

REZULTATE RECENTE IN IDENTIFICAREA SISTEMELOR

Ing. Petre Stoica, Ing. Ioan Tăbuș, Ing. Daniel Petre, Ing. Dan Ștefănoiu

Institutul Politehnic București.

Rezumat

În cadrul activităților IFAC, Identificarea și Modelarea Sistemelor este un domeniu care continuă să suscite un interes considerabil. Acest lucru este probat de numărul mare de comunicări (28), cu obiecte din acest domeniu, prezentate la Congresul IFAC 1990, care s-a desfășurat la Tallin (Letonia). Separat de congresele mondiale ale federației, IFAC organizează din 3 în 3 ani simpozioane internaționale dedicate numai domeniului menționat mai sus. Până acum au fost organizate astfel de simpozioane: Praga (1967 și 1970), Haga (1973), Tbilisi (1976), Darmstadt (1979), Washington (1982), York (1985) și Beijing (1988).

Următorul simpozion "Identificarea și Estimarea Parametrilor Sistemelor" a avut loc în luna iulie 1991 la Budapesta. În afara acestor simpozioane, IFAC a editat două numere speciale ale publicației sale oficiale "Automatica", dedicate domeniului Identificării sistemelor. Probabil că nici un alt domeniu de cercetare științifică nu s-a bucurat de atita atenție în cadrul federației, ca Identificarea și Modelarea Sistemelor.

Maturitatea pe care au atins-o cercetările în domeniu este atestată și de publicarea unor lucrări ample, care au încercat să prezinte mult mai multe rezultate disponibile ([7]-[9]). În pofda eforturilor considerabile de cercetare și a maturității câștigate, domeniul identificării sistemelor oferă mai multe teme interesante de studiu pentru cercetători [10].

Lucrările congresului IFAC ilustrează, cel puțin în parte, multitudinea de subiecte interesante care pot forma obiectul unor cercetări viitoare. În cele ce urmează, aceste subiecte sînt corespunzător clasificate și tratate pe rînd într-o serie de 4 articole (A,B,C,D).

Partea A

A. Estimarea structurii modelelor

Estimarea structurii (în particular, a ordinului) unui model este o problemă esențială, în identificarea sistemelor. Este evident că, dacă structura unui model este prost aleasă, atunci modelul estimat nu poate fi corespunzător, indiferent de metoda utilizată pentru determinarea parametrilor acestuia. De fapt, determinarea structurii modelului poate fi considerată a fi o etapă preliminară importantă a oricărui experiment de identificare sau de modelare.

Există o literatură bogată dedicată problemei determinării structurii (de exemplu, [11]-[25]). Lucrările prezentului Congres IFAC au adăugat unele rezultate interesante la literatura deja existentă. În continuare, aceste lucrări sînt discutate pe rînd, în funcție de problematica abordată, relevîndu-se ideile principale pe care acestea le conțin.

A1. Criterii cu termeni de penalizare

Ideea de bază a acestor criterii pentru determinarea structurii/ordinului modelului, poate fi explicată astfel. Să notăm cu θ_n vectorul parametrilor necunoscuți, unde $n = \dim \theta_n$. Să presupunem că θ_n este determinat prin minimizarea unui criteriu, de exemplu:

$$\hat{\theta}_n = \underset{\theta_n}{\operatorname{argmin}} V_N(\theta_n),$$

unde θ_n denotă vectorul parametrilor estimați, iar N este numărul de date utilizate în estimare. Să mai presupunem că modelele considerate ca posibile sînt astfel încît modelul cu n parametri se poate obține prin particularizarea celui cu $n+1$ parametri. Atunci, se poate vedea ușor că secvența:

$$V_N(\hat{\theta}_n) \quad n=1,2,\dots$$

este monoton necrescătoare:

$$V_N(\hat{\theta}_1) \geq V_N(\hat{\theta}_2) \geq V_N(\hat{\theta}_3) \geq \dots$$

Prin urmare, criteriile $V_N(\hat{\theta}_n)$ asociate diferitelor modele considerate, nu pot fi utilizate direct pentru a selecta un anumit model. Ideea criteriilor cu termeni de penalizare este de a adăuga la $V_N(\hat{\theta}_n)$ un termen care să crească monoton cu n și, astfel, să "penalizeze" descreșterea lui $V_N(\hat{\theta}_n)$ cu n . Noul criteriu este deci definit în următorul mod:

$$W_N = V_N(\hat{\theta}_n) + \frac{\gamma_N(n)}{N},$$

iar ordinul n este determinat prin minimizarea lui W_N :

$$\hat{n} = \operatorname{arg} \inf_n W_n$$

Un exemplu tipic de V_N este următorul:

$$V_N(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t, \hat{\theta}_n)$$

unde $\varepsilon(t, \hat{\theta}_n)$ sînt reziduurile modelului cu parametrii $\hat{\theta}_n$, la momentul t . În privința "termenului de penalizare"

$\gamma_N(n)$ sînt posibile mai multe alegeri:

- Criterii de tip Akaike ([16] [17] [20]): $\gamma_N(n) = 2n$;
- Criterii de tip Hannan, Schwarz, Rissanen ([15] [18] [19] [23]): $\gamma_N(n) = n \log N$ sau

$$\gamma_N(n) = 2n p \log(\log N), \text{ cu } p \geq 1$$

La expresiile anterioare pentru $\gamma_N(n)$ nu s-a ajuns din considerente empirice, ci utilizînd metode elaborate ale teoriei statistice a informației sau teoriei statistice a complexității. Lucrarea [1] aparține acestei direcții de

cercetare, încercând să ajungă la criterii de forma anterioară pentru determinarea structurii modelelor, prin studiul detaliat al complexității stohastice asociate.

Este un fapt bine cunoscut că alegerile de tip (b) ale lui $\gamma_N(n)$ au un avantaj distinctiv, în comparație cu alegerea de tip (a). Presupunând că există un "ordin adevărat" n_0 , atunci utilizarea clasei (b) de $\gamma_N(n)$ face posibilă estimarea consistentă a lui n_0 , în timp ce pentru clasa (a) există un risc diferit de zero de supraestimare a lui n_0 , chiar și pentru $N \rightarrow \infty$. Lucrarea [5] se înscrie pe această linie de cercetare, demonstrând consistența unei proceduri de tip (b) în condiții foarte generale (se permite existența reacției în sistem etc.).

