

# DESCRIEREA SISTEMELOR PRIN MODELE CONTINUE ȘI DISCRETE ECHIVALENTE

Ing. Bălan Theodor

Institutul de Cercetări în Informatică

**Rezumat.** Metodele moderne de realizare a sistemelor de comandă au la bază utilizarea unor modele discrete, implicând și includerea calculatoarelor numerice în probleme de identificare, simulare și control.

Lucrarea își propune să prezinte suportul teoretic al trecerii de la modelele continue la modelele discrete și invers, cât și evaluarea performanțelor acestor schimburi de reprezentare.

Lucrarea prezintă implementarea algoritmilor studiați, cât și rezultatele simulărilor pe modele continue și discrete, liniare și deterministe.

**Cuvinte cheie :** modele continue-discrete, conversii, simularea sistemelor, analiza răspunsurilor, sistem de programe.

## 1. Introducere

În practica conducerii proceselor tehnologice, una din principalele probleme este obținerea unui model cât mai exact al obiectului condus.

Prin aplicarea metodelor de identificare analitică și experimentală se poate obține un model continuu, exprimat prin ecuații diferențiale, respectiv un model discret, exprimat prin ecuații cu diferențe.

În realitate, în mod concret, o identificare cât mai precisă a proceselor implică o abordare mixtă. Prin identificarea analitică se vor obține informații despre structura modelului, iar prin identificarea experimentală se vor determina valorile parametrilor modelului.

Pentru a determina un model cât mai bun se aplică, de obicei, mai multe metode distincte de identificare, unele continue, altele discrete. Evaluarea performanțelor se face din considerente de precizie pe calculatoare numerice, ceea ce implică tratarea modelelor unitare.

O asemenea abordare implică necesitatea existenței unor procedee de trecere de la modelul continuu la modelul discret și invers.

Deși în practică există puține procese discrete, utilizăm reprezentări prin modele discrete ca o aproximație a proceselor continue pentru că modelele discrete sînt mai adaptabile prelucrărilor numerice, iar marea majoritate a echipamentelor de măsură și comandă sînt de tip numeric. De asemenea, legile de reglare privind conducerea proceselor sînt determinate sub formă discretă, iar dacă modelul sistemului condus a fost identificat printr-o procedură ce are drept rezultat un model continuu, atunci este necesară tratarea modelului și e regulatorului în mod unitar.

Alte motivații privind oportunitatea schimbării

reprezentării modelelor în abordarea unor probleme de identificare, simulare și conducere sînt prezentate în [1].

Lucrarea își propune să studieze această problemă în cazul unor sisteme deterministe lineare. Se va urmări corespondența, în ambele sensuri, între un model continuu și un model discret printr-o transformare lineară, cât și printr-o transformare bilineară, furnizîndu-se observații critice privind calitatea modelelor obținute prin cele două transformări. Pentru studierea comparativă a performanțelor modelelor se vor defini criterii de evaluare, care vor opera asupra răspunsurilor modelelor discrete, cât și asupra răspunsului modelului continuu, obținut prin integrare numerică, avînd o precizie ridicată.

În anexele lucrării sînt prezentate listele conținînd implementarea algoritmilor de realizare a modelelor discrete și continue, cât și de determinare a răspunsurilor acestor modele.

## 2. Corespondența modelelor continue - discrete prin transformarea lineară

Presupunem un sistem continuu linear, descris de ecuația diferențială:

$$\sum_{i=0}^n a_i \left( \frac{dy}{dt} \right)^{(n-i)} = \sum_{i=0}^m b_i \left( \frac{dU(t-\tau)}{dt} \right)^{(m-i)} \quad (1)$$

cu  $n > m$ .

Pentru un sistem discret, intrarea  $u(t)$  și ieșirea  $y(t)$  se cunosc și se determină la momentele  $t = 0, T, 2T, \dots; T$  fiind perioada de eșantionare. Introducînd operatorul de întîrziere cu un tact de eșantionare definit prin:

$$q^{-1}(X(t)) = X(t-T) \quad (2)$$

sistemul discret în  $q$  este descris, în general, de ecuațiile:

$$C(q^{-1})y(t) = q^{-K}D(q^{-1})U(t) \quad (3)$$

unde

$$C(q^{-1}) = \sum_{i=0}^r c_{r-i} q^{-i} \quad (4)$$

$$D(q^{-1}) = \sum_{i=0}^p d_{p-i} q^{-i} \quad (5)$$

$$\tau = KT \quad (6)$$

Din relația (3) se observă că timpul mort  $kT$  își pune amprenta asupra intrării  $u(t) \rightarrow u(t-kT)$  prin translația axei timpului.

Vom putea simplifica relațiile fără a diminua generalitățile abordării presupunînd timpul mort nul.



