TEORIA RICATTI GENERALIZATĂ PENTRU SISTEME CU TIMP MORT. ABORDARE INDEPENDENTĂ DE ÎNTÂRZIERI

Alexandru Şerbănescu*

alexandru.serbanescu@gmail.com

Florin Boboşatu**

fbobosatu@yahoo.com

** TomTom International B.V., Rembrandtplein 35, Amsterdam, The Netherlands*

*** Alphabank Romania, Calea Dorobanţilor nr. 237B, Bucureşti, România*

Rezumat: Această lucrare este dedicată studiului unor concepte de bază ale teoriei Riccati în cadrul sistemelor cu timp mort (TDS). Printr-o analogie cu cazul sistemelor liniare fără întârzieri, mai multe rezultate fundamentale ale Teoriei Riccati Generalizate sunt extinse şi adaptate la contextul TDS. Rezultatele sunt construite printr-o paralelă cu unele concepte de bază, prezentate în [5], pentru sistemele liniare fără timp mort. Scopul acestui demers este acela de a extinde concepte şi rezultate de bază ale acestei teorii clasice la familia sistemelor cu argument întârziat pe stare. Abordarea este independentă de mărimea timpilor morţi, prezenţi în ecuaţiile de stare. Rezultatele prezentate în lucrare sunt originale şi, în măsura informaţiilor de care dispunem, sunt publicate în premieră. Lucrarea urmăreşte să prezinte şi aspecte practice ale unei asemenea teorii şi să explice într-o formă intuitivă conexiunea unor concepte şi obiecte fundamentale cu unele aspecte concrete din lumea controlului automat, pentru a aduce această abordare teoretică mai aproape de lumea aplicaţiilor reale.

Cuvinte cheie: Teorie Riccati Generalizată, sisteme cu timp mort (eng. Time Delay Systems - TDS), Triplet/Set Popov, inecuaţii matriceale lineare (eng. Linear Matrix Inequalities - LMI).

Abstract: The paper is dedicated to the study of several concepts related to the Generalized Riccati Theory in the case of the Time Delay Systems (TDS). Several fundamental results are extended and generalized in the case of the TDS through an analogy with several fundamental concepts presented in [5] for the case of the delay free systems. The approach is independent of the delay values. The results are original and to the extent of our knowledge published for the fist time. The paper also presents several potential practical benefits of this theory and explains in an intuitive manner the link between several concepts and concrete aspects of the automatic control problems, to bring this approach closer to the world of the real applications.

Key Words: : Generalized Riccati Theory, Time Delay Systems (TDS), Triplet/Set Popov, Linear Matrix Inequalities (LMI).

1. Introducere

Începând cu debutul anilor 70, ecuaţia algebrica Riccati a avut un rol important în teoria sistemelor. Faptul că ecuaţiile Ricatti oferă un bun cadru teoretic, precum şi existenţa unui număr mare de algoritmi numerici robuşti au constituit două din principalele motive care au stat la baza popularităţii acestui tip de abordare. În cazul sistemelor liniare fără întârzieri au fost publicate numeroase articole în ultimele trei decenii, subiectul fiind detaliat sub multiple aspecte. În ultimii ani, însă, sistemele liniare cu timp mort sau „Time Delay Systems" (TDS) au început să atragă atenţia comunităţii ştiinţifice datorită numărului relativ mare de situaţii practice in care sunt regasite. Ca o consecinţă a acestui fapt, a apărut necesitatea extrapolării unora din rezultatele Teoriei Riccati Generalizate în cazul acestei familii de sisteme.

Rezultatele derivate au în vedere o clasă de sisteme liniare cu multiple întârzieri pe stare şi pe ieşire, descrise de ecuaţiile de stare (3.1). În prima parte, sunt prezentate o serie de concepte de bază şi rezultate clasice din Teoria Riccati Generalizată, descrise pe larg în lucrări precum [5] pentru ca apoi în capitolul următor ele să fie extinse şi generalizate în cazul sistemelor cu timp mort. Conceptele prezentate sunt folosite apoi pentru demonstrarea în ultimul capitol a unui rezultat clasic, legat de stabilizarea sistemelor automate prin reacţie după stare cu cost garantat (costul fiind, în acest caz, un indice integral pătratic).