A2. Criterii de acumulare a erorilor de predicție

Ideea acestor tipuri de criterii pentru determinarea structurii/ordinelor este simplu de explicat. Pentru aceasta, să schimbăm puțin notația anterioară; vectorul parametrilor estimați, de dimensiune n , determinat pe baza a t măsurători, va fi notat $\hat{\theta}_n(t)$. În această nouă notație, $\hat{\theta}_n$ din secțiunea A1 se scrie

$$\hat{\theta}_n(N), \text{ iar } V_N(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t, \hat{\theta}_n(t))$$

Așa cum am văzut, $V_N(\hat{\theta}_n)$ descrește monotonic cu n și, deci, nu putea fi direct utilizat pentru rezolvarea problemei de determinare a structurii. Acest lucru devine posibil prin utilizarea "criteriului erorilor de predicție (sau reziduurilor) acumulate", care este definit în următorul mod natural:

$$P_n = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t, \hat{\theta}_n(t))$$

unde reamintim că $\hat{\theta}_n(t) = \arg \min_{\theta_n} \sum_{k=1}^t \varepsilon^2(k, \theta_n)$

Ordinul n al modelului se determină prin minimizarea lui P_n :

$$\hat{n} = \arg \inf_n P_n$$

Deoarece P_n depinde de $\{\hat{\theta}_n(t)\}_{t=1}^N$, este destul de clar că evaluarea acestui tip de criteriu trebuie bazată pe utilizarea unor algoritmi on-line pentru determinarea recursivă a estimațiilor $\hat{\theta}_n(1)$, $\hat{\theta}_n(2)$ etc. O altă posibilitate și mai elaborată este utilizarea, pentru anumite structuri de model, a unor algoritmi de tip lattice, care sînt recursivi atât în timp cît și în ordinul modelului. Cu ajutorul ultimului tip de algoritmi se

poate determina recursiv $\varepsilon(t, \hat{\theta}_n(t))$ pentru $t = 1, 2, \dots, N$ și $n = 1, 2, \dots, n_{\max}$ ([7], [14]).

În privința proprietăților ordinelor \hat{n} determinate prin minimizarea lui P_n , se poate demonstra că \hat{n} este o estimare consistentă a lui n_0 (presupunând că există un $n_0 = \text{ordin adevărat}$) ([12]-[14]). Lucrarea [2], de fapt, demonstrează consistența lui \hat{n} relaxînd presupunerea că $n_{\max} < \infty$ (cu alte cuvinte, se permite ca n_{\max} să crească cu N).

A3. Criterii de tip Bayesian

Ideea de bază a abordărilor de tip Bayesian pentru determinarea structurii modelelor este foarte firească: ordinul n al modelului se determină prin maximizarea funcției de verosimilitate a datelor,

$$\hat{n} = \arg \sup_n p(X_N | n),$$

unde X_N este o notație condensată pentru informația disponibilă despre sistemul în studiu (de exemplu, măsurători ale intrării și ieșirii sistemului), iar $p(x|y)$ denotă funcția de densitate de probabilitate condiționată a lui x , dat fiind y . Utilizînd legea lui Bayes:

$$p(X_N, \theta_n | n) = p(X_N | \theta_n, n) p(\theta_n | n),$$

unde $p(\theta_n | n)$ este funcția de densitate de probabilitate apriorică a parametrilor necunoscuți. Astfel, $p(X_N | n)$ poate fi calculată ca o distribuție marginală:

$$p(X_N | n) = \int_{\Theta} p(X_N | \theta, n) p(\theta | n) d\theta,$$

unde Θ este domeniul în care θ ia valori.

Din discuția anterioară rezultă că utilizarea metodologiei de tip Bayesian pentru determinarea ordinului cere:

- specificarea lui $p(\theta)$;
- determinarea lui $p(X_N | \theta)$;
- determinarea lui $p(X_N | n)$, prin efectuarea integralei anterioare.

Determinarea funcției de verosimilitate a datelor pentru modelul cu parametri θ , $p(X_N | \theta)$, este o operație relativ simplă (vezi, de exemplu, [29]). Specificarea distribuției apriorice a parametrilor, $p(\theta)$, este problema cel mai mult discutată în literatură. Lucrarea [27] propune un tip de distribuții apriorice pentru care $p(X_N | n)$ poate fi evaluat fără a face aproximații bazate pe presupunerea că $N > 1$. Astfel, în contrast cu alte abordări similare ([24]), criteriul de tip Bayesian obținut în acest mod poate fi utilizat pentru determinarea structurii modelelor în aplicații în care numărul de date disponibile este relativ mic (de exemplu, de ordinul zecilor).

Lucrarea [3], deși tratează o problemă diferită, propune, în esență, tot o metodologie de tip Bayesian,

care printre altele, poate fi utilizată pentru determinarea structurii sau ordinelor modelelor.

A4. Criterii bazate pe descompunerea în valori proprii

Metodologia ce va fi prezentată succint în această secțiune este utilizată frecvent în anumite aplicații de Prelucrarea Semnalelor, constând - în principal - din obținerea de informații despre un semnal utilizând măsurători cu zgomot relativ intens ale acestuia. Esența acestei metodologii este destul de diferită de a celor prezentate pînă acum. Pentru a o explica, să considerăm următorul semnal sinusoidal, măsurat cu zgomot aditiv:

$$y(t) = x(t) + e(t) \quad t = 1, 2, \dots$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$$

unde $e(t)$ este zgomotul de măsură.

Problema principală constă în determinarea amplitudinilor $\{\alpha_k\}$, frecvențelor $\{\omega_k\}$ și fazelor inițiale $\{\varphi_k\}$ ale semnalului $x(t)$. Totuși, pentru a rezolva această problemă, trebuie, mai întii, să determinăm numărul n de componente ale lui $x(t)$. În acest tip de aplicație, aceasta este "problema de determinare a ordinului". Să presupunem că $e(t)$ este zgomot alb de medie zero și dispersie σ^2 și să definim următoarea matrice de covarianță:

$$R = E[Y(t)Y^T(t)], \text{ cu } Y(t) \text{ not } [y(t-1) \dots y(t-m)]^T \in R^m$$

Calcul direct arată că R are următoarea expresie ([29]):

$$R = APA^T + \sigma^2 I,$$

unde A și P au următoarele configurații:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \cos \omega_1 & \dots & \cos \omega_n & \dots & \sin \omega_1 & \dots & \sin \omega_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos m \omega_1 & \dots & \cos m \omega_n & \dots & \sin m \omega_1 & \dots & \sin m \omega_n \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \alpha_n^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \alpha_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \alpha_n^2 \end{bmatrix}$$

Fie $m > 2n$ (se observă că m este ales de utilizator). Atunci:

$$\text{rang}(A.P.A^T) = 2n$$

și urmează imediat că valorile proprii $\{\lambda_k\}_{k=1, \dots, m}$ ale lui

R satisfac:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_m = \sigma^2$$

În mod evident, această proprietate poate fi utilizată pentru determinarea lui n . Să notăm totuși că, în practică, R nu este disponibil și trebuie estimat. O estimare frecvent utilizată este următoarea:

$$\hat{R} = \frac{1}{N} \sum_{t=m+1}^N Y(t)Y^T(t)$$

Fie $\{\lambda_k\}_{k=1, \dots, m}$ valorile proprii ale lui \hat{R} . Conform discuției de mai sus, determinarea lui n se reduce la determinarea celui mai mic \hat{n} pentru care se poate considera că $\hat{\lambda}_{\hat{n}}, \hat{\lambda}_{\hat{n}+1}, \dots, \hat{\lambda}_m$ sînt aproximativ egale.