O primă modalitate de trecere de la sistemul descris de ecuația (1) la sistemul descris de ecuația (3) o vom face scriind formal aproximația operatorilor:

$$\frac{d}{dt} \cong \frac{1}{T} (1 - q^{-1}) \quad (7)$$

respectiv

$$q^{-1} \cong 1 - T \frac{d}{dt} \quad (8)$$

Relațiile de trecere de la ecuația diferențială (1) cu  $\tau = 0$  la ecuația:

$$C(q^{-1})y(t) = d(q^{-1})u(t) \quad (9)$$

$$\text{grd } C(q^{-1}) = n \quad (10)$$

$$\text{grd } d(q^{-1}) = m \quad (11)$$

sînt

$$c_i = (-1)^{m-\theta} \sum_{j=0}^i C_{n-j}^{i-j} a_j T^j \quad (12)$$

pentru  $\theta T = 0, 1, \dots, n$

$$d_i = (-1)^{m-i} T^{n-m} \sum_{j=0}^i C_{m-j}^{i-j} b_j T^j \quad (13)$$

pentru  $\theta_i = 0, 1, \dots, m$

Pentru trecerea de la ecuația (3) cu  $k = 0$  la ecuația:

$$\sum_{i=0}^r a_i \left(\frac{dy}{dt}\right)^{(r-i)} = \sum_{i=0}^p b_i \left(\frac{dU}{dt}\right)^{(p-i)} \quad (14)$$

coeficienții sînt:

$$a_i = (-T)^{r-i} \sum_{j=0}^i c_j C_{n-j}^{r-i-j} \quad (15)$$

pentru  $i = 0, 1, \dots, r$

$$b_i = (-T)^{p-i} \sum_{j=0}^i d_j C_{p-j}^{p-i-j} \quad (16)$$

pentru  $i = 0, 1, \dots, p$

Mai întii, ne propunem să determinăm valoarea stabilizată a ieșirii pentru o intrare treptată unitară. La trecerea de la sistemul continuu la sistemul discret, pentru sistemul continuu ieșirea stabilizată va fi:

$$y_{sc} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s)U(s) = \frac{b_m}{a_n} \quad (17)$$

iar pentru ieșirea stabilizată a sistemului discret

$$y_{sc} = \left( \sum_{i=0}^m d_i \right) / \left( \sum_{i=0}^n c_i \right) \quad (18)$$

(12) și (13) în evaluarea sumelor

$$\sum_{i=0}^n c_i = T^n a_n \quad (19)$$

$$\sum_{i=0}^m d_i = T^n b_m \quad (20)$$

Se observă că

$$Y_{sd} = Y_{sc} \quad (21)$$

la trecerea de la sistemul discret la sistemul continuu, ieșirea stabilizată pentru sistemul discret va fi:

$$y_{sd} = \left( \sum_{i=0}^r d_i \right) / \left( \sum_{i=0}^p c_i \right) \quad (22)$$

iar pentru ieșirea stabilizată a sistemului continuu

$$y_{sc} = \frac{b_r}{c_p} \quad (23)$$

Ținînd cont de (15) și (16), rezultă că relația (21) este verificată. Deci, analiza aproximațiilor făcute trebuie să aibă în vedere valorile ieșirilor modelelor la momente mici de timp.

Lista subprogramelor MODEL1DC, T1LDC pentru transformarea lineară a modelului discret în model continuu, cît și a subprogramelor MODEL1CD, T1LCD pentru transformarea lineară a modelului continuu în model discret este prezentată în Anexa 1.

### 3. Corespondența modelelor discrete = continue prin transformarea bilineară

O altă modalitate de a realiza schimbarea de la model continuu la model discret și invers se poate obține prin intermediul funcțiilor de transfer  $H(s)$  pentru modelul continuu în  $s$ , respectiv  $G(z^{-1})$  pentru modelul discret în  $z$ . Relațiile de bază pentru această transformare sînt:

$$G(z^{-1}) = [H(s)]_s = \frac{1}{T} \ln z \quad \text{în } z \quad (24)$$

$$s \cong \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (25)$$

respectiv

$$z^{-1} \cong \frac{2-sT}{2+sT} \quad (26)$$

Considerînd  $H(s)$  de forma

$$H(s) = \left( \sum_{i=0}^m b_i s^{m-i} \right) / \left( \sum_{i=0}^n a_i s^{n-i} \right) \quad (27)$$

utilizînd relațiile (24-25) vom obține



$$G(z^{-1}) = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} \quad (28)$$

$$C(z^{-1}) = \sum_{i=0}^n c_{n-i} z^{-i} \quad (29)$$

$$D(z^{-1}) = \sum_{i=0}^m d_{m-i} z^{-i} \quad (30)$$

unde coeficienții funcției sînt:

