă specificate. Interpretarea condiției (19) este că dintre toate transformările punctuale infinitezimale (1) numai cele a căror funcții de definiție ξ și η_i satisfac (19) mențin invariantă acțiunea Ldt.

Importanța condiției (19) rezultă imediat din faptul că aceasta se poate rescrie ca o sumă dintre o derivată totală și ecuațiile de mișcare Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left[f(q,t)-\xi L+\sum_{i=1}^{n}(\xi\dot{q}_i-\eta_i)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(\xi\dot{q}_i-\eta_i)\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0. \qquad (20)$$

Dar, de-a lungul traiectoriei sistemului, ecuațiile Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0, \qquad i=1,\ldots,n, \qquad (21)$$

sunt satisfăcute. Deci, din (20) rezultă că integrala în timp I a termenului care rămâne:

$$I=\sum_{i=1}^{n}(\xi\dot{q}_i-\eta_i)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\xi L+f(q,t) \qquad (22)$$

constituie o cantitate conservată, adică o constantă a mișcării sistemului cu Lagrangeanul $L(q,\dot{q},t)$.

În abordarea constructivistă pe care am utilizat-o în această prezentare, spunem că: invariantul dat de (22) împreună cu ecuația diferențială (19) pentru funcția $f(q,t)$ reprezintă teorema Noether.

Menționăm că date fiind condițiile inițiale $(q(t_0),\dot{q}(t_0))$ ale stării sistemului de la momentul de timp t_0, atunci starea sistemului $(q(t),\dot{q}(t))$ este unic determinată de ecuațiile de mișcare Euler-Lagrange (21), care la rândul lor provin din principiul lui Hamilton $\delta\int L dt=0$. Acum, considerând variația $\delta\int L' dt'=0$ a sistemului infinitezimal transformat, scrisă în coordonatele originale ale sistemului pe lângă ecuațiile de mișcare (21), obținem cantitatea I din (22), care se conservă la transformările infinitezimale (1). Observăm că ecuația diferențială (19) pentru funcția $f(q,t)$ depinde de $q(t)$, adică de soluțiile ecuațiilor de mișcare (21).

Ecuația (20) arată că invariantul Noether (22) este cuplat cu ecuațiile de mișcare Euler-Lagrange (21), acestea constituind o pereche intrinsecă a sistemului cu Lagrangeanul $L(q,\dot{q},t)$.

4. Legi de conservare

Teorema Noether este un rezultat major în modelarea matematică a fenomenelor fizice, care arată echivalența care există între legile de conservare asociate unui sistem care respectă principiul celei mai mici acțiuni și simetriile Lagrangeanului. O lege de conservare afirmă că o anumită proprietate măsurabilă a unui sistem fizic izolat nu se modifică când acesta evoluează în timp. Întotdeauna când scriem un model matematic al unui proces fizic dintr-o anumită porțiune bine individualizată a creației, căutăm legile de conservare care se pot asocia fenomenului respectiv. Legile de conservare pot fi exacte în sensul că până acum nu se cunosc experimente care să le încalce. Legile de conservare exacte sunt: conservarea energiei, conservarea momentului liniar, conservarea momentului unghiular, conservarea sarcinii electrice adevărate, conservarea probabilității etc. Pe de altă parte, sunt legi de conservare aproximative. Aceste sunt adevărate numai în situații particulare, cum ar fi de exemplu la viteze mici, pentru intervale de timp foarte mici sau pentru interacțiuni slabe etc. Legile de conservare aproximative sunt: conservarea masei (aplicabilă numai la viteze mici), conservarea parității, conservarea numărului baryonic, conservarea numărului lepton etc.

Conservarea energiei

Acest concept spune că, într-un sistem fizic izolat, energia totală rămâne constantă deși aceasta poate lua diferite forme. De exemplu, frecarea transformă energia cinetică în energie termică. Altfel spus, legea de conservare a energiei afirmă că energia nu poate fi creată sau distrusă, ci doar se poate transforma dintr-o formă în alta. Din punct de vedere matematic, legea de conservare a energiei este o consecință a simetriei în raport cu timpul, deci, conservarea energiei rezultă din faptul constatat empiric că legile fizicii nu se schimbă la translatarea timpului. Din punct de vedere filosofic, aceasta înseamnă că „nimic nu depinde de timp per se”, cu alte cuvinte „nu există un moment de timp privilegiat”.