Există un număr de metode care pot fi utilizate pentru determinarea lui n , utilizînd ideile prezentate anterior (de exemplu [21]). Lucrarea [4] prezintă o nouă metodă de acest tip care pare a avea unele avantaje asupra predecesoarelor sale, dar este (în mod sigur) mult mai complexă decît acestea.

A5. Optimizarea semnalului de intrare, pentru determinarea structurii

În mod obișnuit, problema optimizării semnalului de intrare se pune în conjuncție cu problema estimării parametrilor, pentru o structură dată. Cu alte cuvinte, care este semnalul de intrare care face posibilă determinarea parametrilor unui model dat, cu precizie maximă? Există metode mai mult sau mai puțin clasice pentru a obține un răspuns la această întrebare ([7], [8], [25], [26]).

Autorii lucrării [6] au avut ideea de a formula problema determinării semnalului de intrare utilizat în identificare, astfel încît soluția acesteia să devină relevantă pentru operația de determinare a structurii. Fiind date două structuri de model M_1 și M_2 , întrebarea este acum următoarea: care este semnalul de intrare care-l face pe M_1 să se comporte cît mai diferit cu putință (într-un sens precizat, vezi [6]) în comparație cu M_2 ? Un răspuns la o astfel de întrebare cere rezolvarea unei probleme de optimizare relativ complicată în cazul unor structuri generale M_1, M_2 . Mai mult, un astfel de răspuns va depinde aproape sigur de structurile M_1 și M_2 considerate. În consecință, răspunsul nu va putea fi utilizat în cazul altor structuri ale modelului. Acestea sînt dezavantaje care pot limita interesul în metodologia introdusă în [6].

Bibliografie

1. GERENCSEI, L.: *Stochastic Complexity in System Identification and Adaptive Control*. In: Proceedings of IFAC Congress, Tallin, 1990, pp124-128

2. **HEMERLY, E.M., FRAGOSO, M.D.:** *Recursive Order Estimation of Autoregressions.* In: Proceedings of IFAC Congress, Tallin, 1990, pp 135-139
3. **NIEDZWIECKI, M.:** *Multiple-model Approach to Finite Memory Adaptive Filtering.* In: Proceedings of IFAC Congress, Tallin, 1990, pp 154-159
4. **SANO, A., TSUJI, T., OHMORY, H.:** *Optimized Singular Value Decomposition with Applications to Signal Extrapolation and Detection of Sinusoid Number.* In: Proceedings of IFAC Congress, Tallin, 1990, pp.166-171
5. **ZHANG, Z.F., CHEN, H.F.:** *Identification of Coefficients, Orders and Time-delay for ARMAX Systems.* In: Proceedings of IFAC Congress, Tallin, 1990, pp 129-134
6. **UOSAKI, K., HATANAKA T. :** *Optimal Input Design for Model Discrimination Based on the Kullback Discrimination Information-Frequency Domain Approach.* In: Proceedings of IFAC Congress, Tallin, 1990, pp251-256
7. **SODERSTROM, T., STOICA, P.:** *System Identification,* Prentice Hall, London, 1989, 650 pg
8. **LJUNG, L. :** *System Identification - Theory for the User,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987, 400 pg
9. **KALMAN, L.E.:** *Nine Lectures on Identification,* Springer Verlag, 1990, 100 pg
10. **LJUNG, L.:** *Issues in System Identification.* In: IEEE Control Systems, vol 11, Jan.1991, pp 25-29
11. **STOICA, P., IANSEN, P., EYKHOFF, P., SODERSTROM, T. :** *Model Structure Selection by Cross Validation.* In: Int. J. Control, vol 43, 1986, pp.1941-1978
12. **RISSANEN, J.:** *A Predictive Least-Squares Principle,* In: IMA J. Math. Control and Information, vol 3, 1986, pp 211-222
13. **HEMERLY, E.M., DAVIS, M.H.A.:** *Strong Consistency of the PLS Criterion for Order Determination of Autoregressive Processes.* In: Annals of Statistics, vol 17, 1989, pp 941-946
14. **WAX, M.:** *Order Selection for AR Models by Predictive Least-Squares.* In: IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, vol.36, 1988, pp.581-588;
15. **RISSANEN, J.:** *Stochastic Complexity in Statistical Inquiry.* World Scientific Publisher, 1989, pp 123-125
16. **AKAIKE, H.:** *Fitting Autoregressive Models for Prediction.* In: Ann. Inst. Statist. Math., vol 21, 1969, pp 243-247
17. **AKAIKE, H. :** *A New Look at the Statistical Model Identification.* In: IEEE Trans. Automatic Control, vol.AC-19, Dec. 1974, pp 716-723
18. **HANNAN, E.J., QUINN, B.G. :** *The Determination of the Order of an Autoregression.* In: J.R. Statist. Soc., vol B41, 1979, pp 190-195
19. **RISSANEN, J.:** *Modelling by Shortest Data Description.* In: Automatica, vol 14, 1978, pp 465-471
20. **AKAIKE, H.:** *A Bayesian Extension of the Minimum Procedure AIC of Autoregressive Model Fitting.* In: Biometrika, vol 66, 1979, pp 237-242
21. **WAX, M., KAILATH, T.:** *Detection of Signals by Information Theoretic Criteria.* In: IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, vol 33, 1985, pp 387-392
22. **TUFTS, D.W., KUMARESAN, R.:** *Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood.* In: Proc. IEEE, vol 70, 1982, pp 975-989
23. **SCHWARZ, G.:** *Estimating the Dimension of a Model.* In: Annals of Statistics, vol 6, 1978, pp 461-464
24. **KASHYAP, R.L.:** *A Bayesian Comparison of Different Classes of Dynamic Models Using Empirical Data.* In: IEEE Trans. Automatic Control, vol 22, 1977, pp 715-727
25. **SODERSTROM, T., STOICA, P.:** *Instrumental Variable Methods for System Identification.* In: Springer Verlag, Berlin, 1983, 200 pg
26. **ZARKOP, M.B. :** *Optimal Experiment Design for Dynamic System Identification.* In: Springer Verlag, Berlin, 1979, 100pg
27. **ZHAN, Y.:** *Type II Maximum Likelihood Estimation for Model Structures.* In: Proceedings of IFAC Congress, Tallin, 1990, pp 202-208
28. **MICHALETZKY, G.:** *Zeros of (Non-square) Spectral Factors and Canonical Correlations.* In: Proceedings of IFAC Congress, Tallin, 1990, pp 221-226
29. **MACIEJOWSKI, J.:** *Balanced Parametrizations and Canonical Forms for System Identification.* In: Proceedings of IFAC Congress, Tallin, 1990, pag. 224