$$c_p = (-1)^{n-p} \sum_{j=0}^p T^{p-j} C_{n-p+j} \cdot \quad (31)$$

$$\cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p+j} 2^{n-i} (-T)^i C_{p+i-j}^i a_{p+i-j} \right)$$

$$d_{n-p} = (-1)^{n-p} T^{n-m} \sum_{j=0}^p (-2)^{p-j} C_{n-p+j}^j \cdot \quad (32)$$

$$\cdot \left( \varphi \left( \sum_{i=0}^{p-j} 2^i T^{m-i} C_{n-i}^{p-j} b_{m-i} \right) \right)$$

pentru  $p = 0, 1, \dots, n$

$$\varphi(r) = \begin{cases} m & \text{pentru } r = 0, 1, \dots, (n-m) \\ n-r & \text{pentru } r = (n-m+1), \dots, n \end{cases} \quad (33)$$

Considerînd pentru modelul discret funcția de transfer  $G(z^{-1})$  de forma:

$$G(z^{-1}) = \frac{\sum_{i=0}^n d_{n-i} z^{-i}}{\sum_{j=0}^n c_{n-i} z^{-i}} \quad (34)$$

vom obține pentru modelul continuu funcția  $H(s)$  cu coeficienții:

$$a_p = (-T)^{n-p} \sum_{j=0}^p C_{n-p+j}^i 2^{2p-j} \cdot \quad (35)$$

$$\cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p+j} (-1)^i C_{p+i-j}^i c_{p+i-j} \right)$$

$$b_p = (-T)^{n-p} \sum_{j=0}^p C_{n-p+j}^j 2^{2p-j} \cdot \quad (36)$$

$$\cdot \left( \sum_{i=0}^{n-p+j} (-1)^i C_{p+i-j}^i d_{p+i-j} \right)$$

pentru  $p = 0, 1, \dots, n$ .

După cum se observă, utilizînd transformarea bilineară, expresiile coeficienților sînt mult mai complicate decît cele obținute prin transformarea lineară, implicînd un volum de calcul care trebuie avut în vedere în cazul utilizării modelului discret în  $z$  în conducerea unui proces.

Să urmărim și-n cazul transformatei bilineare valoarea stabilizată a ieșirilor modelelor pentru o intrare treptată unitară.

La trecerea de la sistemul continuu la sistemul discret, pentru sistemul continuu valoarea stabilizată a ieșirii va fi dată de relația (17), iar pentru sistemul discret valoarea stabilizată a ieșirii este dată de:

$$y_{sd} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) G(z^{-1}) U(z^{-1}) \quad (37)$$

Pentru modelul descris de funcția de transfer  $G(z)$  dată de relația (34) rezultă:

$$y_{sd} = \left( \sum_{i=0}^n d_i \right) / \left( \sum_{i=0}^n c_i \right) \quad (38)$$

care este similară cu (18).

Ținînd cont de (3) și (24) în evaluarea sumelor obținem același rezultat ca și la transformarea lineară:

$$\sum_{i=0}^n c_i = T^n a_n \quad (39)$$

$$\sum_{i=0}^n d_i = T^n b_m \quad (40)$$

Constatăm ca valoarea stabilizată a ieșirilor modelelor este aceeași.

La trecerea de la sistemul discret la sistemul continuu ieșirea stabilizată pentru sistemul discret va fi:

$$y_{sd} = \left( \sum_{i=0}^n d_i \right) / \left( \sum_{i=0}^n c_i \right) \quad (41)$$

iar pentru ieșirea stabilizată a sistemului continuu:

$$y_{sc} = \frac{b_n}{a_n} \quad (42)$$

Ținînd cont de (7) și (28) rezultă ca:

$$a_n = 2^n \sum_{i=0}^n c_i \quad (43)$$

$$b_n = 2^n \sum_{i=0}^n d_i \quad (44)$$

deci, și-n acest caz valoarea stabilizată a ieșirilor modelelor este aceeași. Concluzia rezultată din analiza



făcută pentru transformata lineară este valabilă și-n cazul transformatei bilineare.

Lista subprogramelor MODEL2DC, T2LDC pentru transformarea bilineară modelului discret în model continuu, cât și a subprogramelor MODEL2CD, T2LCD pentru transformarea bilineară a modelului continuu în model discret este prezentată în Anexa 1.

#### 4. Determinarea răspunsurilor modelului continuu și a modelelor discrete

Pentru determinarea răspunsului modelului discret în q descris de relațiile (9-11) s-a folosit subprogramul Yq listat în Anexa 2.