Cel care a exprimat conversia energiei potențiale în energie cinetică și invers, a celei cinetice în energie potențială, a fost Galilei [1638]. Totuşi, acesta nu a reuşit o exprimare clară a acestui proces. Leibniz a fost primul care a dat o formulare matematică clară a energiei cinetice asociate unei mişcări. El a observat că în sistemele mecanice formate din mai multe mase m_i, fiecare dintre acestea cu vitezele v_i, cantitatea $\sum_i m_i v_i^2$ este conservată în condițiile în care masele nu interacționează. Leibniz a numit această cantitate vis viva sau living force a unui sistem. În limbajul actual, vis viva este energie, termen introdus de Thomas Young în 1807.

Recalibrarea energiei ca $\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$ este rezultatul efortului lui Coriolis și Poncelet și se înțelege ca fiind determinarea valorii exacte a energiei cinetice. Un moment foarte important în înțelegerea și dezvoltarea legii de conservare a energiei a fost dat de demonstrarea echivalentului mecanic al caloriei. În termeni moderni, acest echivalent mecanic al caloriei a fost formulat de Julius Robert von Mayer. Acesta, într-un voiaj în Indii, a observat că sângele pacienților săi era mult mai roșu deoarece aceștia consumau mult mai puțin oxigen și, deci, mai puțină energie pentru a-și menține constantă temperatura corpului într-un climat mult mai cald. Mayer a descoperit că lucrul mecanic și căldura erau două forme de energie, mai târziu chiar calculând relațiile cantitative dintre acestea. În 1843, James Prescott Joule experimental a descoperit echivalentul mecanic al caloriei observând că energia potențială pierdută prin căderea unui corp este egală cu energia termică (căldura) câştigată de un volum de apă obținută prin frecare.

Mai târziu, Helmholtz [1847], bazându-se pe lucrările lui Joule, Sadi Carnot și Émile Clapeyron, a postulat o legătură între mecanică, căldură, lumină, electricitate și magnetism, tratându-le pe toate ca manifestări ale conceptului de energie. Lucrarea sa Über die Erhaltung der Kraft (Asupra conservării forței) prezintă această teorie și constituie începutul abordării moderne a conservării energiei.

Într-adevăr, presupunând că Lagrangeanul nu depinde în mod explicit de timp, atunci derivata totală a acestuia este:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}\right). \tag{23}$$

Utilizând ecuațiile mişcării Euler-Lagrange (21) obținem:

$$\frac{dL}{dt}-\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}\right)=0. \tag{24}$$

Dar, (24) se poate imediat scrie ca:

$$\frac{d}{dt}\left[L-\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]=0, \tag{25}$$

ceea ce arată că expresia de sub derivată este o constantă. Ca o ilustrare, să considerăm un sistem mecanic format din trei mase date m_1, m_2 și m_3 legate prin intermediul a două arcuri cu constantele de elasticitate k_{12} și respectiv k_{13}.

Funcția Lagrange a acestui sistem este dată de diferența dintre energia cinetică T și energia potențială U, adică

$$L(x_1,x_2,x_3,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)=T-U$$

$$=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2-\left[\frac{k_{12}}{2}(x_2-x_1)^2+\frac{k_{23}}{2}(x_3-x_2)^2\right].$$

Dar,

$$\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2+m_3\dot{x}_3^2=2T.$$

Ca atare, deoarece $L=T-U$, din (25) rezultă că cantitatea care se conservă la simetria temporală este

$$L - 2T = T - U - 2T = -(T + U),$$
energia totală a sistemului mecanic considerat.