Partea B

B. Estimarea recursivă a parametrilor modelelor

Atenția cercetătorilor continuă să fie îndreptată spre domeniul identificării recursive a sistemelor, în primul rând datorită extremei actualități a tehnicilor adaptative (recursive în timp) în aria aplicațiilor de identificare. Așa cum este de așteptat, aplicarea intensivă în practică a unor proceduri conduce la dorința de îmbunătățire a performanțelor acestora (precizie, stabilitate numerică etc.) și în același timp, la necesitatea clarificării aspectelor teoretice fundamentale, cum ar fi proprietățile de convergență sau de robustețe.

În secțiunea 14.4 a Congresului IFAC, preocupările direct referitoare la algoritmi recursivi pot fi grupate în trei categorii.

În primul rând, sînt abordate probleme legate de convergența cîtorva scheme adaptive de identificare, în ipoteza că parametrii care descriu dinamica sistemului sînt invariante în timp. Pentru astfel de sisteme este posibilă o analiză teoretică a convergenței locale și globale; există începînd cu [1] [2] o bogată literatură în acest domeniu [3].

În al doilea rînd, datorită faptului că, tocmai variația parametrilor dinamici ai modelelor impune utilizarea unor algoritmi adaptivi de identificare, în multe aplicații sînt abordate metode dezvoltate în mod special pentru urmărirea parametrilor variabili în timp. În acest domeniu, abordările teoretice nu au putut clarifica suficient proprietățile fundamentale legate de convergența algoritmilor, dar, în schimb, sînt deosebit de fecunde dezvoltările procedurale, de cele mai multe ori bazate pe argumente euristice.

O ultimă problemă abordată în lucrările Congresului, în care sînt direct implicate metodele recursive, este identificarea sistemelor neliniare, care se înscrie în lungul șir de căutări prin care se dorește o extindere a domeniului identificării de la metodele liniare-deosebit de bine puse la punct- spre sistemele reale, care cel mai adesea sînt puternic neliniare.

B.1. Identificarea recursivă a sistemelor invariante în timp

1.1 Metode de tipul Celor Mai Mici Pătrate Extinse (CMMPE) relaxînd condiția de real pozitivitate

Modelele ARMAX, definite prin ecuația cu diferențe:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad (B 1)$$

sînt unele din cele mai utilizate modele pentru

sistemele cu o intrare controlabilă $u(t)$, cu o ieșire măsurabilă $y(t)$ în care perturbația de tip zgomot colorat este modelată ca ieșirea unui filtru avînd la intrare zgomotul alb $e(t)$; polinoamele în operatorul de întârziere q^{-1} vor fi presupuse de forma:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{na}q^{-na} \quad (B 2)$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{nb}q^{-nb} \quad (B 3)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc} \quad (B 4)$$

Notăm vectorul parametrilor necunoscuți ai modelului:

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{na} \ b_1 \ \dots \ b_{nb} \ c_1 \ \dots \ c_{nc}]^T \quad (B 5)$$

și vectorul "stării" (observațiilor) curente:

$$\varphi(t) = [y(t-1) \ \dots \ y(t-na) \ u(t-1) \ \dots \ u(t-nb)e(t-1) \ \dots \ e(t-nb)]^T \quad (B 6)$$

Pentru modelul (B 1) există două principale clase de metode de estimare: metode de tipul erorilor de predicție (EP), pentru care nu sînt disponibile rezultate privind convergența globală și metode de tipul Celor Mai Mici Pătrate Extinse (CMMPE), pentru care, în anumite condiții, se garantează convergența globală. Procedura de estimare CMMPE poate fi descrisă succint rescriind modelul (B1) (utilizînd (B5) și (B6)) în forma:

$$y(t) = \theta^T \varphi(t) + e(t). \quad (B 7)$$

Se obține un model de regresie liniară, în care însă vectorul regresorilor (B 6) nu e cunoscut în întregime datorită prezenței valorilor întârziate ale zgomotului $e(t)$; la fiecare moment discret t se vor efectua doi pași:

a) Pe baza estimăției $\hat{\varphi}(t) = [y(t-1) \ \dots \ u(t-nb) \ \hat{e}(t-1) \ \dots \ \hat{e}(t-nc)]^T$, a stării sistemului, calculează estimăția CMMP a parametrilor, $\hat{\theta}_t$;

b) Pe baza estimăției $\hat{\theta}_t$ a parametrilor, calculează estimăția $\hat{e}(t)$ a zgomotului (utilizînd (B7)) și deci estimăția pentru $\varphi(t+1)$.

Se demonstrează [2] că o condiție suficientă pentru convergența estimăției zgomotului este ca $C^{-1}(z^{-1}) - 1/2$ să fie Strict Real Pozitivă (SRP) (B 9)

Pentru convergența parametrilor este necesară în plus îndeplinirea unei condiții de persistență a excitației pentru regresorii $\varphi(t)$ care, în cazul în care $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$, $C(q^{-1})$ sînt coprime, este echivalentă cu o condiție de persistență a excitației semnalelor externe $u(t)$ și $e(t)$.

Condiția (B 9) privind strict real pozitivitatea poate fi interpretată în modul următor: algoritmul CMME va oferi rezultate proaste dacă estimăția stării este prea

deteriorată, ceea ce se întâmplă când zgomotul este puternic colorat. Condiția SRP de fapt limitează corelarea admisibilă a zgomotului pentru care schema de estimare se mai comportă bine.

Este de așteptat ca, atunci când se încearcă relaxarea condiției de real pozitivitate, complexitatea redusă a calculelor necesară în CMMPE să fie înlocuită printr-o complexitate cu câteva ordine de mărime mai mare, asemănătoare cu cea necesară pentru estimarea optimală (dar neliniară), atât a parametrilor θ , cât și stărilor $\varphi(t)$.