Condiţiile finale ale rezultatelor derivate sunt exprimate în termenii unor Inecuaţii Liniare Matriceale (LMI), care pot fi rezolvate cu unul din Toolbox-urile Matlab pentru programarea semidefinită (Semidefinite Programming - SDP), disponibile pentru download de pe internet. Este o abordare uzuală a acestui gen de probleme, exemple înrudite din familia sistemelor cu timp mort putând fi găsite în lucrări precum [2], [3], [6]...[9].

O problemă de programarea semidefinită este, în esenţă, un set de inecuaţii matriceale liniare împreună cu obiectiv liniar de optimizare, iar în forma duală poate fi descrisă în felul următor:

$$\max_{\hat{y}} \hat{b}^T \hat{y} \text{ cu restricţiile } \quad \sum_{k=1}^{m} \hat{y}_k \hat{A}_k - \hat{C} \leq 0. \tag{1.1}$$

unde $\hat{y}$ este vectorul necunoscutelor scalare $\hat{y}_k$, $\hat{C}$ este o matrice simetrică, iar $\hat{A}_k$ sunt matrice simetrice, pozitiv semidefinite. Pe internet există o serie de toolbox-uri disponibile, care pot rezolva această familie de probleme. În cazul exemplului prezentat, în capitolul 4 a fost folosit SDPT3.2 dezvoltat de Toh, Todd and Tutuncu disponibil la adresa prezentata în [11].

Necesitatea unei abordări suficient de generale, care să acopere o clasă mare de probleme, nu este nouă în cazul sistemelor moderne. Putem considera, spre exemplu, cazul sistemelor de mare complexitate (vezi [10]) sau al sistemelor pentru suportul deciziilor (vezi [4] sau [1]). Dincolo de importanța teoretică a unei teorii generale, care sa poată rezolva într-un cadru comun o multitudine de probleme din teoria sistemelor, acest tip de abordare prezintă şi un profund interes practic.

Formalizarea într-un cadru general a unui mare grup de probleme din teoria controlului automat face posibilă crearea unei librarii software, care ar putea rezolva în comun această clasă de probleme. Presupunând că o asemenea librărie ar expune o metodă care să rezolve o familie de probleme din domeniul controlului automat în cazul cel mai general, sarcina analistului de sistem s-ar reduce doar la definirea variabilelor de intrare în contextul problemei concrete pe care o are de rezolvat. La finalul capitolului 3, sunt prezentate cazurile particulare ale unor seturi Popov (echivalentul pentru TDS a unui triplet Popov), asociate unor probleme clasice. La momentul actual şi, desigur, în limitele cunoştinţelor noastre, există unele funcţii disparate, care pot rezolva unele din aceste probleme, în cazuri nu totdeauna generale şi, de regulă, pentru sisteme fără timp mort. Aceasta s-ar putea datora tocmai faptului că problemele nu au fost abordate într-un cadru teoretic general şi evidenţiază potenţialul unor noi aplicaţii în acest domeniu.

Tradiţional, Teoria Riccati Generalizată este prezentată într-un cadru relativ abstract, care să favorizeze formalismul teoretic. În esenţă însă, există câteva elemente de natură concretă cu importanţă practică, care au stat la baza apariţiei unei asemenea abordări. Din raţiuni de compatibilitate cu alte lucrări ştiinţifice, am evitat schimbarea dramatică a ordinii în care unele elemente sunt prezentate, dar s-au adăugat unele comentarii sub titlul *„Observaţii"* care să ajute cititorul să asocieze intuitiv unele concepte cu situaţii concrete din lumea controlului automat, pentru a argumenta, într-o anumită măsură, necesitatea pentru care au fost introduse.

2. Concepte generale ale Teoriei Generalizate Riccati

Înainte de a aborda cazul sistemelor cu timp mort, vom prezenta câteva aspecte clasice ale Teoriei Riccati Generalizate în cazul sistemelor fără întârzieri, pentru a putea ulterior extinde aceste concepte. În cazul sistemelor fără timpi morţi, ele pot fi regăsite în lucrări de specialitate precum [5].