Pentru determinarea răspunsului modelului discret în z descris prin funcția de transfer G(z) dată de relația (28) s-a folosit în algoritm de împărțire nelimitată știindu-se că:

$$y(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots \quad (45)$$

Lista subprogramului Yz care implementează acest algoritm este prezentată în Anexa 2.

Determinarea răspunsului unui model continuu, descris de ecuația (1) s-a făcut prin integrarea numerică prin metoda RUNGE-KUTTA-VERNER de ordinul V și VI, utilizând această funcție din pachetul de programe SIMPACK.

Întrucât integrarea se face pentru un sistem de forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= c^T x \end{aligned} \quad (46)$$

din ecuația (1) s-a generat o realizare standard complet observabilă RSCO de forma;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 & -a_{p+m} \\ 1 & 0 & & 0 & -a_{p+m-1} \\ 0 & 1 & & 0 & -a_{p+m-2} \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_p \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ b_{m-2} \\ b_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

unde  $p = n - m$ , iar  $a_0 = 1$

Lista subprogramului FCN în care s-a implementat modelul (46) se află în Anexa 2. Întrucât se poate obține răspunsul modelului cu o precizie impusă, îl putem considera etalon în comparațiile cu răspunsurile modelelor discrete.

O problemă importantă este și alegerea perioadei de eșantionare. În afara teoremei de eșantionare a lui Shannon care oferă ca rezultat cât trebuie să fie perioada de eșantionare pentru ca pierderea de informație să fie minimă, nu există încă un alt rezultat care să determine o perioadă de eșantionare optimă. Deci, perioada de eșantionare trebuie aleasă cât mai mică posibil, restricțiile pentru acest studiu fiind date de capacitatea limitată de calcul utilizată.

#### 5. Studiu comparativ privind performanțele aproximării modelelor lineare continue prin modele discrete

Pentru a putea evalua performanțele aproximării răspunsurilor modelelor continue și discrete ne-am fixat două criterii de comparație. Un criteriu global:

$$J = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_c(iT) - y_d(iT))^2} \quad (48)$$

unde

N - numărul de valori în care este determinat răspunsul;  
 $y_c$  - răspunsul modelului etalon;  
 $y_d$  - răspunsul modelelor discrete în q sau z  
 cât și un criteriu punctual:

$$\epsilon_{\max} = \max_{i=1, N} \left\{ \frac{y_c(iT) - y_d(iT)}{y_c(iT)} \cdot 100 \right\} \% \quad (49)$$

O primă concluzie a rezultat imediat prin analiza efectuată pe un sistem de ordinul I: aproximațiile între modele sînt valabile numai pentru sisteme rapide.

Astfel, pentru un sistem cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{i}{T s + 1} \quad (50)$$

alegînd ca  $T = 0.04T_p$  și  $n = 200$  valori, au rezultat următoarele valori pentru criteriile alese;

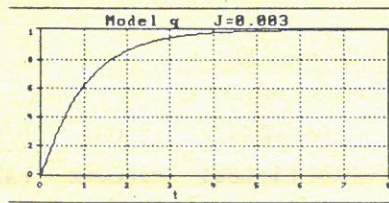
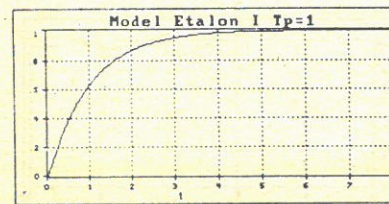
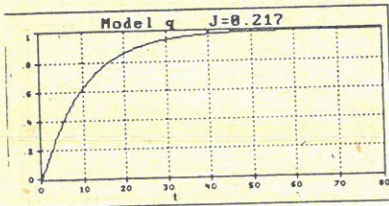
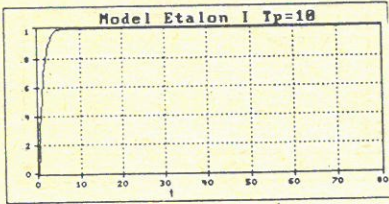
$T_p$	$T_q$	$\epsilon_{\max q} \%$	$T_z$	$\epsilon_{\max z} \%$
10	0.217306	88.334	0.219364	94.052
5	0.185578	78.782	0.187218	89.183
2	0.105422	49.974	0.106237	74.497
1	0.003494	1.910	0.004983	49.993

TABEL 1.

Pentru edificare vom prezenta și grafic răspunsurile modelului continuu și discret în q (similar modelul



discret în z, ținând cont de valorile Jq și Jz foarte apropiate) pentru valorile externe ale constantei Tp.



$$H(s) = \frac{1}{10s+1}; (10.4-10q^{-1})y(t) = 0.4u(t)$$

$$G(z^{-1}) = \frac{-0.4-0.4z^{-1}}{-20.4+19.6z^{-1}}$$

FIGURA 1

Se observă clar aproximația grosieră în primul caz față de aproximația foarte bună în al doilea caz, fapt reflectat și de valorile criteriului J.