O prima metodă care s-a încercat pentru relaxarea condiției SRP a fost supraparametrizarea modelului (B1) prin înmulțirea ecuației cu un polinom $F(q^{-1})$:

$$F(q^{-1}) A(q^{-1})y(t) = F(q^{-1}) B(q^{-1}) u(t) + F(q^{-1}) C(q^{-1}) e(t) \quad (B 10)$$

Alegerea polinomului $F(q^{-1})$ se va face a.f. condiția SRP să fie îndeplinită,

$$F^{-1}(z^{-1}) C^{-1}(z^{-1}) - 1/2 \text{ să fie SRP,} \quad (B 11)$$

alegere care este întotdeauna posibilă (și neunică), dacă acceptăm grad ($F(q^{-1})$) suficient de mare.

Dezavantajul acestei metode este că, în general, nu se mai poate garanta persistența excitației vectorilor de regresie $\varphi(t)$, chiar dacă semnalele $u(t)$ și $e(t)$ sînt persistente (noile polinoame $A' = FA, B' = FB, C' = FC$ nu mai sînt coprime); deci, nu se va mai garanta nici convergența parametrilor. În plus, nepersistența vectorilor $\varphi(t)$ va conduce la proasta condiționare a calculelor din CMMPE.

O a doua variantă de relaxare a condiției SRP constă în alegerea polinomului $F(q^{-1})$ de grad $N \rightarrow \infty$ cu $F_{\infty}(q^{-1}) = C^{-1}(q^{-1})$

rezultînd:

$$F_{\infty}(q^{-1}) A(q^{-1}) y(t) = F_{\infty}(q^{-1}) B(q^{-1}) u(t) + e(t) \quad (B 12)$$

care este o problemă CMMP infinit dimensională.

Pentru convergența parametrilor se cere acum ca $u(t)$ să fie suficient de excitantă (pentru o mulțime infinită de frecvențe să aibă spectrul diferit de zero). Implementarea acestei scheme ridică probleme practice legate de aproximarea infinit - dimensionalității.

În [4] se adoptă o altă alegere a lui $F(q^{-1})$ și anume soluția unică a factorizării

$$1 = C(q^{-1}) F_c(q^{-1}) + q^{-N} G_c(q^{-1}) \quad (B 13)$$

$$F_c(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i q^{-i} \text{ fiind deci trunchierea de grad}$$

$N-1$ a lui $C^{-1}(q^{-1})$, iar $G_c(q^{-1})$ - termenul exprimînd restul împărțirii $1/C(q^{-1})$.

Modelul va fi echivalent cu

$$F_c(q^{-1}) A(q^{-1}) y(t) = F_c(q^{-1}) B(q^{-1}) u(t) - G_c(q^{-1}) e(t-N) + e(t), \quad (B 14)$$

pentru care vectorul regresorilor este

$$\varphi(t) = [y_{t-1} \dots y_{t-na-N+1} \ u_{t-1} \dots u_{t-nb-N+1} \ e_{t-N} \dots e_{t-nc-N+1}]^T \quad (B 15)$$

Pentru această alegere se demonstrează că persistența excitației semnalelor $u(t)$ și $e(t)$ asigură persistența vectorului $\varphi(t)$ (B 15).

Se poate arăta că polinomul $F_c(q^{-1})$ satisface condiția SRP (B11), dacă ordinul N depășește o valoare N_0 (dependentă de $C(q^{-1})$).

Procedura CMMPET (CMMPE transformată) introdusă în [5] constă în propagarea în paralel a unei scheme CMMPE pentru estimarea parametrilor modelului transformat (B 14) (rezultînd și estimății ale stărilor) și a unei proceduri CMMP în care starea (B6) este calculată pe baza estimăției stărilor obținute în CMMPE.

Dezavantajul acestei metode este că N_0 , gradul minim al polinomului $F(q^{-1})$ de la care condiția SRP este satisfăcută, poate fi foarte mare atunci când $C(q^{-1})$ are zerourile apropiate de cercul unitar, complexitatea calculelor putînd deveni prohibitivă pentru aplicarea algoritmului. Această situație poate apărea, de exemplu, la eșantionarea foarte rapidă a unui sistem continuu, polii sistemului discretizat $z_i = \exp(s_i T) \rightarrow 1$ când $T \rightarrow 0$; în acest caz, dacă $C(q^{-1}) = A(q^{-1})$ (ceea ce se întâmplă în metoda Erorii de Ieșire, care poate fi considerată ca o variantă a metodei CMMPE), zerourile lui C vor fi apropiate de cercul unitar.

În lucrarea [4] se transpune procedura discretă CMMPET descrisă mai sus pentru cazul modelelor cu timp continuu de tip ARMAX, obținîndu-se o corespondență pentru modelele continue a rezultatelor procedurale și a principalelor rezultate utilizate în analiza schemei CMMPET discrete (aici a fost prezentată problema discretă pentru formulările mult mai intuitive care apar).

Avantajul utilizării variantei continue este obținerea unor vectori de regresie de dimensiuni mult mai mici decît în cazul discret, făcînd astfel posibilă și identificarea sistemelor continue eșantionate la o frecvență mare.

1.2 Metode global convergente de estimare descentralizată cu prefiltrarea datelor

În situațiile în care este de interes numai dinamica intrare-ieșire a sistemelor, nedorindu-se și obținerea unui model al zgomotului, se utilizează un caz particular al modelului ARMAX (B1), și anume, modelul ARX

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t) + e(t) \quad (B 16)$$

Metodele de identificare cele mai frecvent utilizate pentru modelele (B16) sînt fie metoda CMMP (în cazul în care $e(t)$ este presupus zgomot alb), fie metodele de tip Variabilă Instrumentală (VI), în cazul când $e(t)$ este presupus zgomot colorat, dar necorelat cu intrarea $u(t)$.

Aceste metode au cunoscut o largă răspândire datorită simplității conceptuale și de implementare și datorită proprietăților statistice atrăgătoare.

Există însă o clasă de modele de tipul (B16) care prezintă prin natura lor o "proastă condiționare" la estimarea prin aceste metode, numite în [5] sisteme rigide, pentru care apar dificultăți legate de rezolvarea sistemelor de ecuații implicate în estimarea CMMP sau VI. Sistemele rigide sînt caracterizate prin faptul că poate fi realizată o împărțire în două clase a poliilor: polii $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p\}$ reprezentînd dinamica lentă și polii $\{\gamma_{p+1}, \dots, \gamma_n\}$ reprezentînd dinamica rapidă a sistemului. Gradul de rigiditate a sistemului poate fi exprimat prin raportul ρ_{rapid}/ρ_{lent} cu

$$\rho_{lent} = \sup_{\{\gamma_i\}_{i=1}^p} [1 - |\gamma_i|] \quad (B 17)$$

$$\rho_{rapid} = \inf_{\{\gamma_i\}_{i=p+1}^n} [1 - |\gamma_i|] \quad (B 18)$$

deoarece pentru sistemele în care dinamica lentă poate fi net separată de dinamica rapidă, ρ_{lent} este mult mai mic decît ρ_{rapid} (ρ_{lent} e apropiat de zero, iar ρ_{rapid} e apropiat de 1).

