MULȚIMI FUZZY: UN MODEL.

Prof. dr. mat. Paul Flondor

Institutul Politehnic București

Rezumat. În lucrarea de față se studiază unele aspecte ale "conjecturii Negoiță": mulțimile fuzzy sînt mulțimi ordonate. Se încearcă o abordare generală a relațiilor de ordine implicate într-un asemenea model.

Cuvinte cheie: mulțime fuzzy, relație de ordine, topos, experiment fuzzy.

În cele ce urmează se fac unele considerații privind modelarea cu mulțimi fuzzy în legătură, mai ales, cu așa numita conjectură Negoiță (formulată de exemplu în [1] și reluată in [2]).

În discuția de mai jos modelul intuitiv fundamental, care ar fi "experimentul fuzzy elementar", constă în verificarea practică de către subiect a extensionalității conceptelor. Mai precis, aici interesează latura logică (predicat) a conceptului, și nu latura ontologică (atribut). Parte din intuiția cuprinsă în acest model este bine ilustrată de următoarele rînduri ale lui Nietzsche:

"Orice concept ia naștere prin echivalarea a ceea ce nu este echivalent. Pe cît este de sigur că o frunză nu este niciodată identică cu alta, pe atît de sigur că, conceptul de frunză a fost creat prin ignorarea deliberată a acestor deosebiri individuale, iar el trezește acum iluzia că, în natură, în afară de frunze ar mai exista ceva care ar fi "frunză", un fel de formă originară după care ar fi țesute, desenate, decupate, colorate, încrețite, pictate toate frunzele, dar de mîini neîndeminatice astfel încît să nu fi fost obținut nici un exemplar corect și sigur ca o copie fidelă a formei originare." (Vezi [4]).

Așa cum se știe o mulțime fuzzy a fost definită de Zadeh ca o funcție $f: X \to [0,1]$. Pentru $x \in X$, $f(x)$ a fost gîndit ca "grad de apartenență" al elementului x la "f" și variate interpretări au încercat să justifice această denumire. Se observă că noțiunea de mulțime fuzzy apare în cadrul teoriei "clasice" a mulțimilor. Faptul că X este dată presupune o activitate semantică prealabilă, alta decît "experimentul fuzzy". Generalizarea are la bază ideea de funcție caracteristică a unei submulțimi, astfel că esența acestei generalizări este de natură matematică. Pe de altă parte, intervalul $[0,1]$ impune oarecare intuiție a numărului real în procesul de "testare". Chiar dacă în timp s-au considerat și alte mulțimi de testare, se pare că structura de ordine este esențială (conjectura Negoiță).

Să analizăm pe scurt unele din structurile induse pe X de o mulțime fuzzy $f^{-1}(d): X \to [0,1]$. În primul rînd-structura de "fibrat". Se consideră fibrele $f^{-1}(d)$ ale aplicației f; X ca reuniune a fibrelor, "legate de $[0,1]$". Apare în acest fel o clasificare pe X. Este o echivalare a ceea ce nu era echivalent.

Această concepție permite definirea naturală a morfismelor de mulțimi fuzzy ca diagrame comutative:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

Categoria obținută este un topos. ([3]). Din păcate, incontestabilul avantaj de a lucra într-un topos, pare umbrit de definiția destul de rigidă a morfismelor. În plus, nu este evident că o logică intuiționistă convine "experimentului fuzzy", menționat mai sus. Ar mai fi de observat că valorile de adevăr în acest caz nu sînt elementele intervalului $[0,1]$ ceea ce, din punct de vedere intuitiv, reprezintă o complicație.

$f: X \to [0,1]$ induce pe X și o relație de pre-ordine:

$$xRy \Leftrightarrow f(x) \le f(y)$$

Se observă că, în general, xRy și yRx fără ca $x = y$ (este necesar doar $f(x) = f(y)$). Morfismele mai sus definite sînt compatibile cu relațiile de pre-ordine corespunzătoare. De aici se obțin pre-ordini "naturale" pentru diferite construcții specifice toposurilor.

Pentru acest punct de vedere se poate consulta [3].

Considerarea relației de pre-ordine induse de $f: x \to [0,1]$ permite trecerea în domeniul **relațional**. O mulțime fuzzy apare ca o mulțime pre-ordonată cu ajutorul unei evaluări numerice. Într-un fel sîntem la un nivel "superior" de modelare în raport cu teoria "clasică" a mulțimilor; apar "nuanțe" pe lîngă apartenența uzuală. Un obiect poate fi mai mult sau mai puțin "ceva" decît altul, un predicat admite comparații și variații de apartenență. Este de presupus că un concept are o asemenea structură (de pre-ordine)"încorporată", dobîndită evolutiv. Rămîne de văzut dacă această structură poate fi rezultatul unei evaluări numerice.