Vom orienta acum studiul spre analiza influenței creșterii ordinului sistemului, pentru constante mici de timp.

Funcția de transfer a unui sistem, dată de relația (27) poate fi pusă sub forma:

$$H(s) = \sum_j \frac{1}{sT_{pj}+1} + \sum_j \frac{\omega_{ni}^2 (T_{pi} s + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_{ni}s + \omega_{ni}^2} \quad (51)$$

Devine interesant a se studia mai atent răspunsul modelelor discrete pentru sisteme cu funcția de transfer de forma:

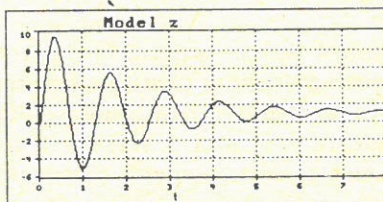
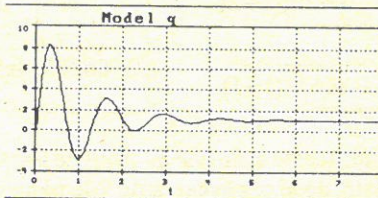
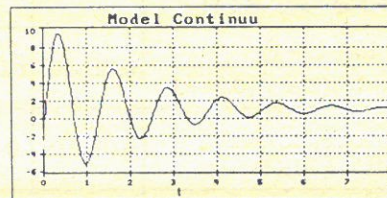
$$H(s) = \frac{\omega_n^2 (T_p s + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (52)$$

Considerînd perioada de eșantionare invers proporțională cu factorul  $\xi\omega_n$  se poate demonstra analitic pe modelul continuu și se poate verifica numeric pe modelele discrete că răspunsul nu depinde de  $\xi\omega_n$ . Pentru  $\omega_n = 5$ ,  $N = 200$  și  $T = 0.04/\xi\omega_n$  au rezultat următoarele valori pentru criteriul J:

Tp ↓	ξ →	0.05	0.1	0.2	0.5	0.8
0	Jq	0.21309	0.10328	0.04764	0.01583	0.00491
	Jz	0.16431	0.04817	0.01918	0.00716	0.00444
1	Jz	0.76038	0.51637	0.22939	0.04947	0.02232
	Jq	0.83026	0.24257	0.09666	0.03622	0.02244
2	Jz	1.50507	1.02700	0.46050	0.14940	0.04636
	Jq	1.64259	0.48012	0.19102	0.08991	0.04441
5	Jz	3.75715	2.57131	1.15949	0.37979	0.11899
	Jq	4.09914	1.19852	0.47638	0.22397	0.11040
10	Jz	7.51665	5.14930	2.3262	0.76435	0.24024
	Jq	8.19999	2.39780	0.95273	0.44786	0.22075

TABEL 2.

Exemplificăm și grafic prin răspunsul modelului subliniat:



$$H(s) = \frac{25(2s+1)}{s^2+s+25};$$

$$(1.12-2.08q^{-1}+q^{-2})y(t) = (2.04-2q^{-1})u(t)$$

$$G(z^{-1}) = \frac{4.04+0.08z^{-1}-3.96z^{-2}}{4.2-7.92z^{-1}+3.88z^{-2}}$$

FIGURA 2.



Cîteva observații privind modelul de ordinul II se impun:

- prezența unui zero cît mai apropiat de origine alterează vizibil performanțele aproximării;
- creșterea factorului de amortizare influențează pozitiv criteriul J;
- răspunsul modelului în z, chiar dacă urmărește mai bine răspunsul oscilant al modelului etalon, introduce un decalaj, astfel că performanțele nu sînt așa de bune pe cît ne-am fi așteptat;
- răspunsul modelului în q este puternic amörtizat, aproximînd mai bine răspunsul unui sistem cu factor de amortizare ridicat.

În final, vom mai prezenta rezultatele obținute pentru cîteva sisteme de ordin superior, însoțite de observații.