Pentru sistemele rigide s-au propus [5] scheme de estimare descentralizate, în care se estimează separat dinamica lentă de cea rapidă. Să considerăm factorizările

$$A(q^{-1}) = A_1(q^{-1})A_2(q^{-1}) \quad (B 19)$$

$$B(q^{-1}) = B_1(q^{-1})B_2(q^{-1}) \quad (B 20)$$

(cu $B_1(0) = 1$ pentru unicitate) prin care se realizează separarea celor două clase de poli și să definim variabilele filtrate

$$z(t) = A_1(q^{-1})y(t); \quad s(t) = B_1(q^{-1})u(t) \quad (B 21)$$

$$w(t) = A_2(q^{-1})y(t); \quad r(t) = B_2(q^{-1})u(t) \quad (B 22)$$

Presupunînd cunoscută dinamica lentă ($A_1(q^{-1}), B_1(q^{-1})$) modelul (B16) se rescrie

$$A_2(q^{-1})z(t) = B_2(q^{-1})s(t) + e(t) \quad (B 23)$$

sau

$$z(t) = \psi(t)\beta + e(t) \quad (B 24)$$

$$\beta = [a_{p+1}^2 \dots a_n^2 b_1^2 \dots b_{n2}^2]^T \quad (B 25)$$

$$\psi(t) = [-z(t-1) \dots -z(t-n-p) s(t-1) \dots s(t-n2)]^T \quad (B 26)$$

Considerînd cunoscută dinamica rapidă ($A_2(q^{-1}), B_2(q^{-1})$), modelul ARX se rescrie

$$A_1(q^{-1})w(t) = B_1(q^{-1})r(t) + e(t) \quad (B 27)$$

sau

$$w(t) = \varphi^T(t)\theta + r(t) + e(t) \quad (B 28)$$

$$\theta = [a_1^1 \dots a_p^1 b_1^1 \dots b_{n1}^1]^T \quad (B 29)$$

$$\varphi(t) = [-w(t-1) \dots -w(t-p) r(t-1) \dots r(t-n1)]^T \quad (B 30)$$

Pentru modelele (B24) și (B28) se pot estima parametrii, de exemplu, prin metoda CMMP rezultînd estimațiile

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{t=1}^N \psi(t)\psi^T(t) \right)^{-1} \sum_{t=1}^N \psi(t)z(t) \quad (B 31)$$

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t) \right)^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)(w(t) - r(t)) \quad (B 32)$$

Pentru că nici unul dintre vectorii parametrilor "adevărați" β^* și θ^* nu se cunosc apriori, estimațiile (B31) și (B32) se vor utiliza într-o procedură iterativă de tip bootstrap, după următoarea schemă:

La pasul de iterare i

$$\hat{\beta}^{i-1} \xrightarrow{(B22)} \{\hat{w}^i(t), \hat{r}^i(t)\} \xrightarrow{(B32)} \hat{\theta}^i$$

$$\xrightarrow{(B21)} \{\hat{z}^i(t), \hat{s}^i(t)\} \xrightarrow{(B31)} \hat{\beta}^i$$

Trecerea acestor scheme la o variantă recursivă se realizează în modul următor: estimațiile off-line (B31), (B32) sînt înlocuite cu estimații recursive, iar (B22) și (B21) nu se aplică decît pentru estimația valorilor cele mai recente ale variabilelor filtrate.

În [5] este analizată convergența algoritmilor recursivi care implementează schema de mai sus, precum și alte două scheme foarte asemănătoare acestora, bazate pe metode de tip VI, evidențindu-se următoarele rezultate principale:

1. variantele CMMP și VI converg local în jurul parametrilor (β^*, θ^*), dacă intrarea $u(t)$ nu e corelată cu zgomotul $v(t)$ și dacă sînt îndeplinite condițiile

$$A_1(q^{-1}) \text{ și } A_2(q^{-1}) \text{ sînt coprime} \quad (B 33)$$

$$B_1(q^{-1}) \text{ și } B_2(q^{-1}) \text{ sînt coprime} \quad (B 34)$$

2. dacă sînt îndeplinite condițiile (B33), (B34), algoritmul bazat pe estimațiile CMMP converge global;
3. rata de convergență a variantei CMMP crește cu cît rigiditatea ρ_{rapid}/ρ_{lent} crește. Dacă rigiditatea tinde la infinit, convergența locală a schemelor iterative nerecursive în timp devine instantanee.

B.2. Identificarea recursivă a sistemelor cu parametri variabili în timp

2.1 Metode de identificare cu deponderare selectivă

În domeniul identificării recursive există o abundență de tehnici statistice sau deterministe pentru rezolvarea problemei de modelare, atunci când parametrii sistemului identificat sînt constanți. Datorită faptului că motivația de bază pentru care se utilizează tehnicile adaptive este variația în timp a parametrilor, tehnicile dezvoltate pentru cazul parametrilor constanți sînt corectate ad-hoc, astfel încît să poată fi aplicate și pentru "variații lente" ale parametrilor, rezultînd diferite variante de metode cu "deponderarea datelor vechi" (cu uitarea informațiilor nerecente). Aceste metode se bazează pe o modelare implicită a variației parametrilor. Lucrarea [6] evidențiază două faze în actualizarea parametrilor: prima, corespunzînd modelării variației acestora în timp și a doua, utilizării informației obținute din datele "noi".

Vom considera modele ARX (B16), rescrise în forma

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta(t) + e(t) \quad (B 35)$$

$$\text{cu } \varphi(t) = [-y(t-1) \dots -y(t-na)u(t-1) \dots u(t-nb)]^T \quad (B 36)$$

$$\theta(t) = [a_1(t) \dots a_{na}(t)b_1(t) \dots b_{nb}(t)]^T \quad (B 37)$$

Notînd informația disponibilă la momentul t $F_t = \{y(t) \dots y(0), u(t) \dots u(0)\}$ și făcînd următoarele ipoteze:

$$e(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2); \theta_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\theta}_0, P_0 \sigma^2); \quad (B 38)$$

$$\theta_t | F_t \sim \mathcal{N}(\bar{\theta}_t | t, P_t | t \sigma^2) \quad (B 39)$$

va rezulta că, în cazul parametrilor constanți, distribuția predictivă a estimației acestora va fi

$$\theta_{t+1} | F_t \sim \mathcal{N}(\bar{\theta}_t | t, P_t | t \sigma^2) \quad (B 40)$$

Ca urmare, faza de modelare a variației parametrilor va fi

$$\bar{\theta}_{t+1} | t = \bar{\theta}_t | t; P_{t+1} | t = P_t | t; \quad (B 41)$$