Conservarea momentului liniar

În mecanica clasică, momentul liniar este produsul dintre masă şi viteza unui corp, $p = mv,$ unde p este momentul liniar, m masa corpului şi v viteza acestuia. Pentru un sistem de n corpuri, fiecare dintre acestea cu masa m_i şi viteza v_i momentul este egal cu suma vectorială a momentelor celor n corpuri:

$$p = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i. \qquad (26)$$

Vedem imediat că forţa este rata de schimbare a momentului, adică

$$F = \frac{dp}{dt}.$$

Pentru cazul în care masa este constantă şi viteza corpului este mult mai mică decât viteza luminii, atunci rezultă că $F = ma,$ care este legea a doua a lui Newton.

În esenţă, momentul ne arată cât de greu este să oprim un obiect caracterizat de o anumită masă şi o anumită viteză.

Pentru sisteme închise, adică sisteme neafectate de forţe externe şi ale cărui forţe interne nu sunt disipative, momentul liniar este o cantitate conservată (este constant). O consecinţă directă a acestei legi de conservare a momentului liniar este că, în absenţa altor forţe, centrul de masă al oricărui sistem de corpuri întotdeauna se va deplasa cu aceeaşi viteză.

Conservarea momentului liniar este o consecinţă matematică a omogenităţii spaţiului, adică a simetriei la deplasare. Din punct de vedere filosofic, conservarea momentului liniar ne arată că „nimic nu depinde de poziţia în spaţiu per se”, cu alte cuvinte „în spaţiu nu sunt poziţii privilegiate”. Conservarea momentului liniar rezultă din faptul constatat empiric că legile fizicii nu se schimbă la translatarea spaţiului.

În mecanica relativistă, pentru a fi conservat, momentul liniar se defineşte ca $p = \gamma m_0 v,$, unde m_0 este masa invariantă a corpului, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ este factorul Lorentz, v este viteza relativă dintre corp şi observator şi c este viteza luminii. La viteze mici, comparate cu viteza luminii, $v/c \to 0$, ceea ce arată că momentul relativistic devine momentul liniar clasic (Newtonian). Pentru obiecte fără masă cum sunt fotonii, momentul este $p = \hbar/\lambda = E/c,$ unde $\hbar$ este constanta lui Planck, λ este lungimea de undă a fotonului şi E este energia fotonului.

Conservarea momentului unghiular

Momentul unghiular al unui corp care se roteşte în jurul unui punct fix este o măsură a continuităţii mişcării rotative a corpului în absenţa cuplurilor care să acţioneze asupra lui. În particular, dacă un corp se roteşte în jurul unei axe, atunci momentul unghiular în raport cu un punct de pe axă este dependent de masa corpului, viteza acestuia şi distanţa acestuia faţă de axa de rotaţie. Momentul unghiular al unui sistem rămâne constant în absenţa cuplurilor care să acţioneze asupra lui. Cuplul este rata cu care momentul unghiular este transferat în şi în afara sistemului. Dacă un corp se roteşte în jurul unui punct, atunci rezistenţa la modificarea mişcării sale rotaţionale este dată de momentul de inerţie.

Momentul unghiular L al unui corp faţă de origine este definit ca: $L = r \times p,$, unde r este poziţia corpului exprimată faţă de origine, p este momentul liniar, iar $\times$ este produsul vectorial. Dacă avem un sistem de corpuri, atunci momentul unghiular faţă de origine al acestui sistem de corpuri se calculează ca fiind suma (sau integrarea) tuturor momentelor unghiulare ale corpurilor care fac parte din sistem.

Conservarea momentului unghiular este o consecinţă matematică a simetriei la reorientare faţă de axele sistemului de referinţă. Din punct de vedere filosofic, conservarea momentului liniar ne arată că „în spaţiu nu sunt axe privilegiate”.