Unul dintre conceptele de baza ale Teoriei Riccati este tripletul Popov, care, împreună cu alte elemente de bază, furnizează un fundament pentru dezvoltări teoretice ulterioare.

Definiţia 2.1 (Tripletul Popov) Vom numi un Triplet Popov un triplet de matrice.

$$\Sigma = (A, B, P), \quad P = \begin{bmatrix} Q & L \\ L^T & R \end{bmatrix} = P^T, \tag{2.1}$$

unde $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, Q \in R^{n\times n}$ şi $P \in R^{(m+n)\times(m+n)}$.

Cu orice triplet Popov putem asocia un indice cvadratic de performanţă, definit de următoarea funcţională:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} w(t)\, P\, w(t) dt \text{ unde } w(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

iar între două triplete Popov poate exista o relaţie de echivalenţă. Condiţiile necesare pentru ca două triplete Popov să fie echivalente sunt descrise în următoarea definiţie.

Definiţia 2.2 (Echivalenta Tripletelor Popov). Două triplete Popov

$$\begin{aligned} &\Sigma = (A, B, P), \\ &\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{P}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

sunt (X, F) echivalente, în notaţia compactă

$$\Sigma \overset{X,F}{\sim} \widetilde{\Sigma} \tag{2.4}$$

dacă există două matrice $F \in R^{m\times n}$ si $X = X^T \in R^{n\times n}$ astfel încât

$$\begin{aligned}
&\widetilde{A} = A + BF, \\
&\widetilde{B} = B, \\
&\widetilde{Q} = Q + LF + F^T L^T + F^T RF + \widetilde{A}^T X + X\widetilde{A}, \\
&\widetilde{L} = L + F^T R + XB, \\
&\widetilde{R} = R.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Un alt element important asociat cu tripletul Popoov este matricea de disipație, definită în modul următor:

$$D_\Sigma(X) = \begin{bmatrix} A^T X + XA + Q & L + XB \\ B^T X + L^T & R \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Ea ne ajuta să definim Sistemul Algebric Riccati în timp continuu (CTARS) asociat Tripletului Popov Σ

$$D_\Sigma(X)\begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix} = 0 \tag{2.7}$$

având drept necunoscute matricele $F \in R^{m\times n}$ şi $X \in R^{n\times n}$. Dacă înlocuim F în (2.7) obținem Ecuația Algebrica Riccati în timp continuu (CTARE)

$$A^T X + XA + Q - (L + XB)R^{-1}(B^T X + L^T) = 0. \tag{2.8}$$

Luând $X > 0$ şi $P > 0$, putem considera următoarea inegalitate matriceală

$$D_\Sigma(X) \le 0 \tag{2.9}$$

ce va juca un rol important în deducerea unor rezultate ce vor urma.

Considerând un sistem liniar fără timp mort descris de următoarele ecuații de stare

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.10}$$

şi o funcție Lyapunov de tipul

$$V(x(t)) = x^T(t)Xx(t) \tag{2.11}$$

în cazul în care există o pereche de matrice $X > 0$ şi $P > 0$ astfel încât ecuația (2.12) să fie satisfăcută

$$\begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} A^T X + XA & B^T X \\ XB & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q & L \\ L^T & R \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \le 0 \tag{2.12}$$

atunci

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -\begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & L \\ L^T & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Din moment ce am considerat $P > 0$ inegalitatea (2.13) implică

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) < 0 \tag{2.14}$$

Aplicând criteriul Lyapunov de stabilitate şi ținând cont de (2.14), rezultă că sistemul (2.10) este stabil. Integrând (2.13) obținem

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}V(x(t)) \le -J \tag{2.15}$$

Din moment ce sistemul este stabil, atunci când $t \to \infty$ rezultă că şi $V(x(t)) \to 0$ şi corelând acest fapt cu (2.15) obţinem

$$x_0^T X x_0 \geq J \tag{2.16}$$

Acest rezultat ne oferă o limită superioară a indicelui integral. Minimizând termenul stâng al inegalităţii anterioare ($x_0^T X x_0$), minimizăm costul global (efortul de aducere a sistemului în starea de repaus).