Aplicînd teorema lui Bayes pentru informația disponibilă la momentul $t+1$ $F_{t+1} = F_t \cup \{y(t), u(t)\}$ va rezulta

$$\theta_{t+1} | F_{t+1} \sim \mathcal{N}(\bar{\theta}_{t+1} | t+1, P_{t+1} | t+1 \sigma^2) \quad (B 42)$$

$$\text{cu } e(t+1) = y(t+1) - \varphi^T(t+1)\bar{\theta}_{t+1} | t$$

$$\bar{\theta}_{t+1} | t+1 = \bar{\theta}_{t+1} | t + P_{t+1} | t+1 \varphi_{t+1} e(t+1) \quad (B 43)$$

$$P_{t+1}^{-1} | t+1 = P_{t+1}^{-1} | t + \varphi(t+1) \varphi^T(t+1)$$

Relațiile (B 42), (B 43) reprezintă faza de actualizare a parametrilor, utilizînd noua informație primită. Ansamblul celor două faze, descris procedural de (P 41) și (B43) constituie de fapt algoritmul CMMMP recursiv.

O primă modalitate de modelare netrivială a variației parametrilor în timp se obține, considerînd că aceștia constituie un proces aleator descris de

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \nu(t) \text{ cu } \nu(t) \sim \mathcal{N}(0, R_1 \sigma^2) \quad (B 44)$$

Dacă (B 38), (B 39) sînt îndeplinite, -va rezulta distribuția predictivă

$$\theta_{t+1} | F_t \sim \mathcal{N}(\bar{\theta}_{t+1} | t, P_{t+1} | t+1 \sigma^2)$$

cu

$$\bar{\theta}_{t+1} | t = \bar{\theta}_t | t; P_{t+1} | t = P_t | t + R_1 \quad (B 45)$$

Relația (B45) constituie faza de actualizare a parametrilor conform modelului (B44) adoptat pentru variația în timp. Actualizarea datorată noii informații primite va fi în continuare descrisă de (B43). Se observă că (B43) și (B45) constituie de fapt filtrul Kalman, iar relația (B45) modelează fenomenul de aplatizare a distribuției predictive.

Metoda de deponderare exponențială modelează aplatizarea distribuției predictive prin următoarea evoluție

$$f_{t+1} | t(\theta) = \alpha(f_t | t(\theta))^{\lambda_t}, \quad (B 46)$$

în care $\lambda_t \leq 1$ este factorul de "uitare" exponențial, iar α se determină astfel încît $f_{t+1} | t$ să reprezinte o distribuție. În consecință, în condițiile ipotezelor (B38), (B39), distribuția predictivă va fi

$$\theta_{t+1} | F_t \sim \mathcal{N}(\bar{\theta}_t | t, P_t | t \sigma^2 / \lambda_t) \quad (B 47)$$

Prin cumularea fazei de modelare (conformă cu (B47))

$$\bar{\theta}_{t+1} | t = \bar{\theta}_t | t; P_{t+1} | t = \frac{1}{\lambda_t} P_t | t \quad (B 48)$$

cu faza de actualizare (B 43), va rezulta algoritmul cu factor de uitare exponențial.

Strategia de modificare a factorului de uitare λ_t în algoritmul recursiv (B43), (B48) va influența în mod decisiv capacitatea de urmărire a variației parametrilor. Alegerea unei valori $\lambda_t = \lambda_0$ constante conduce la o descărcare uniformă a efectului datelor vechi, făcînd ca orizontul efectiv, pe baza căruia se determină estimația curentă, să fie format numai din ultimele $N = 1/(1-\lambda_0)$ date. Atunci cînd se permite modificarea factorului de uitare λ_t , orizontul efectiv își va modifica dimensiunea, astfel ca, pentru perioadele cu variații rapide ale parametrilor, fereastra de date să se îngusteze, construindu-se estimații mai brute, dar considerînd numai datele semnificative; în cazul variației lente a parametrilor, fereastra de date să se lărgască, pentru a crește precizia estimației prin utilizarea unei informații mai bogate.

În lucrarea [6] este introdusă o nouă tehnică de deponderare exponențială prin care se dorește rezolvarea unor probleme întâlnite în practica utilizării algoritmilor recursivi. În unele situații se dispune apriori de informația că unii parametri variază mai rapid decât alții. În varianta tradițională, în care λ_t are același efect pentru toți parametrii alcătuiind vectorul θ , alegerea orizontului efectiv de lungime mică permite urmărirea parametrilor rapid variabili, dar precizia care se obține pentru cei lent variabili este scăzută; în cazul alegerii lui λ_t pentru un orizont larg, precizia estimării parametrilor lenți este bună, dar variațiile rapide ale parametrilor nu mai pot fi urmărite. Această problemă poate fi rezolvată, dacă, în locul relației (B48) de adaptare uniformă a matricii P_t prin scalarul λ_t se consideră o relație de adaptare diferită pe fiecare din direcțiile date de vectorii proprii ai matricii P_t .

Această modalitate de adaptare mai prezintă un avantaj: elimină "exploziile" care apar în timpul perioadelor în care informația primită despre evoluția parametrilor este limitată la anumite direcții și toată informația despre direcțiile neexcitate se pierde prin deponderare, făcînd ca vectorii proprii asociați matricii P_t să crească exponențial; pentru algoritmi tradiționali apare o sensibilitate deosebită la excitația pe una din direcțiile vectorilor proprii de normă mare, rezultînd "explozii"- modificări foarte mari ale parametrilor. Pentru algoritmul propus în [6], deponderarea pe direcțiile neexcitate nu se mai produce, toți vectorii proprii ai matricii P_t fiind menținuți la valori mărginite și înlăturînd astfel posibilitatea "exploziilor" în funcționarea algoritmului recursiv în timp.

2.2 Identificarea sistemelor stohastice cu parametri variabili în timp, în scheme de conducere adaptivă.

În sistemele de conducere adaptivă obiectivul principal este proiectarea compensatoarelor care să se comporte bine în conducerea proceselor cu parametri varianți în timp, urmărindu-se satisfacerea cel puțin a cerinței primare de stabilitate a sistemului închis.

Urmărirea variației în timp a parametrilor este realizată de către secțiunea de identificare recursivă care poate fi explicită sau implicită.

În domeniul conducerii adaptive se evidențiază două tipuri de abordări: deterministe și stohastice. Algoritmii de conducere dezvoltați în cadrul teoriei deterministe, deși ating obiectivul stabilizării, nu se comportă optimal în raport cu perturbațiile stohastice (chiar și pentru zgomot alb mărginit performanțele sînt suboptimale). Această situație se datorează utilizării algoritmilor de estimare cu orizont finit, preferați datorită avantajului că amplificarea utilizată în procesul de adaptare a parametrilor nu tinde la zero. În cazul stohastic se dorește, pe lîngă stabilizarea buclei închise și rejecția optimală a zgomotului, ceea ce se

realizează pentru modelele invariante în timp prin utilizarea algoritmilor de estimare cu orizont infinit, pentru care se poate obține în plus și consistența estimărilor la funcționarea în buclă închisă.