H(s)	Jq	Jz
$\frac{10}{(2s+1)(15s+1)(0.5s+1)}$	0.003065	0.024219
$\frac{5s^2+9s+30}{3(s^2+0.5s+10)(2s+1)}$	0.043763	0.056765
$\frac{10(0.2s+1)}{(s^2+0.5s+10)(2s+1)(0.5s+1)}$	0.013842	0.022100
$\frac{10}{(s^2+0.5s+10)(2s+1)}$	0.016169	0.03688
$\frac{20}{(s^2+0.5s+10)(s+2)}$	0.016169	0.076593
$\frac{1}{s(s^2+0.2s+5)(s+1)}$	0.008217	0.55324

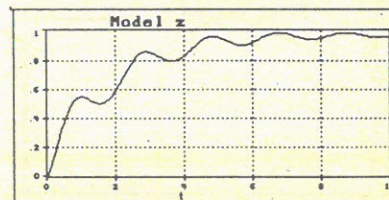
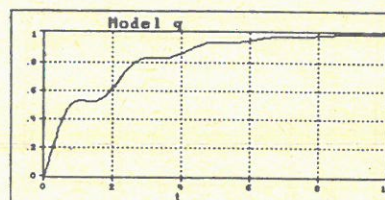
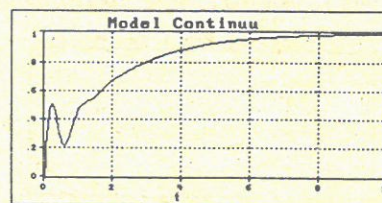
TABEL 3.

În primul rînd, aceste exemple au rolul de a arăta cum pot fi analizate, de la caz la caz, soluțiile pentru a face o bună alegere asupra metodei de discretizare utilizată.

Această analiză trebuie privită în două direcții după cum polii modelului continuu sînt reali sau complecși. În cazul polilor reali, modelul discret în q se dovedește mai bun, chiar dacă ordinul sistemului crește, decît modelul discret în z. În cazul polilor complecși, modelul discret în z aproximează mai bine "specificul răspunsului" față de modelul discret în q, care are o tendință de "a uniformiza răspunsul".

Exemplificăm prin prezentarea grafică a răspunsului pentru modelul subliniat:

Nu este de neglijat nici modelul discret obținut printr-o structură de tip "cascadă", care să utilizeze,



$$H(s) = \frac{5s^2+9s+30}{3(s^2+0.5s+10)(2s+1)}$$

$$G(z^{-1}) = \frac{-1.048+0.943z^{-1}+1.033z^{-2}-0.958z^{-3}}{-49.51+144.88z^{-1}-142.50z^{-2}+47.10z^{-3}}$$

$$(6.457-18.753q^{-1}+18.3q^{-2}-6q^{-3})y(t) =$$

$$= (0.276-0.522q^{-1}+0.25q^{-2})u(t)$$

FIGURA 3

atît modelul discret în q, cît și modelul în z conform relației (51).

## 6. Concluzii finale

Modelele discrete prezentate se dovedesc un instrument eficient, simplu și rapid în simularea proceselor. Ele reprezintă un mijloc de neînlocuit în conducerea proceselor tehnologice.

Dar alegerea unuia sau realizarea unui model discret mixt trebuie să se facă numai printr-o analiză atentă a răspunsurilor teoretice discrete și continue și a răspunsurilor ridicate din proces.

În acest sens, pachetul de programe DISCRET, care realizează schimbarea formei de reprezentare a modelelor și simularea acestora se dovedește un instrument deosebit de util.



## Bibliografie

1. TERTISCO, M., STOICA, P. - *Identificarea și estimarea parametrilor sistemelor*, Editura Academiei, București 1980.
2. TERTISCO, M., STOICA, P., POPESCU, TH.- *Identificarea asistată de calculator a sistemelor*, Editura Tehnică, București, 1987.
3. TH. POPESCU - *SIMPACK pachet de programe pentru simularea sistemelor*, Manual de utilizare, 1989.
4. BĂLAN TH. - *DISCRET pachet de programe pentru simularea sistemelor liniare*, Manual de utilizare, 1990.
5. RACOVEANU N. - *Automatica*, I.P.B. 1976.
6. \* \* \* - *IMSL library reference manual*, 1980.



## ANEXA 1.

```

c
c
c Funcția. Combinări Co (m,k)
c
Function Co (m, k)
if (m.ge.k) goto 3
write (*, 300)
300 Format (' ** eroare în modulul I **')
goto 1
3 x=1.
If ((m.eq.0).or.(k.eq.0).or.(k.eq.m)) goto 1
if ((2*k).GT.m) k=m-k
do 2 i=1,k
2 x=x*(m+1-i)/(k-i+1)
1 co=x
return
end

c
c
c Calculul vectorului "Coeficienții Polinomului
Continuu"
c
n - din vector (grad pol + 1)
x(i) - vectorul coef polinom continuu în ordine
descrescătoare
T - perioadă eșantionare
y(i) - vectorul coef polinom discret
c
c
Subroutine MODEL1CD (n,x,t,y)
Dimension x(n), y(n)
do 1 i=1,n
y(i)=0
do 2 j=1,i
2 y(i)=y(i)+CO(n-j,i-j)*T**(j-1)*x(j)
y(i)=y(i)*(-t)**(n-i)
1 continue
return
end

c
c
c Calculul Modelului Continuu
c
n - dim vector numitor grad pol + 1)
c(i) - vectorul coef polinom discret i=1, n
în ordine descrescătoare
m - dim vector numărator (grad pol + 1)
d(j) - vectorul coef polinom discret j=1, m
în ordine descrescătoare
T - perioada eșantionare
a(i) - vectorul coef polinomului în var operator
derivare pe ieșire
b(j) - vectorul coef polinomului în var operator
derivare pe intrare
c
c
Subroutine T1LDC (m, d, n, c, t, b, a)
Dimension A(n), B(m), C(n), D(m)