Observaţii

Funcţia Lyapunov poate fi văzută ca o reprezentare a potenţialului acumulat în sistem la momentul actual. În cazul unui sistem stabil, desigur derivata unei asemenea funcţii trebuie să fie negativă pentru a asigura convergenţa spre starea de repaus.

Dintr-o perspectivă practică, matricea de disipaţie $D_\Sigma(X)$ poate fi văzută ca fiind punctul de pornire în introducerea Tripletului Popov. Prin existenţa unei soluţii la inegalitatea $D_\Sigma(X) \leq 0$ ea devine un mod de a formaliza condiţiile în care putem garanta o anumită rată de descreştere a potenţialului acumulat pe stare.

Indicele integral J este, de regulă, o funcţie cost şi, în multe probleme de control automat, este un mod de a defini un obiectiv care trebuie minimizat.

Echivalenţa a două Triplete Popov descrie de fapt acea reacţie după stare, care îţi permite pentru sistemul în buclă închisă garantarea unei anumite rate de descreştere a potenţialului acumulat pe stare. Marginea inferioară, în acest caz, este definită de Tripletul Popov. Termenul de triplet Popov, şi nu de matrice Popov, a fost probabil introdus pentru a evidenţia separarea dintre condiţiile legate de vectorul de stare şi cel al intrărilor.

3. Teoria Ricati Generalizată pentru sistemele cu timp mort

Bazându-ne pe rezultatele prezentate până acum, vom ilustra cum unele elemente ale teoriei Riccati clasice se transformă în cazul sistemelor cu timp mort. În analogie cu cazul fără întârzieri, vom construi un set similar de obiecte şi concepte pentru această clasă de sisteme cu intenţia de a obţine un cadru teoretic similar.

Vom considera un sistem liniar cu multipli timpi morţi concentraţi, al cărui model este descris de următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + \sum\limits_{i=1}^{L} A_i x(t-\tau_i) + B\,u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + \sum\limits_{i=1}^{L} C_{y\_i} x(t-\tau_i) + D\,u(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in \left[-\max(\tau_1, \ldots, \tau_L, 0)\right] \end{cases} \tag{3.1}$$

unde $A, A_i \in R^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $C, C_i \in R^{p\times n}$, $D \in \mathbf{R}^{p\times m}$ si $\tau_i > 0,\ \forall i = 1:L$.

Pornind de la acest model de stare, vom defini echivalentul Tripletului Popov în cazul sistemelor cu timp mort ca fiind următorul set de matrice.

Definiţia 3.1 (Set Popov) Vom numi un set Popov un set de matrice având următoarea structură

$$\mathrm{T} = (A, A_1, \ldots, A_L, B, P), \quad P = \begin{bmatrix} Q & L \\ L^T & R \end{bmatrix} = P^T, \tag{3.2}$$

unde $A, A_1, \ldots, A_L \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, $Q \in \mathbf{R}^{(L+1)n\times(L+1)n}$, $L \in \mathbf{R}^{m\times(L+1)n}$ şi $R \in \mathbf{R}^{m\times m}$.

Vom defini, de asemenea, o relaţie de echivalenţă între două seturi Popov, descrisă de următoarele condiţii:

Definiţia 3.2 (Echivalenţa a două seturi Popov). Două seturi Popov

$$\mathrm{T} = (A, A_1, \ldots, A_L, B, P) \quad \text{si}$$
$$\widetilde{\mathrm{T}} = (\widetilde{A}, \widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_L, \widetilde{B}, \widetilde{P}) \tag{3.3}$$

vor fi numite $(X, X_1, \ldots, X_L, \hat{F})$ echivalente şi vom scrie

$$\mathrm{T} \overset{X, X_1, \ldots, X_L, F}{\sim} \widetilde{\mathrm{T}} \tag{3.4}$$

dacă există o matrice $\hat{F} \in R^{m\times(n(L+1))}$ şi un set de matrice simetrice şi pozitiv definite $X, X_1, \ldots, X_L \in R^{n\times n}$ astfel încât