Sîntem, probabil, în cercul de idei legate de "conjectura Negoiță". Așa cum este enunțată, de exemplu în [2], conjectura afirmă: **mulțimile fuzzy sînt mulțimi ordonate**. Am văzut mai sus cum poate fi exprimat formal acest lucru pentru mulțimile fuzzy în sens Zadeh.

Dacă luăm conjectura (ca atare) ca **definiție** a mulțimilor fuzzy, ne vom situa într-un cadru mai general: pre-ordinile pe mulțimi diferite nu rezultă neapărat din evaluări într-o mulțime comună.

Acest aspect creează o serie de probleme, de exemplu privind operațiile cu "noile" mulțimi. Pentru a defini reuniunea a două mulțimi fuzzy (în sens Zadeh) $f: X \to [0,1]$ și $g: X \to [0,1]$ se pune prin definiție $(f \vee g)(x) = \sup\{f(x), g(x)\} \in [0,1]$.

Remarcăm că, nu numai ordonarea obiectelor în cadrul conceptelor apare aici. Este necesar să putem compara și conceptele prin prisma unui obiect și, mai mult, să comparăm obiecte diferite în cadrul unor concepte diferite. Toate acestea se realizează "automat", dacă structurile de ordine sînt "imagini inverse", prin evaluări într-o singură mulțime" ($[0,1]$ în teoria obișnuită).

Rezultă necesitatea de a completa conjectura de mai sus. Să considerăm mulţimile X, C mulţimea obiectelor şi mulţimea conceptelor. Nu presupunem pentru început structuri suplimentare pe X sau C deşi cel puţin C are natural structuri "logice" evidente. Pentru a modela "operaţional" experimentul fuzzy considerăm ca date:

- pentru fiecare $f \in C$ o relaţie de pre-ordine pe X; $xR_f y$
- pentru fiecare $x \in X$ o relaţie de pre-ordine pe C; $fR_x g$
- o relatie de pre-ordine pe XxC, R astfel încît:

$$xR_f y \Rightarrow (x,f)\ R\ (y,f),\ fR_x g \Rightarrow (x,f)\ R\ (x,g)\ (\ ),\ x,y,f,g.$$

Este probabil ca procesul de cunoaştere să creeze structuri de tipul celei de mai sus. Aceste structuri pot fi variabile modificîndu-se cu fiecare experienţă pînă la un anumit prag de "stabilitate". Pe o anumită treaptă a acestei evoluţii unele relaţii de pre-ordine pot deveni "cuantificabile" şi, deci, evaluabile.

Experimentul fuzzy apare astfel ca o modificare într-o structură pre-ordonată, un pas într-un sistem dinamic cu intrări date empirice şi stări mulţimi pre-ordonate. Detalii privind lucrul cu noţiunile de mai sus vor apărea într-o viitoare lucrare. Problema dezbătută pe scurt în această lucrare a fost concretizarea (precizarea) conjecturii Negoiţă.

Trebuie remarcat că, alături de structura de ordine, o anumită importanţă în modelarea cu mulţimi fuzzy prezintă relaţiile de toleranţă. Schimbarea, proprie indivizilor empirici, poate fi mai bine înţeleasă cu ajutorul relaţiilor de toleranţă. Faptul că fibrele unei mulţimi fuzzy sînt clase de echivalenţă împiedică înţelegerea schimbării "nuanţelor" sau, mai exact, mişcarea indivizilor empirici în interiorul conceptului

BIBLIOGRAFIE

1. NEGOIŢĂ, C.V.: *Fuzzy Systems*, Editura Abacus Press, 1981.
2. TOTH, H.: *From fuzzy-set theory to fuzzy set-theory: Some critical remarks on existing concepts.* În: *FUZZY Sets and Systems*,nr.23, 1987.
3. TOTH, H.: *Categorial properties of f-set theory.* În: *Fuzzy Sets and Systems*, nr.33, 1989.
4. NIETZSCHEFR, F.: *Despre adevăr şi minciună în înţeles extra-moral.* În Viaţa Românească, vol. LXXXV, nr.1, Bucureşti 1990.