Să considerăm un sistem cu coordonatele $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Lagrangeanul L asociat acestui sistem este o funcţie care depinde de cele n coordonate şi de derivatele lor în timp. Mişcarea sistemului este dată de ecuaţiile Euler-Lagrange (21), câte una pentru fiecare coordonată. Diferenţiala totală a Lagrangeanului este:

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \tag{27}$$

Înmulţind fiecare dintre cele n ecuaţii Euler-Lagrange cu dq_i corespunzător şi adunându-le obţinem:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i\right)\right] = dL. \tag{28}$$

Deci, pentru orice combinaţie de diferenţiale dq_i astfel încât $dL = 0$, suma din membrul stâng din (28) este o constantă, adică o cantitate conservată. Desigur în (28), ceea ce contează aici sunt proporţiile între diferenţiale, şi nu valoarea absolută a acestora. Dacă se consideră s un parametru care parametrizează curba $q_i(s)$ din spaţiul coordonatelor, atunci putem împărţi (28) prin ds pentru a obţine:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dq_i}{ds}\right)\right] = \frac{dL}{ds}. \tag{29}$$

Pentru a ilustra conservarea momentului liniar şi unghiular, să considerăm un sistem compus din N corpuri fiecare de masă m_i şi poziţii x_i, y_i, z_i, pentru $i = 1, \ldots, N$, a cărui energie potenţială depinde numai de distanţa dintre perechile de corpuri. Evident că Lagrangeanul este constant de-a lungul oricărei curbe din spaţiul configuraţiilor (stărilor) de forma $x_i(s) = k_x s,\ y_i(s) = k_y s,\ z_i(s) = k_z s,$ pentru orice constante k_x, k_y şi k_z. Teorema Noether zice că:

$$k_x \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i + k_y \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i + k_z \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{z}_i = K, \tag{30}$$

unde K este o constantă. Deoarece constantele k_x, k_y, k_z sunt arbitrare, rezultă că fiecare dintre cele trei sume din (30) este o constantă, ceea ce înseamnă că momentul liniar este conservat în fiecare dintre cele trei direcţii ale sistemului de coordonate şi, ca atare, în orice direcţie.

Acum, pentru acelaşi set de corpuri putem considera invarianţa Lagrangeanului la o rotaţie fixă, adică la o reorientare a sistemului în jurul originii. Pentru fiecare corp de masă m cu coordonatele x, y, z o rotaţie fixată în jurul axei z, în orice punct, lasă constantă cantitatea $x^2 + y^2$. Deci $xdx + ydy = 0.$ Astfel, diferenţialele pentru această axă de simetrie se pot reprezenta ca: $dx_i = dsy_i,\ dy_i = -dsx_i$ şi $dz_i = 0.$ Din teorema Noether rezultă cantitatea

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i y_i - x_i \dot{y}_i) \tag{31}$$

care este o constantă. Această expresie este conservarea momentului unghiular în jurul axei z. Similar, se poate arăta simetria la reorientare faţă de axa x sau y implică conservarea momentului unghiular faţa de aceste axe.

Conservarea sarcinii electrice

Sarcina electrică este o proprietate fundamentală conservată a anumitor particule subatomice care determină interacţiunile lor electromagnetice. Materia încărcată cu sarcini electrice este influenţată şi produce câmpuri electromagnetice. Interacţiunea dintre sarcinile mobile şi un câmp electromagnetic produce forţe electromagnetice, care sunt una dintre cele patru forţe fundamentale în natură.

Sarcina electrică este o caracteristică a anumitor particule subatomice şi se exprimă ca un multiplu de aşa-numita sarcină electrică elementară e. Prin convenţie, electronii au sarcina electrică -1, protonii au sarcina electrică +1, iar quarcii au sarcini electrice fracționare egale cu -1/3 sau +2/3. Antiparticulele echivalente acestor elemente au sarcini electrice opuse. Sarcina electrică a unui corp macroscopic este suma sarcinilor electrice ale particulelor constituente. Deseori, sarcina electrică a unui corp este zero, deoarece în mod natural numărul de electroni din fiecare atom este egal cu numărul de protoni. Situațiile în care sarcina electrică a unui corp este nenulă este cunoscută ca electricitate statică. Chiar dacă într-un corp sarcina electrică este zero, aceasta poate fi neuniform distribuită (datorită unor câmpuri electrice externe sau a unor şocuri). În acest caz, zicem că materialul este polarizat. Natura discretă a sarcinii electrice a fost propusă de Michael Faraday în urma experimentelor sale referitoare la electroliză şi a fost demonstrată de Robert Millikan în experimentul său „picătura de ulei".