$$\begin{aligned}
&\widetilde{A} = A + BF, \\
&\widetilde{A}_1 = A_1 + BF_1, \\
&\vdots \\
&\widetilde{A}_L = A_L + BF_L \\
&\widetilde{B} = B, \\
&\widetilde{Q} = Q + L\hat{F} + \hat{F}^T L^T + \hat{F}^T R\hat{F} + \hat{A}^T \hat{X}^T + \hat{X}\hat{A} + S, \\
&\widetilde{L} = L + \hat{F}^T R + \hat{X}B, \\
&\widetilde{R} = R.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

unde

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \hat{F} = \begin{bmatrix} F & F_1 & \cdots & F_L \end{bmatrix}, \ \hat{A} = \begin{bmatrix} A & A_1 & \cdots & A_L \end{bmatrix} \text{ şi}$$

$$S = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{L} X_i & & & \\ & -X_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -X_L \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Vom putea asocia cu setul Popov următoarea funcţională Lyapunov, utilizată frecvent în lucrări de specialitate în cazul sistemelor cu timp mort (vezi [2], [6] sau [7] spre exemplu):

$$V(x,t) = x(t)^T Xx(t) + \sum_{i=1}^{L} \int_{-\tau_i}^{0} x(t+s)^T X_i x(t+s)ds, \tag{3.7}$$

şi considerând starea agregată $w(t)$ ca fiind

$$w(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1) \\ \vdots \\ x(t-\tau_L) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

putem defini indice integral J

$$J = \int_{t_0}^{t_1} w^T(t)\, P\, w(t) dt, \tag{3.9}$$

unde matricea P este simetrică şi are următoarea structură

$$P = \begin{bmatrix} Q & L \\ L^T & R \end{bmatrix},\ Q \in \mathbf{R}^{(L+1)n \times (L+1)n},\ L \in \mathbf{R}^{m \times (L+1)n} \text{ şi } R \in \mathbf{R}^{m \times m}.$$

Observaţii

În cazul sistemelor cu timp mort, Funcţionala Lyapunov poate fi văzută ca o reprezentare a potenţialului acumulat în sistem la momentul actual ţinând cont şi de stările întârziate care afectează dinamica sistemului. Reacţia poate fi făcută, în acest caz, nu doar după starea curentă, ci şi după stările întârziate. Considerând un interval de timp cuprins între 0 şi ∞ putem obţine următorul rezultat.

Propoziţia 3.1 Considerând că sistemul descris de ecuaţia (3.1) este stabil şi fiind date două seturi Popov echivalente T şi $\widetilde{\mathrm{T}}$ ($\mathrm{T} \overset{X, X_1, \ldots, X_L, F}{\sim} \widetilde{\mathrm{T}}$) are loc următoarea relaţie

$$J_{\widetilde{T}} = J_T - V(x,0) \tag{3.10}$$

Demonstraţie. Dacă definim

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1) \\ \vdots \\ x(t-\tau_L) \end{bmatrix} \text{ si}$$

$$\widetilde{w}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1) \\ \vdots \\ x(t-\tau_L) \\ u(t) - Fx(t) - \sum_{i=1}^{L} F_i x(t-\tau_i) \end{bmatrix} = \tag{3.11}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ u(t) - \hat{F}\hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & 0 \\ -\hat{F} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix},$$

obţinem

$$J_{\widetilde{T}} = \int_0^\infty \widetilde{w}^T(t)\, \widetilde{P}\, \widetilde{w}(t)$$

$$= \int_0^\infty \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & -\hat{F}^T \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q + L\hat{F} + \hat{F}^T L^T + \hat{F}^T R \hat{F} & L + \hat{F}^T R + \hat{X}B \\ L^T + R\hat{F} + B^T \hat{X}^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & 0 \\ -\hat{F} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt +$$

$$+ \int_0^\infty \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & -\hat{F}^T \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{A}^T X + X\widetilde{A} + \sum_{i=1}^{L} X_i & X\widetilde{A}_1 & \cdots & X\widetilde{A}_L & XB \\ \widetilde{A}_1^T X & -X_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \widetilde{A}_L^T X & & & -X_L & \\ B^T X & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & 0 \\ -\hat{F} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt. \tag{3.12}$$