Problemele care apar în studiul stabilității sistemelor stohastice variabile în timp sînt mult mai dificil de rezolvat decît pentru sistemele deterministe, fapt ce poate fi ilustrat prin următorul exemplu [7]: pentru sistemul

$$y(k+1) = \theta(k)y(k) + v(k+1) \quad (B49)$$

$$\theta(k+1) = \alpha \theta(k) + \epsilon(k+1), \quad (B50)$$

dacă presupunem că v și ϵ sînt secvențe deterministe mărginite ($|\epsilon|_k < \sigma \sqrt{k}$), se poate arăta următorul rezultat privind mărginirea ieșirii: " $y(k)$ este mărginit pentru orice secvențe v și ϵ , dacă și numai dacă $\alpha / (1-\sigma) < 1$ ". Dacă ne situăm în cadrul stohastic și presupunem că v și ϵ sînt procese independente identic distribuite și de medie zero, nu s-au putut găsi decît condiții necesare, dar nu și suficiente pentru mărginirea lui $E(y^2(k))$.

În [7] este prezentată o procedură adaptivă bazată pe algoritmi de gradient de estimare a parametrilor, iar ca lege de comandă se utilizează un analog al metodelor de varianță minimă. Această procedură asigură, în anumite condiții, stabilitatea pentru o clasă largă de sisteme stohastice liniare variabile în timp.

B3. Identificarea recursivă a sistemelor neliniare

Pentru modelarea sistemelor liniare se dispune de metode foarte bine puse la punct, simple din punct de vedere conceptual și ușor de implementat. În anumite situații aplicarea acestor metode nu va conduce la rezultate acceptabile, un exemplu simplu și foarte des întîlnit în care aproximarea prin modele liniare nu poate fi acceptată constituindu-l sistemele cu neliniarități de tip saturație.

Pentru un sistem causal discret neliniar, una din cele mai utilizate reprezentări o constituie modelul Volterra:

$$y(t) = h_0 + \sum_{i_1=0}^{\infty} h_1(i_1)x(t-i_1) + \\ + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} h_2(i_1, i_2)x(t-i_1)x(t-i_2) + \dots + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \\ \dots \sum_{i_p=0}^{\infty} h_p(i_1, i_2, \dots, i_p)x(t-i_1) \dots x(t-i_p) + \dots, \quad (B51)$$

unde $h_p(\dots)$ este nucleul Volterra de ordin p .

Identificarea recursivă a parametrilor unui model Volterra trunciat (obținut din (B51)) care înlocuiește limita superioară a sumelor cu o întîrziere maximă

N_{\max} și care limitează ordinul maxim al nucleelor la P_{\max} ridică problema multiplicării foarte rapide a numărului de parametri, odată cu creșterea P_{\max} sau N_{\max} , implicând o foarte mare complexitate a calculului necesare.

Într-o altă reprezentare frecvent utilizată pentru sistemele neliniare, modelul este prevăzut cu reacții de la ieșire la intrare și este cunoscut sub numele de ecuație neliniară cu diferențe:

$$y(t) = \sum_{i=1}^M P_i(x(t), x(t-1), \dots, x(t-N), y(t-1), \dots, y(t-N)) \quad (B 52)$$

P_i fiind polinoame de ordin i în variabilele $x(t), \dots, y(t-N)$.

În același mod în care, modelele liniare de tip ecuație cu diferențe pot aproxima cu un număr mic de parametri o relație intrare/ieșire, pentru care ar fi necesar un număr foarte mare de coeficienți ai modelului funcție pondere discretă și pentru modelul (B52), este suficientă o complexitate mult mai mică decât pentru modelul (B51) pentru același grad de aproximare.

Cel mai simplu model neliniar cu reacție este modelul biliniar

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N_1} a_i x(t-i) + \sum_{i=1}^{N_2} b_i y(t-i) + \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} c_{ij} x(t-i) y(t-j) \quad (B 53)$$

Apare în mod evident avantajul simplității modelului (B53) în raport cu cel original (B51) și, ținând cont de faptul că s-a demonstrat că, în anumite condiții foarte generale, modelul biliniar poate aproxima cu o precizie oricât de bună un sistem Volterra, se poate înțelege de ce modelele biliniare sînt utilizate în aplicații foarte diverse: sisteme de conducere, sisteme biologice, sisteme economice.

Au fost publicate câteva lucrări în domeniul algoritmilor recursivi pentru identificarea sistemelor

biliniare (vezi [8]), preocupările fiind în general orientate spre obținerea de metode cu o complexitate cât mai redusă a calculului și, același timp, cu o precizie numerică cât mai bună.

În lucrarea [8] este prezentat algoritmul recursiv de tipul CMMP pentru modele biliniare multivariabile și sînt enunțate câteva rezultate referitoare la convergența estimărilor parametrilor.

Bibliografie

1. LJUNG, L.: *On Positive Real Functions and the Convergence of Some Recursive Schemes*. In: IEEE Trans. Automatic Control, vol.AC-22, 1977, pp.539-551.
2. LJUNG, L.: *Analysis of Recursive Stochastic Algorithms*. In: IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-22, 1977, pp.551-575.
3. SODERSTROM, T., STOICA, P.: *System Identification* Prentice-Hall, London, 1989, 650pg.
4. WAHLBERG, B., KRISHNAMURTHY, V., MOORE, J.B.: *Factorizations that Relax the Positive Real Condition in Continuous Time ELS Schemes*. In: Proceedings of IFAC Congress, Tallin, 1990, pp.209-214.
5. HENRIKSEN, R., WEYER, E.: *Convergence Aspects of Some Robust Estimators Based upon Prefiltering of the Input/Output Data*. In: Proceedings of IFAC Congress, Tallin, 1990, pp.215-220.
6. PARKUM, J.E., POULSEN, N.K., HOLST, J.: *Selective Forgetting in Adaptive Procedures*. In: Proceedings of IFAC Congress 1990, pp.180-185.
7. MEYN, S.P., GUO, L.: *Adaptive Control of Time Varying Stochastic Systems*. In: Proceedings of IFAC Congress, Tallin, 1990, pp.198-202.
8. LESSI, O.: *Recursive and Nonparametric Methods for the Identification of Bilinear Systems*. In: Proceedings of IFAC Congress, Tallin, 1990, pp.233-238.