```

```

Call Model1DC(n, c, t, a)
Call Model1DC(m, d, t, b)
return
end

c
c Calculul vectorului "Coeficienții Polinomului
Discret în q"
c
n - dim vector (grad pol + 1)
x(i) - vectorul coef polinom continuu în ordine
descrescătoare
T - perioada eșantionare
y(i) vectorul coef polinom discret
c
c
Subrutine MODEL1CD (n, x, T, y)
Dimension x(n), y(n)
semn=1
if(2*(n/2).eq.n) semn=-1
do 1 i=1,n
y(i)=0
do 2 j=1,i
2. y(i)=CO(n-j,i-j)*T**(j-1)*x(j)
y(i)=y(i)*semn
semn=-semn
1 continue
return
end

c
c
c Calculul Modelului Discret în q
c
n - dim vector numitor (grad pol + 1)
a(i) - vectorul coef polinom i+1, n în ordine
descrescătoare
m - dim vector numărator (grad pol + 1)
b(j) - vectorul coef polinom continuu j=1, m
în ordine descrescătoare
T - perioada eșantionare
c(i) - vectorul coef polinomului în var
operator întârziere pe ieșire
d(j) - vectorul coef polinomului în var
operator întârziere pe intrare
c
c
Subrutine T1LCD (m, b, n, a, t, d, c)
Dimension A(n), B(m), C(n), D(m)
CALL model1CD (n, a, t, c)
Call Model1CD (m, b, t, d)
Fac=T**(n-m)
do 1 i=1,m
1 d(i)=d(i)*fac
return
end

c
c
c
c

```



```

c
c Calcul vector "Coeficienții Polinomului
c Discret în z"
c
c m - dim vector (grad pol +1) polinom continuu
c x(i) - vectorul coef polinom continuu în ordine
c descrescătoare
c T - perioada eșantionare
c n - dim vector (grad pol +1) polinom discret
c y(j) - vectorul coef polinom discret

```

```

c
c Subroutine MODEL2CD(n, m, x, t, y)
c Dimension x(m), y(n)
c semn=1
c if(2*(n/2).eq.n) semn=-1
c do 1 k=1,n
c y(n+1-k)=0
c do 2 j=1,k
c sum=0
c mf=m
c if(k-j).gt.(n-m)) mf=n-k+j
c do 3 i=1,mf
3 sum=sum+t**(m-i)*2**(i-1)*Co(n-i,k-j)*x(m+1-i)
2 y(n+1-k)=y(n+1-k)+sum*(-2)**(k-j)*Co(n-k+j-1,j-1)
y(n+1-k)=y(n+1-k)*semn
semn=-semn
1 continue
return
end

```

```

c
c Calculul modelului Discret în z
c
c n - dim vector numitor(grad pol +1)
c a(i) - vectorul coef polinom continuu i=1, n
c în ordine descrescătoare
c m - dim vector numărator (grad pol +1)
c b(j) - vectorul coef polinom continuu j=1, m
c în ordine descrescătoare
c T - perioada eșantionare
c c(i) - vectorul coef polinomului în
c variabila z pe ieșire
c d(i) - vectorul coef polinomului în
c variabila z pe intrare

```

```

c
c Subroutine T2LCD(m, b, n, a, t, d, c)
c Dimension A(n), B(m), C(n), D(n)
c Call Model2CD(n, n, a, t, c)
c Call Model2CD(n, m, b, t, d)
c fac=T**(n-m)
c do 1 i=1, n
1 d(i)=d(i)*fac
return
end

```

```

c
c
c

```

```

c
c Calculul vector "Coeficientul Polinom Continuu"
c
c n - dim vector (grad pol +1)
c x(i) - vectorul coef polinom discret în ordine
c descrescătoare
c T - perioada eșantionare
c y(i) - vectorul coef polinom continuu