Putem rescrie formula (3.12) astfel:

$$
J_{\widetilde{T}} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1) \\ \vdots \\ x(t-\tau_L) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & L \\ L^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1) \\ \vdots \\ x(t-\tau_L) \\ u(t) \end{bmatrix} dt + \int_0^\infty \frac{dV}{dt} dt. \tag{3.13}
$$

Din moment ce am considerat sistemul (3.1) stabil, va rezulta că $V(x,t) \to 0$ atunci când $t \to \infty$ şi, în acest caz, obţinem

$$
J_{\widetilde{T}} = J_T - V(x,0) \tag{3.14}
$$

Putem asocia acum matricea de disipaţie

$$
D_{\mathrm{T}} := \begin{bmatrix} \widetilde{A}^T X + X\widetilde{A} + \sum_{i=1}^{L} X_i & XA_1 & \cdots & XA_L & XB \\ A_1^T X & -X_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ A_L^T X & & & -X_L & \\ B^T X & & & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q & L \\ L^T & R \end{bmatrix} \tag{3.15}
$$

şi Sistemul Algebric Riccati în timp continuu (CTARS)

$$
D_{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I_{n(L+1)} \\ \hat{F} \end{bmatrix} = 0 \tag{3.16}
$$

În definirea condiţiilor de echivalenţă, am considerat o reacţie după starea curentă şi stările întârziate. Dacă luăm în considerare doar cazul reacţiei după starea curentă, matricele $F_i, i = 1:L$ devin 0.

Propoziţia 3.2. Fiind date două seturi Popov echivalente $\mathrm{T} \overset{X, X_1, \ldots, X_L, F}{\sim} \widetilde{\mathrm{T}}$, dacă

$$
D_{\mathrm{T}} \leq 0 \tag{3.17}
$$

atunci $J_{\widetilde{\mathrm{T}}} \leq 0$.

Demonstraţie. Din (3.17) obţinem

$$
\left(\begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & \\ -\hat{F} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & \\ \hat{F} & I_m \end{bmatrix} \right)^T D_{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & \\ \hat{F} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & \\ -\hat{F} & I_m \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.18}
$$

$$
\left(\begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & \\ -\hat{F} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & \\ \hat{F} & I_m \end{bmatrix} \right)^T D_{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & \\ \hat{F} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & \\ -\hat{F} & I_m \end{bmatrix} \leq 0
$$

sau

$$
\begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & \\ -\hat{F} & I_m \end{bmatrix}^T \widetilde{P} \begin{bmatrix} I_{n(L+1)} & \\ -\hat{F} & I_m \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.19}
$$

de unde rezultă $J_{\widetilde{\mathrm{T}}} \leq 0$.

Teoria Riccati generalizată oferă un cadru general pentru determinarea unor proprietăţi fundamentale în controlul automat. Printr-o alegere corespunzătoare a matricelor Q, L şi R şi impunând $D_{\mathrm{T}} \leq 0$ putem găsi condiţii suficiente de existenţă pentru determinarea unor proprietăţi structurale.

Considerând următoarea matrice bloc

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C_y & C_{y\_1} & \cdots & C_{y\_L} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

putem defini următoarele seturi Popov în particular, care, împreună cu $D_{\mathrm{T}} \leq 0$ oferă condiții de suficiență pentru stabilirea proprietăților asociate.

a) $$\mathrm{T}_p = (A, A_1, \ldots, A_L, B, \hat{C}^T \hat{C}, \hat{C}^T D, D^T D) \quad (3.21)$$

- setul de pozitivitate

b) $$\mathrm{T}_n = (A, A_1, \ldots, A_L, B, \hat{C}^T \hat{C}, \hat{C}^T D, I + D^T D) \quad (3.22)$$

- setul normalizat

c) $$\mathrm{T}_c = (A, A_1, \ldots, A_L, B, -\hat{C}^T \hat{C}, -\hat{C}^T D, \gamma^2 I - D^T D) \quad (3.23)$$

- setul de γ contractivitate.