Sarcina electrică este un invariant relativist. Aceasta înseamnă că orice particulă care are o sarcină q, indiferent de viteza cu care se mişcă, întotdeauna aceasta are sarcina q. Sarcina electrică a unui sistem izolat rămâne constantă indiferent de schimbările prin care trece sistemul. Conservarea sarcinii rezultă din ecuația de continuitate şi se exprimă sub forma: viteza de scădere în timp a sarcinii electrice (adevărate) din interiorul unei suprafețe închise S este egală cu intensitatea curentului de conducție i_S care părăseşte suprafața S:

$$i_S = -\frac{\mathrm{d}q_V}{\mathrm{d}t}, \quad \text{sau} \quad \int_C J\mathrm{d}A = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho_V \mathrm{d}V, \tag{32}$$

unde J este densitatea curentului electric de conducție.

Considerând că variația în timp a sarcinii electrice din volumul V este produsă de variația locală în timp a densității de volum a sarcinii, pe de o parte, şi de mişcarea corpurilor, pe de altă parte, atunci forma integrală dezvoltată a legii este:

$$\int_S (J + v\rho_V)\mathrm{d}A = -\int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t}\mathrm{d}V, \tag{33}$$

v este viteza de deplasare a mediului. Această formă a legii arată că sarcina electrică dintr-un domeniu limitat de o suprafață oarecare S scade atât datorată curentului de conducție, cât şi datorită curentului de convecție care părăsesc S. Pentru domenii de continuitate şi netezime, forma locală a legii se obține aplicând teorema Gauss-Ostrogradski primului membru din (33), obținându-se:

$$-\frac{\partial \rho_V}{\partial t} = divJ + div(v\rho_V). \tag{34}$$

Conservarea sarcinii electrice vine din ecuația de continuitate care este o formă locală (tare) a legilor de conservare, deci o consecință a teoremei Noether.

Orice ecuație de continuitate se exprimă ca o ecuație diferențială care descrie conservarea prin transport a anumitor cantități. Deoarece, după cum am văzut, energie, momentul liniar, momentul unghiular, masa, precum şi alte cantități sunt conservate, rezultă că mare parte din fenomenele naturii se pot descrie prin intermediul ecuației de continuitate. În general, orice ecuație de continuitate are o formă diferențială exprimată în termenii operatorului divergență, precum şi o formă integrală exprimată în termenii unui flux. Trecerea de la o expresie la alta se face prin intermediul teoremei divergenței (teorema Gauss-Ostrogradsky), care este un caz special al teoremei lui Stokes, o generalizare importantă a teoremei fundamentale a calcului diferențial şi integral.

Conservarea masei

Legea de conservare a masei (a materiei) sau încă legea Lomonosov-Lavoisier spune că masa substanței unui sistem închis rămâne constantă indiferent de procesele fizice sau chimice care au loc în interiorul sistemului. O formulare echivalentă a acestui principiu este că materia nu poate fi nici creată, nici distrusă, ci doar se poate transforma dintr-o formă în alta. O consecință a acestui principiu este faptul că, pentru orice proces chimic într-un sistem închis, masa reactanților este egală cu masa tuturor produselor obținute în urma procesului chimic respectiv. De asemenea, această lege ne arată că toată materia universului fizic observat are aceeaşi vârstă. Acest concept se aplică în foarte multe domenii ca: mecanică, chimie, dinamica fluidelor etc. Totuşi, în relativitatea specială, în general, masa nu este conservată. Deci, legea conservării masei sau a substanței este o lege aproximativă în sensul că se aplică numai proceselor non-relativiste. Într-adevăr, pentru materie care nu este nici creată şi nici distrusă, timpul nu are nici o semnificație. Cu alte cuvinte, conservarea masei nu se aplică proceselor relativiste.