```

```

c
c Subroutine MODEL2CD(n, x, T, y)
c Dimension x(n), y(n)
c semn=1
c if(2*(n/2).eq.n) semn=-1.
c do 1 k=1,n
c y(k)=0
c do 2 j=1,k
c sign=1.
c sum=0
c do 3 i=1, n-k+j
3 sum=sum+sign*Co(k+i-j-1,i-1)**(k+i-j)
sign=-sign
sum=sum*2.**((2*k-j-1)*Co(n-k-j-1,j-1)
2 y(k)=y(k)+sum
y(k)=semn*y(k)*t**(n-k)
semn=-semn
1 continue
return
end

```

```

c
c Calculul Modelului Continuu
c
c n - dim vector numitor (grad pol +1)
c c(i) - vectorul coef polinom numitor discret i=1,n
c în ordine desc
c d(j) - vectorul coef polinom numărator discret j=1,n
c în ordine desc
c T - perioada eșantionare
c a(i) - vectorul coef polinomului în
c variabila s pe ieșire
c b(j) - vectorul coef polinomului în
c variabila a pe intrare

```

```

c
c Sobroutine T2LDC(n, d, c, t, b, a)
c Dimension A(n), B(n), C(n), D(n)
c Call Model2DC(n, c, t, a)
c Call Model2DC(n, d, t, b)
return
end

```

```

c
c

```



ANEXA 2.

```

c
c
c Calculează Răspunsul unui Model Discret în q de
c forma:
c
c  $c_{n+1}y_k + c_n y_{k-1} + c_{n-1} y_{k-2} + \dots + c_1 y_{k-n} =$ 
c  $= d_{m+1} u_k + d_m u_{k-1} + d_{m-1} u_{k-2} + \dots + d_1 u_{k-m}$ 
c
c
c
c valorile  $y_{k-i}$  se vor găsi în Y(i) i=1,n
c
c
c Valorile  $u_{k-i}$  se vor găsi în U(i) i=1,m
c
c
c Valoarea curentă a intrării Uk
c
c După execuția rutinei vectorii
c U(i)→U(i+1) i=1,m-1
c Uk→U(1)
c Y(i)→y(i+1) i=1, n-1
c Valoarea curentă a ieșirii Yk→Y(1)
c
c
c Subroutine Yk(m, d, u, n, c, y, uk)
c Dimension D(m+1), U(n+1), Y(n)
c ynew=uk*d(m+1)
c if (m.eq.0) goto 29
c Do 25 i=1,m
25 ynew=ynew +d(m+1-i)*u(i)
c if (m.eq.1) goto 31
c Do 27 i=1, m-1
27 u(m+1-i)=u(m-i)
31 u(1)=uk
29 Do 26 i=1,n
26 ynew=ynew-c(n+j-i)*y(i)
c ynew=ynew/c(n+1)
c if (n.eq.1) goto 30
c Do 28 i=1, n-1
28 y(n+1-i)=y(n-i)
30 y(1)=ynew
c return
c end
c
c
c Calculul Răspunsul unui Model Discret
c în z de forma:
c
c
c  $Y(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_k z^{-k} \dots$ 
c
c
c

```

```

c  $B(z^{-1}) = b_m + b_{m-1} z^{-1} + \dots + b_0 z^{-m}$ 
c
c
c
c  $A(z^{-1}) = a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}$ 
c
c valorile  $f_k$  se vor găsi în Y(i) i=1,n ; n>0
c
c Vectorul Y trebuie inițializat cu 0.
c
c
c După execuția rutinei vectorii Y(i)→Y(i+1) i=1,n-1
c
c
c Valoarea curentă a ieșirii Yz→Y(1)
c
c
c Subroutine Yz(m, d, n, c, y)
c Dimension D(m+1), C(n+1), Y(n)
c ynew=d(m+1)
c do 1 i=1,n
1 ynew=ynew-y(i)*c(n+1-i)
c if (m.eq.0) goto 29
c do 25 i=1,m
25 d(m+2-i)=d(m+1-i)
29 d(1)=0
c if (n.eq.1) goto 30
c Do 23 i=1, n-1
28 y(n+1-i)=y(n-i)
30 y(1)=ynew
c return
c end
c
c
c Forma matriceală a modelului continuu RSCO
c
c  $\frac{dX}{dt} = AX + Bu$ 
c
c
c
c  $y = C^t X$ 
c
c
c Subroutine FCN(n, x, y, u, yprime)
c Dimension a(20), b(20)
c Dimension yprime(1), y(1), u(1)
c Common a,b,m
c yprime(1)=-a(n+1)*y(n)+b(m+1)*u(1)
c if (m.lt.1)goto 3
c do 1 i=2,m+1
1 yprime(i)=-a(n+2-i)*y(n)+b(m+2-i)*u(1)+y(i-1)
3 if (n.lt.m+2) return
c do 2 i=m+2,n
2 yprime(i)=-a(n+2-i)*y(n)+y(i-1)
c return
c end

```