4. Stabilizarea sistemelor cu timp mort cu cost cvadratic garantat

Considerând sistemul cu timp mort descris în (3.1), vom defini următoarea funcție cost

$$J = \int_0^\infty \left(x^T(t) Q_0 x(t) + u^T(t) R u(t) \right) dt \quad (4.1)$$

Vom căuta o lege de comandă obținută prin reacție după stare $u = Fx$ astfel încât sistemul în buclă închisă să fie stabil și funcția cost să fie limitată sub o anumită valoare. Indicele integral, definit în [4.1], este desigur o variantă simplificată a cazului general prezentat în [3.9].

Teorema 4.1 Dacă există o mulțime de matrice simetrice și pozitiv definite $X, X_1, \ldots, X_L$ și o matrice F astfel încât să fie satisfăcută următoarea inecuație matriceală

$$\begin{bmatrix} (A^T + F^T B^T)X + X(A + BF) + \sum_{i=1}^{L} X_i + Q_0 + F^T R F & XA_1 & \cdots & XA_L \\ A_1^T X & -X_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_L^T X & & & -X_L \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.2)$$

atunci sistemul descris în (3.1) este stabil în buclă închisă, iar funcționala integrală definită în (4.1) va satisface condiția $J \leq V(x,0)$, unde V a fost definită în (3.7).

Demonstrație. Ca o primă remarcă, putem considera matricea pondere Q_0 ca fiind blocul superior stâng al matricei Q din (3.9) corespunzătoare stării curente ($Q_0 = Q_{(1:n,1:n)}$).

Întrucât $Q_0 > 0$ și $R > 0$ din (4.2) rezultă

$$\begin{bmatrix} (A^T + F^T B^T)X + X(A + BF) + \sum_{i=1}^{L} X_i & XA_1 & \cdots & XA_L \\ A_1^T X & -X_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_L^T X & & & -X_L \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.3)$$

ceea ce implică faptul că sistemul în buclă închisa este stabil.

Din (4.2) și *Propoziția 1.2* rezultă $J_{\tilde{\mathrm{T}}} \leq 0$, iar din *Propoziția 3.1* obținem

$$J_{\tilde{T}} = J_T - V(x,0) \quad (4.4)$$

de unde rezultă

$$J_T \leq V(x,0) \quad (4.5)$$

Întrucât inegalitatea (4.2) nu este liniară în X şi F, vom înmulţi cu X^{-1} din ambele parţi şi dacă notăm $Z = X^{-1}$, $Z_i = X^{-1}X_iX^{-1}, i = 1:L$ şi $Y = FX^{-1}$ obţinem

$$\begin{bmatrix} ZA^T + Y^TB^T + AZ + BY + \sum_{i=1}^{L} Z_i + ZQ_0Z + Y^TRY & A_1Z & \cdots & A_LZ \\ ZA_1^T & -Z_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ ZA_L^T & & & -Z_L \end{bmatrix} \leq 0 \tag{4.6}$$

care după aplicarea complementului Schur devine:

$$\begin{bmatrix} ZA^T + Y^TB^T + AZ + BY + \sum_{i=1}^{L} Z_i & Z & Y^T & A_1Z & \cdots & A_LZ \\ Z & -Q_0^{-1} & & & & \\ Y & & -R^{-1} & & & \\ ZA_1^T & & & -Z_1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ ZA_L^T & & & & & -Z_L \end{bmatrix} \leq 0 \tag{4.7}$$

Corolar 4.1 Dacă există o mulţime de matrice pozitiv definite $Z, Z_1, \ldots, Z_L$ şi o matrice Y astfel încât este satisfăcută LMI (4.7), atunci sistemul cu timp mort descris de (3.1) este asimptotic stabil şi costul este mărginit de următoarea inegalitate:

$$J \leq x(0)^T Z^{-1} x(0) + \sum_{i=1}^{L} \int_{-\tau_i}^{0} x(s)^T Z^{-1} Z_i Z^{-1} x(s) ds \tag{4.8}$$

Termenul drept din (4.8) reprezintă de fapt $V(x,0)$ unde am înlocuit $Z = X^{-1}$, $Z_i = X^{-1}X_iX^{-1}, i = 1:L$.