Principiul că masa unui sistem de particule este egal cu suma maselor lor, chiar dacă este adevărat în fizica clasică, nu mai este adevărat în relativitatea specială. Formula de echivalența masă - energie implică faptul că sistemele mărginite au o masa mai mică decât suma maselor părților lor. Diferența numită defect de masă este o măsură a energiei de legătură, care ține părțile unite în sistem. Cu cât defectul de masă este mai mare, cu atât energia de legătură este mai mare. Când materia este convertită în energie conform relației $E = mc^2$, atunci legea conservării masei nu se aplică. Dacă un atom emite un foton care are masa zero, atunci masa atomului se reduce cu cantitatea E / c^2, unde E este energia fotonului. Cu alte cuvinte, masa unui sistem închis (izolat) se poate reduce prin emisia fotonilor, chiar dacă aceștia rămân în interiorul sistemului.

Legea conservării masei a fost intuită de Lomonosov în urma experiențelor. Cel care a formulat-o într-o manieră clară și distinctă a fost Lavoisier în 1789, deseori recunoscut ca părintele chimiei moderne.

5. Concluzii

Teorema Noether reprezintă instrumentul fundamental pentru stabilirea legilor de conservare, pe care se bazează toate modelele matematice ale fenomenelor fizice, care satisfac principiul minimei acțiuni, deci care au un Lagrangean. Fundamentul modelelor matematice este dat de legile de conservare. Acestea asigură completitudinea și minimalitatea lor, fiind protejate la pericolul circularității în care cuvintele sunt rectificate.

Bibliografie

1. **ANDREI, N.**: Teorie versus empirism în analiza algoritmilor de optimizare. Editura Tehnică, București, 2004.
2. **ANDREI, N.**: Eseu asupra fundamentelor informaticii. Editura Yes, București, 2006.
3. **ANDREI, N.**: Principii și legi modele matematice bazate pe prima metamorfoză a științei. Complemente de Modelare Matematică și Optimizare. Raport Tehnic, ICI, Iulie, 2008.
4. **BYERS, N. E.**: Noether's Discovery of the Deep Connection Between Symmetries and Conservation Laws. Israel Mathematical Conference Proc.. Vol. 12, 1999 presented at the Symposium on The Heritage of Emmy Noether in Algebra, Geometry and Physics, Bar Ilan University, Tel Aviv, Israel, December 2-3, 1996.
5. **DUMITRIU, A.**: Eseuri. Știință și Cunoaștere. Alétheia. Cartea Întâlnirilor Admirabile. Editura Eminescu, București, 1986.
6. **DUMITRIU, A.**: Istoria Logicii. Volumul I. Ediția a III-a revăzută și adăugită. Editura Tehnică, București, 1993.
7. **DUMITRIU, A.**: Istoria Logicii. Volumul II. Ediția a III-a revăzută și adăugită. Editura Tehnică, București, 1995.
8. **DUMITRIU, A.**: Istoria Logicii. Volumul III. Ediția a III-a revăzută și adăugită. Editura Tehnică, București, 1997.
9. **DUMITRIU, A.**: Istoria Logicii. Volumul IV. Ediția a III-a revăzută și adăugită. Editura Tehnică, București, 1998.
10. **HEISENBERG, W.**: Partea și întregul. Discuții în jurul fizicii atomice. Editura Humanitas, București, 2008. [Traducere din limba germană de Maria Țițeica, postfață de Mircea Flonta]
11. **LANCZOS, C.V.**: The variational principles of mechanics. Toronto University Press, 1970.
12. **NOETHER, E.**: Invariante Varlationsprobleme. Nach. D. Könighche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 1918, 235-257.
13. **PENROSE, R.**: The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe. Vintage Books, 2004.
14. **PLĂCINȚEANU, I. I.**: Mecanica Vectorială și Analitică. Ediția a II-a. Editura Tehnică, București, 1958.
15. **PREDA, M., P. CRISTEA, P.**: Analiza și sinteza circuitelor electrice. Editura Tehnică, București, 1968.
16. **STRUCKMEIER, J., C. RIEDEL**: Noether's theorem and Lie symmetries for time-dependent Hamilton-Lagrange systems. Physical Review, Statistical Nonlinear Matter and Soft Matter Physics, E (66) 2002, 066605.