Exemplu:

Considerând un sistem cu timp mort având următoarea dinamică a stării:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + A_1x(t-1) + B\,u(t) \end{cases} \tag{4.9}$$

unde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [-1, 0] \tag{4.10}$$

şi considerând următoarele matrice pondere în (4.1)

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{si } R = 1 \tag{4.11}$$

după rezolvarea inegalităţii matriceale liniare descrise în (4.7) obţinem

$F = [13.1130 \quad -0.8034]$ şi matricele pondere

$$X = \begin{bmatrix} 18.1619 & -1.3980 \\ -1.3980 & 0.3942 \end{bmatrix} \text{ şi } X_1 = \begin{bmatrix} 226.2973 & -21.6765 \\ -21.6765 & 2.3940 \end{bmatrix}$$

iar indicele integral (4.1) va avea următoarea limită superioară $J \leq 201.0985$.

5. Concluzii

Scopul acestui studiu este să extindă (generalizeze) câteva rezultate din Teoria Generalizată Riccati în cazul sistemelor cu timp mort şi să deschidă calea unor cercetări ulterioare în acest domeniu. Extinderea acestei teorii în cazul sistemelor cu timp mort are desigur o valoare teoretică, fiind făcută în premieră în limitele cunoştinţelor noastre. Este, în acelaşi timp, o oportunitate de a prezenta succint unele legături între concepte abstracte ale acestei teorii şi aspecte concrete ale controlului automat evidenţiind şi un potenţial practic al unei abordări văzute tradiţional în principal dintr-o perspectivă abstractă. Lucrarea de faţă deschide, de asemenea, calea extinderii, în măsura posibilului, a întregii Teorii Generalizate Riccati în cazul sistemelor cu timp mort, în studii de specialitate viitoare.

Bibliografie

1. **BOBOŞATU, F., A. ŞERBĂNESCU:** An Experimental Web-Based Decision Support System. Studies în Informatics and Control, September 2007, Vol. 16, No. 3, pp. 265-270.
2. **BOYD, S., L. EL GHAOUI, E. FERON, V. BALAKRISHNAN:** Linear Matrix Inequalities în System and Control Theory, SIAM, 1994.
3. **ESFAHANI, SAID H., I. R. PETERSEN:** An LMI Approach to the Output-Feedback Guaranteed Cost Control for Uncertain Time-Delay System. Proc. of the 37th IEEE Conference on Decision & Control, Tampa, Florida USA, December 1998.
4. **FILIP, F.G.:** Decision Support Systems, Second Edition, Technical Publishers, Bucharest, 2007.
5. **IONESCU, V., C. OARA:** Generalised Riccati Theory and Robust Control, A Popov Function Approach, John Wiley & Sons, 1998.
6. **MOHEIMANI, S.O., REZA** and **JAN R. PETERSEN**: Optimal Quadratic Guaranteed Cost Control of a Class of Uncertain Time-Delay Systems. Proc. of the 34th Conference on Decision & Control, New Orleans, LA, December, 1995.
7. **PARK, JU.H., S. WON:** Stability Analysis for Neutral Delay-differential Systems. Journal of the Franklin Institute Engineering and Applied Mathematics, Vol. 337, No. 1, Philadelphia USA, January 2000.
8. **ŞERBĂNESCU, A., C. POPEEA, B. JORA:** The H2 Control Problem for TDS – An Optimal Output Feedback Controller Synthesis. Proc. of the SINTES 13 Symposium, Craiova, România, October 2007, pp. 186-191.
9. **ŞERBĂNESCU, A., C. POPEEA:** H_∞ synthesis for Time Delay Systems-an LMI Approach. Proc. of the I3M Conference, October 28 -30, 2004, Genoa, Italy.
10. **STĂNCIULESCU, F.:** Modelling of High Complexity Systems with Applications (including a CD with Applications Programs), WIT Press, Southampton, 2005.
11. **TOH, K. C., M. J. TODD, R.H. TUTUNCU:** SDPT3 - a Matlab Software Package for Semidefinite Programming, http://www.math.cmu.edu/~reha/sdpt3.html or http://www.math.nus.edu.sg/~mattohkc/index.html, 1998.